細線による流体温度変動の測定*

(細線の瞬時温度分布と周波数特性)

辻 俊博^{*1}, 長野 靖尚^{*1}
田川 正人^{*1}, 東 正志^{*2}

Measurement of Temperature Fluctuations in a Flow with Cold-Wire Sensors (Instantaneous Temperature Profile and Frequency Response of Sensors)

Toshihiro TSUJI, Yasutaka NAGANO,
Masato TAGAWA, and Masashi HIGASHI

The information of the wire response is necessary for the estimation of corrections and uncertainty of temperature measurements. This paper describes the theoretical response of cold-wire sensors to temperature fluctuations in a fluid flow. Existing transfer functions of cold wires are approximate and implicit functions of frequency. We present the explicit exact solutions of heat conduction equations for a cold wire and stubs taking account of the prong effect. Because the solutions have simple forms of primary functions, we can easily calculate the frequency response of cold wires. Sample calculations are given under several typical conditions. Also, the instantaneous temperature profiles of a cold wire are obtained for the first time.

Key Words: Flow Measurements, Heat Conduction, Transfer Function, Temperature Measurement, Cold Wire, Turbulent Flow

1. 緒 言

細線を用いて流体の速度および温度を測定する場合、流体の温度変動に対する細線の応答を知ることは、測定値の補正や不確かさを解析するうえで重要である。細線の応答を求めるためには、細線、スタブ(めっき部)およびブロングの熱慣性と軸方向熱伝導を考慮した非定常熱伝導方程式を解く必要がある。これまで種々の測定条件に対して、この熱伝導方程式の解が得られているが^{(1)~(6)}、いずれも虚数を含む周波数の関数として利得と位相を与える解のみで、しかも近似がなされているため厳密さに欠けている。

本研究では、主に細線(冷線)を用いた流体温度変動の測定を考えて、この熱伝導方程式の時空間における厳密な解析解を求めた。得られた解はすべて初等関数のみで表されるため、細線の周波数応答を容易に求めることができる。また、流体温度の変動に対する細線温度分布の時間変化を初めて明らかにした。

2. 主な記号

c : 比熱
 h : 熱伝達率
 $K(r/r_s)^2(\lambda/\lambda_s)$
 L : 無次元線長 $= l/r$
 l : 線長
 L_c : 無次元冷却長 $= l_c/r$
 l_c : 冷却長 $= \{2h/(r\lambda)\}^{-1/2}$
 M : 時定数 $= \rho cr/(2h)$
 R : 無次元半径 $= hr/\lambda$
 r : 線半径
 T : 無次元時間 $= h^2 x t / \lambda^2$
 t : 時間
 U_a : 流速
 X : 無次元座標 $= x/r$
 x : 座標
 Z : スタブと細線の半径比 $= r_s/r$
 α : 温度伝導率
 λ : 熱伝導率
 ρ : 密度
 η : 利得
 Θ : 無次元温度 $= (\theta - \bar{\theta}_a)/(\bar{\theta}_p - \bar{\theta}_a)$

* 原稿受付 平成元年8月7日。

*1 正員、名古屋工業大学(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

*2 学生員、名古屋工業大学大学院。

θ_c : 細線とスタブの接合部の無次元温度

θ_m : 無次元平均温度

θ : 温度

$\Delta\theta_a$: 流体の無次元温度振幅 $=\Delta\theta_a/(\bar{\theta}_p - \bar{\theta}_a)$

$\Delta\theta_a$: 流体の温度振幅

τ_p : プロングと細線の時定数比 $=M_p/M$

ϕ : 位相遅れ

Ω : 無次元周波数 $=\lambda^2\omega/(h^2x)$

ω : 温度変動の周波数

($\bar{\quad}$): 時間平均

添字

a : 流体

p : プロング

s : スタブ

添字なしは細線を表す

3. 基礎方程式および境界条件

図1にプローブ形状と座標を示した。細線の長さを l , その両端のスタブの長さをそれぞれ $l_s/2$ とする。流体温度は, $\theta_a = \bar{\theta}_a + \Delta\theta_a \cos \omega t$ で変動するものとする。このとき, 細線とスタブのジュール発熱および線半径方向の温度変化を無視すると, 次の熱伝導方程式(無次元)が細線とスタブについてそれぞれ成立する。 $-L/2 \leq X \leq L/2$ で,

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \frac{\theta}{L_c^2} \right) + \frac{2}{R} \Delta\theta_a \cos \Omega T \quad \dots\dots\dots (1)$$

$-(L + ZL_s)/2 \leq X \leq -L/2$ および $L/2 \leq X \leq (L + ZL_s)/2$ で,

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial T_s} = \frac{1}{R_s^2} \left(Z^2 \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial X^2} - \frac{\theta_s}{L_{cs}^2} \right) + \frac{2}{R_s} \Delta\theta_a \cos \Omega_s T_s \quad \dots\dots\dots (2)$$

