立方体中における高プラントル流体の自然対流*
(疑似スペクトル法による数値実験)木 村 繁 男^{*1}Infinite Prandtl-Number Convection in a Cube
Heated From Below
(Numerical Experiment by the Pseudospectral Method)

Shigeo KIMURA

Thermal convection of fluids heated from below occurs when the Rayleigh number becomes greater than a critical value. In general, convection gradually evolves to complex, often time-dependent, states as the Rayleigh number increases. The process involves various forms of transition, such as from one convecting pattern to another, steady to time dependent and simply periodic to chaotic oscillation. The present research focuses on an evolution process of infinite Pr convection in a cubical geometry with stress-free boundary conditions. The numerical computations have been carried out up to $Ra=2 \times 10^5$ using an efficient scheme based on the pseudospectral method. With increasing Ra , a convecting pattern starts losing its symmetries at about $Ra=7 \times 10^4$, but does not evolve to time-dependent states. Effects of truncation number on the numerical accuracy are also investigated. For example, a truncation number of $N=12$ is adequate at $Ra=10^4$, while $N=16$ is needed at $Ra=10^5$. The Nusselt number appears to grow at a rate of $Ra^{1/3}$ when Ra exceeds 10^4 , suggesting the formation of distinct thermal boundary layers.

Key Words: Convection Heat Transfer, Natural Convection, Infinite Prandtl Number, Three-dimensional Convection, Numerical Computation

1. 緒 言

流体が下方から一様に加熱される場合、レイリー数があるしきい値を超えると定常な対流が発生する⁽¹⁾。対流が発生するしきい値は流体がはいっている容器の幾何学的形状や境界条件により異なる。例えば水平方向に無限の広がりを持つような空間が流体で満たされている場合、その値は約1708である。また上面と下面がStress freeな境界面より成る場合は $27\pi^4/4 \approx 658$ である⁽²⁾。レイリー数がしきい値を超えたとき最初に発生する対流パターンは二次元のロールである。一度発生したロール対流がしきい値を超えた高レイリー数領域においても安定して存在するかについて Busse らが理論的、実験的に一連の研究を行っている^{(3)~(5)}。Busse らによれば一般にロール対流は安定しており固体壁(Rigid Boundary)の場合、プラントル数が10以上であればレイリー数が 2×10^4 程度までは安定に存在する。またStress freeの場合はさらに高いレイリー数域まで安定していることが示唆されている。しかし高レイリー数領域において対流がどのような状態で存

在するかについてはまだ十分な理解がなされているとはいえない。特にStress free boundary(壁面に沿うせん断応力が零)の場合は実験による検証が非常にむずかしいため、理論的考察や数値計算にたよらざるを得ず、高レイリー数域での対流の様子についてはrigid boundary(壁面で流速のすべての成分が零)の場合に比べさらに情報が乏しい。

Stress free boundaryは実験室においてはその実現がむずかしいが、地球物理や惑星科学に関連した現象をあつかう場合はRigid boundaryよりも適している場合が多い⁽⁶⁾。stress freeな境界条件を持つ三次元空間内における対流の数値計算はAziz-Hellums⁽⁷⁾がおそらく最初であり、その後Ozoe ら⁽⁸⁾は側壁をStress free、上下面がrigidである系の計算を行っている。しかしこれらの計算はいずれもレイリー数が 10^4 以下に限られており、高レイリー数域での対流を計算するには致っていない。そこで本研究の目的は境界条件としてStress free boundaryが与えられた場合、下方からの一様加熱により発生する対流の高レイリー数域での挙動を三次元数値計算により明らかにすることにある。Rigid boundaryが与えられた場合、レイリー数が増加するにつれさまざまな分岐過程を経て恒常的に時間依存性を持つ対流へと進化していく⁽⁹⁾。この時間依

* 昭和63年6月2日 第25回日本伝熱シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成元年4月24日。