境界条件は,

$$X = \pm L/2: \theta = \theta_s = \theta_c \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$K \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta_s}{\partial X} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$X = \pm (L + ZL_s)/2:$$

図1 プローブ形状と座標

$$\theta_s = \theta_p = 1 + \frac{\Delta\theta_a}{\sqrt{1 + (\tau_p R \Omega / 2)^2}} \cos(\Omega_s T_s - \alpha_p) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $\alpha_p = \tan^{-1}(\tau_p R \Omega / 2)$, $\Omega T = \Omega_s T_s$ であり, プロング温度は流体の時間変動に対して一次遅れをするものと仮定している⁽¹⁾⁽⁴⁾.

4. 解析解

4.1 級数解 左右のスタブについては対称であるため, $-(L + ZL_s)/2 \leq X \leq L/2$ の区間で境界条件(3), (5)を満足する解を次のようなフーリエ級数で仮定する.

$$\theta = \theta_c + \sum \psi_n(T) \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} \quad \dots\dots (6)$$

$$\theta_s = \theta_p + (\theta_c - \theta_p) \{ (2X + L) / (ZL_s + 1) \} + \sum \psi_{sn}(T_s) \sin [n\pi \{ (2X + L) / (ZL_s + 1) \}] \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし, $\sum$ は $n=1$ から ∞ までの和を表す.

式(6), (7)を式(1), (2)にそれぞれ代入し, 固有関数の直交性を利用して X に関する積分を行えば, 関数 $\psi_n(T)$ および $\psi_{sn}(T_s)$ についての常微分方程式が得られる. この微分方程式を解くためには, 細線とスタブの接合部の温度 θ_c を時間の関数として与えなければならない. しかし未知のため, ここでは接合部の温度を流体の時間変動に対する一次遅れの形,

$$\theta_c = \bar{\theta}_c + \Delta\theta_a \Lambda \cos(\Omega T - \delta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表されるものと仮定して計算を進める. そして, 得られた細線とスタブの温度分布が境界条件(4)を満足するように, 接合部の時間平均温度 $\bar{\theta}_c$, 温度振幅 Λ および位相遅れ δ を決定する. 式(8)を $\psi_n(T)$ および $\psi_{sn}(T_s)$ の常微分方程式に代入して, 解を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned} \psi_n(T) = & -[2\{1 - \cos(n\pi)\} / \{n\pi(RL_c)^2\}] [\bar{\theta}_c / A_n \\ & - (\Delta\theta_a / \sqrt{A_n^2 + \Omega^2}) \{\cos(\Omega T - \gamma) \\ & - \Lambda \sqrt{1 + (R\Omega/2)^2} \cos(\Omega T - \delta + \alpha - \gamma)\}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_{sn}(T_s) = & [2 / \{n\pi(R_s L_{cs})^2\}] [\{\bar{\theta}_c \cos(n\pi) - 1\} / A_{sn} \\ & + (\Delta\theta_a / \sqrt{A_{sn}^2 + \Omega_s^2}) \{1 - \cos(n\pi)\} \\ & \times \cos(\Omega_s T_s - \gamma_s) + \sqrt{1 + (R_s \Omega_s / 2)^2} \\ & \times \{ \Lambda \cos(n\pi) \cos(\Omega_s T_s - \delta + \alpha_s - \gamma_s) \\ & - \cos \alpha_p \cos(\Omega_s T_s - \alpha_p + \alpha_s - \gamma_s) \}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで,

$$\begin{aligned} A_n = & \{ (n\pi/L)^2 + (1/L_c)^2 \} / R^2 \\ \alpha = & \tan^{-1}(R\Omega/2) \\ \gamma = & \tan^{-1}(\Omega/A_n) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{sn} &= \{(2n\pi/L_s)^2 + (1/L_{cs})^2\}/R_s^2 \\ \alpha_s &= \tan^{-1}(R_s\Omega_s/2) \\ \gamma_s &= \tan^{-1}(\Omega_s/A_{sn}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

である。ただし、式(9)～(11)は、簡略化のため $L_c^2 = 1/(2R)$ および $L_{cs}^2 = 1/(2R_s)$ の関係を適宜用いて整理されている。式(9)、(10)からわかるように、 Θ と Θ_s の時間的变化を表す関数 $\psi_n(T)$ および $\psi_{sn}(T_s)$ には、スタブ、ブロングの影響が振幅の変化と位相遅れの形として含まれている。次に、式(6)～(11)の温度分布を境界条件(4)に代入し、時間平均項および時間変動項について係数をそれぞれ比較することによって、式(9)、(10)中の $\bar{\Theta}_c$ 、 A および δ が以下のように決定される。

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_c &= [1 + 2 \sum [\cos(n\pi)/\{A_{sn}(R_s L_{cs})^2\}]] \\ &\quad / [1 + 2 \sum [1/\{A_{sn}(R_s L_{cs})^2\}]] \\ &\quad + (KZL_s/L) \sum [(1 - \cos(n\pi))/\{A_n(RL_c)^2\}]] \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

$$A = R_1/(P \cos \delta + Q \sin \delta) \dots\dots\dots (13)$$

$$\delta = \tan^{-1}\{(QR_1 + PR_2)/(PR_1 - QR_2)\} \dots\dots (14)$$

ここで、式(13)、(14)の定数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P &= \{2/(ZL_s)\} [1 + \{2/(R_s L_{cs})^2\} \sum [\{A_{sn} + (R_s \Omega_s L_{cs})^2\} \\ &\quad / (A_{sn}^2 + \Omega_s^2)]] + \{2K/L(RL_c)^2\} \\ &\quad \times \sum [(1 - \cos(n\pi))\{A_n + (R\Omega L_c)^2\}/(A_n^2 + \Omega^2)] \\ Q &= \{4\Omega_s/\{ZL_s(R_s L_{cs})^2\}\} \sum [\{A_{sn}(R_s L_{cs})^2 - 1\} \\ &\quad / (A_{sn}^2 + \Omega_s^2)] + \{2K\Omega/\{L(RL_c)^2\}\} \\ &\quad \times \sum [(1 - \cos(n\pi))\{A_n(RL_c)^2 - 1\}/(A_n^2 + \Omega^2)] \\ R_1 &= \{8/(R_s ZL_s)\} \sum [A_{sn}\{1 - \cos(n\pi)\}/(A_{sn}^2 + \Omega_s^2)] \\ &\quad + \{2/(ZL_s)\} \cos^2 \alpha_p + \{4 \cos \alpha_p / \{ZL_s(R_s L_{cs})^2\}\} \\ &\quad \times [\cos \alpha_p \sum [\{A_{sn} + (R_s \Omega_s L_{cs})^2\} \cos(n\pi) \\ &\quad / (A_{sn}^2 + \Omega_s^2)] + \sin \alpha_p \sum [\Omega_s \{A_{sn}(R_s L_{cs})^2 - 1\} \\ &\quad \times \cos(n\pi)/(A_{sn}^2 + \Omega_s^2)]] + \{4K/(RL)\} \\ &\quad \times \sum [A_n\{1 - \cos(n\pi)\}/(A_n^2 + \Omega^2)] \\ R_2 &= \{8/(R_s ZL_s)\} \sum [\Omega_s\{1 - \cos(n\pi)\}/(A_{sn}^2 + \Omega_s^2)] \\ &\quad + \{2/(ZL_s)\} \sin \alpha_p \cos \alpha_p + \{4 \cos \alpha_p \\ &\quad / \{ZL_s(R_s L_{cs})^2\}\} [\sin \alpha_p \sum [\{A_{sn} + (R_s \Omega_s L_{cs})^2\} \\ &\quad \times \cos(n\pi)/(A_{sn}^2 + \Omega_s^2)] - \cos \alpha_p \sum [\Omega_s \\ &\quad \times \{A_{sn}(R_s L_{cs})^2 - 1\} \cos(n\pi)/(A_{sn}^2 + \Omega_s^2)]] \\ &\quad + \{4K/(RL)\} \sum [\Omega\{1 - \cos(n\pi)\}/(A_n^2 + \Omega^2)] \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

式(9)、(10)を式(6)、(7)に代入したものが、求める級数解である。

4.2 初等関数による解の表現 上述の式(6)～(15)の級数解は、初等関数を用いて以下のように表すことができる(主要な級数の初等関数への変換については付録に記した)。

式(6)の細線の温度分布は、

$$\begin{aligned} \Theta &= \bar{\Theta}_c \cosh(X/L_c)/\cosh\{L/(2L_c)\} \\ &\quad + \Delta\Theta_a [\cos \alpha \cos(\Omega T - \alpha) \\ &\quad + \{\Lambda \cos(\Omega T - \delta) - \cos \alpha \cos(\Omega T - \alpha)\}f_1 \\ &\quad + \{\Lambda \sin(\Omega T - \delta) - \cos \alpha \sin(\Omega T - \alpha)\}f_2] \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

となる。式(16)の右辺第1項は時間平均温度であり、それに続く時間変動項には、スタブとブロングの影響が、細線とスタブの接合部の変動温度の形で含まれている。関数 f_1 、 f_2 は後述の式(22)で表される。

一方、式(7)のスタブの温度分布は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Theta_s &= [\bar{\Theta}_c \sinh\{(X + L/2 + ZL_s/2)/(ZL_{cs})\} \\ &\quad - \sinh\{(X + L/2)/(ZL_{cs})\}]/\sinh\{L_s/(2ZL_{cs})\} \\ &\quad + \Delta\Theta_a [\cos \alpha_s \cos(\Omega_s T_s - \alpha_s) \\ &\quad + \{\Lambda \cos(\Omega_s T_s - \delta) - \cos \alpha_s \cos(\Omega_s T_s - \alpha_s)\}f_3 \\ &\quad + \{\Lambda \sin(\Omega_s T_s - \delta) - \cos \alpha_s \sin(\Omega_s T_s - \alpha_s)\}f_4 \\ &\quad + \{\cos \alpha_p \cos(\Omega_s T_s - \alpha_p) \\ &\quad - \cos \alpha_s \cos(\Omega_s T_s - \alpha_s)\}f_5 \\ &\quad + \{\cos \alpha_p \sin(\Omega_s T_s - \alpha_p) \\ &\quad - \cos \alpha_s \sin(\Omega_s T_s - \alpha_s)\}f_6] \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

式(17)の右辺第1項はやはり時間平均温度であり、次の時間変動項には、ブロングの影響を示す項が直接現れる。 $f_3 \sim f_6$ は後述の式(22)で表される関数である。

また、式(12)～(15)は、

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_c &= \operatorname{cosech}\{L_s/(2ZL_{cs})\}/[\coth\{L_s/(2ZL_{cs})\} \\ &\quad + (KZL_{cs}/L_c) \tanh\{L/(2L_c)\}] \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

$$A = R_1/(P \cos \delta + Q \sin \delta) \dots\dots\dots (19)$$

$$\delta = \tan^{-1}\{(QR_1 + PR_2)/(PR_1 - QR_2)\} \dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= g_1/(ZL_s) + (K/L)g_2 \\ Q &= g_3/(ZL_s) + (K/L)g_4 \\ R_1 &= \{2 \cos \alpha_s/(ZL_s)\}g_5 + \{4 \cos \alpha_p/(ZL_s)\} \\ &\quad \times (g_6 \cos \alpha_p + g_7 \sin \alpha_p) + (K \cos \alpha/L)g_8 \\ R_2 &= \{2 \cos \alpha_s/(ZL_s)\}g_9 + \{4 \cos \alpha_p/(ZL_s)\} \\ &\quad \times (g_6 \sin \alpha_p - g_7 \cos \alpha_p) + (K \cos \alpha/L)g_{10} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となる。式中の定数および関数は以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}(R\Omega/2) \\ \alpha_s &= \tan^{-1}(R_s\Omega_s/2) \\ \alpha_p &= \tan^{-1}(\tau_p R\Omega/2) \\ a &= [(1/2)(L/L_c)^2\{\sqrt{1 + (R\Omega/2)^2} + 1\}]^{1/2} \\ b &= [(1/2)(L/L_c)^2\{\sqrt{1 + (R\Omega/2)^2} - 1\}]^{1/2} \\ a_s &= [(1/2)(L_s/L_{cs})^2\{\sqrt{1 + (R_s\Omega_s/2)^2} + 1\}]^{1/2} \\ b_s &= [(1/2)(L_s/L_{cs})^2\{\sqrt{1 + (R_s\Omega_s/2)^2} - 1\}]^{1/2} \\ f_1 &= [\cosh\{a(1/2 + X/L)\}\cos\{b(1/2 - X/L)\}] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \cosh\{a(1/2 - X/L)\} \cos\{b(1/2 + X/L)\} \\
& / (\cosh a + \cos b) \\
f_2 = & [\sinh\{a(1/2 + X/L)\} \sin\{b(1/2 - X/L)\} \\
& + \sinh\{a(1/2 - X/L)\} \sin\{b(1/2 + X/L)\}] \\
& / (\cosh a + \cos b) \\
f_3 = & [\cosh\{a_s(X + L/2 + ZL_s)/(ZL_s)\} \\
& \times \cos\{b_s(X + L/2)/(ZL_s)\} \\
& - \cosh\{a_s(X + L/2)/(ZL_s)\} \\
& \times \cos\{b_s(X + L/2 + ZL_s)/(ZL_s)\}] \\
& / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
f_4 = & [\sinh\{a_s(X + L/2)/(ZL_s)\} \\
& \times \sin\{b_s(X + L/2 + ZL_s)/(ZL_s)\} \\
& - \sinh\{a_s(X + L/2 + ZL_s)/(ZL_s)\} \\
& \times \sin\{b_s(X + L/2)/(ZL_s)\}] \\
& / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
f_5 = & [\cosh\{a_s(X + L/2 - ZL_s/2)/(ZL_s)\} \\
& \times \cos\{b_s(X + L/2 + ZL_s/2)/(ZL_s)\} \\
& - \cosh\{a_s(X + L/2 + ZL_s/2)/(ZL_s)\} \\
& \times \cos\{b_s(X + L/2 - ZL_s/2)/(ZL_s)\}] \\
& / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
f_6 = & [\sinh\{a_s(X + L/2 + ZL_s/2)/(ZL_s)\} \\
& \times \sin\{b_s(X + L/2 - ZL_s/2)/(ZL_s)\} \\
& - \sinh\{a_s(X + L/2 - ZL_s/2)/(ZL_s)\} \\
& \times \sin\{b_s(X + L/2 + ZL_s/2)/(ZL_s)\}] \\
& / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
g_1 = & (a_s \sinh a_s + b_s \sin b_s) / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
g_2 = & (a \sinh a - b \sin b) / (\cosh a + \cos b) \\
g_3 = & (b_s \sinh a_s - a_s \sin b_s) / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
g_4 = & (b \sinh a + a \sin b) / (\cosh a + \cos b) \\
g_5 = & \{(a_s/2) \sinh(a_s/2) + (b_s/2) \sin(b_s/2)\} \\
& / \{\cosh(a_s/2) + \cos(b_s/2)\} \\
g_6 = & \{(a_s/2) \sinh(a_s/2) \cos(b_s/2) \\
& + (b_s/2) \cosh(a_s/2) \sin(b_s/2)\} \\
& / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
g_7 = & \{(b_s/2) \sinh(a_s/2) \cos(b_s/2) \\
& - (a_s/2) \cosh(a_s/2) \sin(b_s/2)\} \\
& / (\cosh a_s - \cos b_s) \\
g_8 = & (a \sinh a + b \sin b) / (\cosh a + \cos b) \\
g_9 = & \{(b_s/2) \sinh(a_s/2) - (a_s/2) \sin(b_s/2)\} \\
& / \{\cosh(a_s/2) + \cos(b_s/2)\} \\
g_{10} = & (b \sinh a - a \sin b) / (\cosh a + \cos b)
\end{aligned}$$

..... (22)

関数 $f_1 \sim f_6$ および $g_1 \sim g_{10}$ は、基本的には四つのパラメータ a, b, a_s, b_s のみで表され、任意の時刻と位置における細線とスタブの温度分布を式(16), (17)から容

易に計算できる。

冷線による温度測定は、細線の平均温度 θ_m に対応する出力電圧（正しくは細線抵抗）を読むことにより一般に行われる。この θ_m は、式(16)を $-L/2 \leq X \leq L/2$ の区間で積分し、次式のように求まる。

$$\begin{aligned}
\theta_m = & \bar{\theta}_c \tanh\{L/(2L_c)\} / \{L/(2L_c)\} \\
& + \Delta\theta_a \cos a [\cos(\Omega T - \alpha) \\
& + 2(L_c/L)^2 \{\Lambda \cos(\Omega T - \delta) \\
& - \cos \alpha \cos(\Omega T - \alpha)\} g_8 \\
& + 2(L_c/L)^2 \{\Lambda \sin(\Omega T - \delta) \\
& - \cos \alpha \sin(\Omega T - \alpha)\} g_{10}] \\
= & \bar{\theta}_c \tanh\{L/(2L_c)\} / \{L/(2L_c)\} \\
& + \Delta\theta_a \eta \cos(\Omega T - \phi) \dots \dots \dots (23)
\end{aligned}$$

ここで、 η および ϕ は細線による流体温度変動の測定における利得と位相遅れであり、次式で表される。

$$\eta = \cos \alpha \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \dots \dots \dots (24)$$

$$\phi = \tan^{-1}(J_1/J_2) \dots \dots \dots (25)$$

$$\begin{aligned}
J_1 = & \sin \alpha - 2(L_c/L)^2 \cos \alpha \{g_8 \sin \alpha + g_{10} \cos \alpha\} \\
& + 2(L_c/L)^2 \Lambda \{g_8 \sin \delta + g_{10} \cos \delta\} \dots \dots \dots (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 = & \cos \alpha - 2(L_c/L)^2 \cos \alpha \{g_8 \cos \alpha - g_{10} \sin \alpha\} \\
& + 2(L_c/L)^2 \Lambda \{g_8 \cos \delta - g_{10} \sin \delta\} \dots \dots \dots (27)
\end{aligned}$$

なお、 ω と Ω は、 $M\omega = R\Omega/2$ の関係にある。

5. 計算結果

5・1 周波数応答 速度 $U_a = 10$ m/s、時間平均温度 $\bar{\theta}_a = 300$ K の空気流中に置かれたプローブについて、周波数応答を式(24)～(27)から求めて図2～4に示した。図2は、細線を直径 $d (=2r) = 3 \mu\text{m}$ 、長さ $l = 1$ mm のタングステン線、スタブを直径 $d_s (=2r_s) = 30 \mu\text{m}$ の銅とし、スタブの長さ l_s を変化させた場合の利得と位相遅れである。計算では、熱伝達率を従来の研究と同様に Collis-Williams⁽⁷⁾ の式で与え、物性値には表1に示した伝熱工学資料⁽⁸⁾の値を採用した。また、プローブの時定数を $M_p = 1$ s とした⁽¹⁾⁽⁶⁾。利得は

図2 タングステン-銅スタブプローブの周波数応答

低周波数でプロングの熱慣性により低下し、高周波数でスタブ、細線の熱慣性によりさらに低下する ($R\Omega/2=1$ が 715 Hz の流体温度変動に対応する)。位相は利得が落ち始めると遅れだし、利得が停留する領域でいったん回復し、高周波数域で再び遅れる。参考として、 $l_s=1$ mm の条件について、Petit ら⁽⁴⁾が求めた周波数解から得られる応答を比較した。彼らは、境界条件 (4) に現れる K の値を零で与え、さらに解を得るために低周波数域のみにしか成立しない強い仮定を設けている。そのため、彼らの解から求めた利得は、利得が停留する周波数域までは本計算値よりわずかに低い程度の妥当な値を示すものの、高周波数域では正しい値を示さない。なお、便宜的に K の値を零とおいて式 (24)～(27) の計算を行った結果は、Petit ら⁽⁴⁾の周波数解と (ただし、彼らが近似で省略したと思われる項を改めて考慮した場合に) 利得が停留する周波数域までの低周波数領域で一致した。

図 3 は、細線を直径 $3\text{ }\mu\text{m}$ 、長さ 1 mm の白金線、スタブを直径 $30\text{ }\mu\text{m}$ の銀 (Wollaston 線) としたプローブの周波数応答である。図 2 のタングステン線-銅スタブのプローブと比較すると、利得が全般的に増加し、位相の遅れも小さくなっている。そして、スタブの長さが減少するほど、両プローブの周波数応答特性の差異が顕著になる。これは主に、表 1 に示した細線の熱伝導率の差異に起因する (細線の時定数およびスタブの熱伝導率の差異は小さい)。したがって、同じ寸法、

表 1 計算に用いた金属の物性値

		ρ kg/m ³	c kJ/(kg·K)	λ W/(m·K)	R_s^* $\mu\Omega\cdot\text{cm}$ (0°C)	β 1/K (0–100°C)
Wire	Tungsten	19250	0.133	178	6.48	0.0036
	Platinum	21460	0.133	71.4	9.81	0.00386
Stub	Copper	8880	0.386	398	1.57	0.0041
	Silver	10490	0.237	427	1.55	0.0038

図 3 白金-銀スタブプローブの周波数応答

形状のプローブであれば、白金-銀スタブのプローブの使用が一般に有利と言える。

図 4 は、タングステン-銅スタブプローブについて、今度はスタブ長 l_s を 1 mm に固定し、細線の長さを变化させた場合の周波数応答である。 l/d の値が 400 より小さくなると、プロングの影響が強く現れ、利得の停留値がかなり低くなるとともに、低周波数域での位相遅れが顕著になる (乱流計測では $l/d < 400$ のプローブがときおり使われるので、注意が必要である)。

5.2 細線とスタブの温度分布 タングステン線-銅スタブのプローブについて、スタブ長 $l_s=1\text{ mm}$ の場合の細線とスタブの瞬時温度分布を式 (16)～(22) から求めて図 5 に示した。これらの分布は、従来の周波数解では求めることができなかった新しい知見であり、これにより利得の変化と位相遅れの発生機構が克明に示される。図 5 (a) は $R\Omega/2=10^{-3}$ におけるものであるが、この周波数では、プロングの影響によりスタブの温度が大きく時間変動し、 $\Omega T=\pi/2$ と $3\pi/2$ の分布からわかるように、細線の両端付近の温度に位相遅れが生じる。 $R\Omega/2=10^{-2}$ の周波数になると、図 5 (b) に示すように、プロングの影響がなくなってスタブの温度変動が小さくなり、細線温度の位相遅れもいったん回復する。さらに、図 5 (c) の高周波数 ($R\Omega/2=1$) になると、スタブの温度変動はより小さくなり、細線部分では温度の変動振幅が減少し、位相遅れがかなり大きくなる。

5.3 プロングの時定数および流速の影響 これまでの計算ではプロングの時定数 M_p を 1 s で与えた。実際に使用するプローブについては、プロングの大きさ、材質がさまざまであり、時定数も変化する。そこで、タングステン線-銅スタブのプローブ (スタブ長 $l_s=1\text{ mm}$) について、この値を变化させた場合の周波数応答を図 6 に示した。プロングの時定数が小さくなると、当然ながらプロングの熱慣性によって利得の低

図 4 線長による周波数応答の変化

下する周波数は高周波数側に移行し、それに応じて位相が遅れ始める周波数も高周波数側となる。しかし、 $RQ/2 \leq 10^{-1}$ での利得の停留値にはあまり影響がない。

流速の変化により、細線およびスタブの熱伝達率は変化する。図7は、流速を変化させた場合のタングス

テン線-銅スタブのプロープの周波数応答を表したものである。流速が高いほど細線およびスタブの熱伝達率が大きくなり、利得の停留値も増加する。図7では、流速が高いほどブロングの熱慣性の影響による利得の低下が低周波数側で現れるが、これはブロングの時定数を $M_p=1$ s と固定して計算しているためで、熱伝達率の増加による細線の時定数の減少で相対的にブロングの時定数が大きくなったことに関連している（図6参照）。大きな流速の変化 ($U_a=5\sim 20$ m/s) にもかかわらず、図7に示した周波数応答 η の変化はそれほど大きくない。したがって、通常の乱流計測でも、平均流速に対応する熱伝達率を与えて求めた本解析で、温度測定プロープの周波数特性が十分検討可能である。

5・4 実際の流体温度変動測定について 実際の測定で使用するプロープの周波数応答は、式(24)～(27)から求まる細線部分のみの特性ではなく、スタブの部分も含めた全体の特性である。プロープ全体の周波数応答は、次式のスタブの部分を含めた平均温度 θ_t によって評価できる。

$$\theta_t = (\theta_m + R_t^* \theta_{ms}) / (1 + R_t^*) \quad (28)$$

ここで、 θ_{ms} はスタブの平均温度であり、式(17)の積分により得られる。また、 R_t^* はスタブと細線の温度による抵抗変化の比、 $\{R_{os}^* \beta_s / (R_o^* \beta)\} (r/r_s)^2 (l_s/l) (R_o^*$

(a) $RQ/2=10^{-3}$

(b) $RQ/2=10^{-2}$

(c) $RQ/2=1$

図5 細線とスタブの温度分布

図6 ブロングの時定数の影響

図7 流速の影響

は0°C基準の電気抵抗率, β は電気抵抗の温度係数)である。ところが, 細線を直径3 μm , 長さ1 mmのタングステン線, スタブを直径30 μm の銅とした場合, スタブの長さが $l_s=10$ mmでも, R_t^* は0.0276程度の小さい値となる(電気抵抗率およびその温度係数については文献(9)の値を採用し, 表1に示した)。そのため, 式(28)による周波数応答の計算結果は, 式(24)~(27)から計算される結果と実際上差がない。したがって, 実際の測定におけるプローブの周波数応答は, 細線部分の応答のみで評価しても差し支えない。

6. 結 言

本研究では, 細線(冷線)を用いた流体温度変動の測定について, 細線, スタブおよびプローブの熱慣性と軸方向熱伝導を考慮した非定常熱伝導方程式の時空間における厳密な解析解を求めた。得られた解は, すべて初等関数のみで表されるため, 細線の周波数応答を容易に求めることができ, 実用上, 流体温度計測における測定値の補正や不確かさの解析に有用である。また, これまで示されていなかった細線温度分布の時間応答も初めて明らかになった。さらに, 限られた条件についての計算ではあるが, 得られた解析解を用いて細線による温度変動測定の基本的な周波数応答特性を検討した。

〔付 録〕

式(9)を式(6)に代入して得られる細線温度の時間変動項について, 無限級数の初等関数への変換の例を以下に示した。時間変動項は基本的に次のフーリエ級数で表されている。

$$F_1 = \sum [\cos \gamma \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / (n\pi \sqrt{A_n^2 + \Omega^2})] \\ = \sum [A_n \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / \{n\pi(A_n^2 + \Omega^2)\}] \quad (29)$$

$$F_2 = \sum [\sin \gamma \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / (n\pi \sqrt{A_n^2 + \Omega^2})] \\ = \sum [\Omega \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / \{n\pi(A_n^2 + \Omega^2)\}] \quad (30)$$

これらの級数を, 式の簡略化のため, $L_c^2 = 1/(2R)$ および $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + (R\Omega/2)^2}$ の関係を適宜用いて変形すると,

$$F_1 = (RL_c \cos \alpha)^2 \sum \{[1 - \cos(n\pi)] \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} [1/(n\pi) - n\pi A_n / \{(RL)^2(A_n^2 + \Omega^2) + n\pi\Omega^2(L_c/L)^2 / (A_n^2 + \Omega^2)\}]\} \quad (31)$$

$$F_2 = (R\Omega/2)(RL_c \cos \alpha)^2 \sum \{[1 - \cos(n\pi)]$$

$$\times \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} [1/(n\pi) - n\pi A_n / \{(RL)^2(A_n^2 + \Omega^2) + n\pi\Omega^2(L_c/L)^2 / (A_n^2 + \Omega^2)\}]\} \quad (32)$$

となり, さらに F_1, F_2 は次の三つの基本的な級数で構成されることがわかる。

$$F_3 = \sum \{[1 - \cos(n\pi)] \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / (n\pi)\} \quad (33)$$

$$F_4 = \sum [n\pi A_n \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / (A_n^2 + \Omega^2)] \quad (34)$$

$$F_5 = \sum [n\pi \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} / (A_n^2 + \Omega^2)] \quad (35)$$

これらの級数は, 公式⁽¹⁰⁾を用いて, 初等関数に変換することができる。まず, 級数 F_3 は直ちに,

$$F_3 = 1/2 \quad (36)$$

となる。級数 F_4 は, 虚数単位 i を用いて,

$$F_4 = (1/2) \sum [n\pi \{1 - \cos(n\pi)\} \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} \{1/(A_n - \Omega i) + 1/(A_n + \Omega i)\}] \\ = \{(RL)^2/2\} \sum [n\pi \{1 - \cos(n\pi)\} \times \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} [1/\{(n\pi)^2 + (L/L_c)^2 - (RL)^2\Omega i\} + 1/\{(n\pi)^2 + (L/L_c)^2 + (RL)^2\Omega i\}]] \quad (37)$$

と分解する。次に, これに公式⁽¹⁰⁾を用いると,

$$F_4 = \{(RL)^2/4\} \{ \cosh(px/L) \cosh(p/2) + \cosh(qx/L) \cosh(q/2) \} \quad (38)$$

と表すことができる。ここで, $p = a - bi, q = a + bi$ であり, さらに整理して,

$$F_4 = \{(RL)^2/2\} f_1 \quad (39)$$

と表される(虚数部は消滅する)。定数 a, b および関数 f_1 については式(22)を参照されたい。同様に, 級数 F_5 は, 虚数単位 i を用いて,

$$F_5 = \{1/(2\Omega i)\} \sum [n\pi \{1 - \cos(n\pi)\} \times \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} \{1/(A_n - \Omega i) - 1/(A_n + \Omega i)\}] \\ = \{(RL)^2/(2\Omega i)\} \sum [n\pi \{1 - \cos(n\pi)\} \times \sin \{n\pi(X/L + 1/2)\} [1/\{(n\pi)^2 + (L/L_c)^2 - (RL)^2\Omega i\} - 1/\{(n\pi)^2 + (L/L_c)^2 + (RL)^2\Omega i\}]] \quad (40)$$

と分解され, これに公式⁽¹⁰⁾を適用すると,

$$F_5 = \{(RL)^2/(4\Omega i)\} \{ \cosh(px/L) \cosh(p/2) - \cosh(qx/L) \cosh(q/2) \} \\ = \{(RL)^2/(2\Omega)\} f_2 \quad (41)$$

と表すことができる[関数 f_2 は式(22)を参照]。このようにして求めた式(36), (39), (41)の関係により, 式(16)の細線温度の時間変動項が得られる。式(7), (10)のスタブの温度および式(15)の級数も同様な式の

変形で初等関数に変換される。

文 献

- (1) Hojstrup, J., Rasmussen, K. and Larsen, S. E., *DISA Inform.*, No. 20(1976), 22.
- (2) Millon, F., Paranthoen, P. and Trinite, M., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **21**(1978), 1.
- (3) Perry, A. E., Smits, A. J. and Chong, M. S., *J. Fluid Mech.*, **90**(1979), 415.
- (4) Petit, C., Paranthoen, P. and Lecordier, J. C., *Lett. Heat Mass Transf.*, **8**(1981), 281.
- (5) Paranthoen, P., Petit, C. and Lecordier, J. C., *J. Fluid Mech.*, **124**(1982), 457.
- (6) 前川・小林・矢代, 機論, **53-492 B**(1987), 2560.
- (7) Collis, D. C. and Williams, M. J., *J. Fluid Mech.*, **6**(1959), 357.
- (8) 伝熱工学資料(改訂4版), (1986), 314, 日本機械学会.
- (9) Sigmund Cohn Corp., 編, *Properties of Metals and Alloys*, (1978).
- (10) 森口・宇田川・一松, 数学公式 II, (1984), 240, 岩波書店.