*¹ 正員、東北工業技術試験所(〒983 仙台市苦竹4-2-1)。

存性を持つ対流への分岐は通常レイリー数が $4 \times 10^4 \sim 10^5$ で起こる。また同様の分岐は流体で飽和した多孔質層が下方より加熱を受けた場合にも観察されている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。特に正方形断面内での二次元ロール対流は多孔質のレイリー数が 10^3 以上でヌッセルト数の時間に対する変動状態がカオス的になることが報告されている⁽¹²⁾したがって Stress free boundary が与えられた場合にも同様に時間依存性を持つ対流への分岐が起こるのかに今回の研究の最大の関心がある。なお本研究においてはプラントル数が無限大の場合についてのみ計算を行ったが、その結果はプラントル数が 10 以上であるような流体に対しては良い近似を与えることが一般に知られている (例えば Busse, 1978)。また三次元空間としては立方体のみを仮定した。レイリー数が高くなるにつれて、立方体中にはさまざまなパターンの対流が存在可能となる。始めに線形解析によりその様子を明らかにし、数値計算はその中の一つの対流パターンに限定して行った。

2. 基礎方程式と境界条件

図 1 に示されるような立方体中で高プラントル数流体が下方から ΔT だけ高い温度で一様に加熱される場合を考える。側壁は断熱条件が満たされているとし、また浮力効果には Boussinesq 近似が成立すると仮定する。無次元支配方程式を導出するにあたり、長さスケールに立方体の高さ d 、時間スケールに d^2/α 、温度スケールとして温度差 ΔT を用いる。ここで α は流体の熱拡散係数である。ソレノイダルな流体の速度場は二つのポテンシャル ϕ と ψ を導入することにより式

(1) のように表現される⁽⁵⁾。

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \lambda \phi) + \nabla \times \lambda \psi \equiv \delta \phi + \epsilon \psi \dots (1)$$

ここで λ は垂直方向の単位ベクトルである。ナヴィエ・ストークスの運動方程式とエネルギー方程式は上記の ϕ と ψ を用いることにより、それぞれ式 (2) ~ (4) のように書ける。

$$\nabla^4 \Delta \phi - Ra \Delta \theta = Pr^{-1} \left[\delta \cdot \{ (\delta \phi + \epsilon \psi) \cdot \nabla (\delta \phi + \epsilon \psi) \} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Delta \phi \right] \dots (2)$$

$$\nabla^2 \Delta \psi = Pr^{-1} \left[\epsilon \cdot \{ (\delta \phi + \epsilon \psi) \cdot \nabla (\delta \phi + \epsilon \psi) \} + \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi \right] \dots (3)$$

$$\nabla^2 \theta - \Delta \phi = (\delta \phi + \epsilon \psi) \cdot \nabla \theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} \dots (4)$$

θ は熱伝導のみの場合の垂直方向に線形な温度分布からのずれを示す。なお、演算子 Δ 、プラントル数 Pr 、レイリー数 Ra は次のように定義される。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g \beta \Delta T d^3}{\alpha \nu} \dots (5)$$

ここで、 g : 重力の加速度、 β : 流体の体積膨張係数、 ν : 流体の動粘性係数である。式 (2) および式 (3) において高プラントル数 ($Pr \rightarrow \infty$) を仮定すると右辺の項がすべて零となる。また ψ は x, y 方向の速度成分を生じるため、側壁からの流体の出入りが無いという条件を満たすためには側壁で $\psi = 0$ でなければならない。したがって右辺を零とした式 (3) においてこのような境界条件を満足する ψ は恒等的に零でなければならない。したがって高プラントル数流体の自然対流を支配する方程式は次の二つとなる。

$$\nabla^4 \phi = Ra \theta \dots (7)$$

$$\nabla^2 \theta - \Delta \phi = \delta \phi \cdot \nabla \theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} \dots (8)$$

対応する境界条件は Stress free boundary を仮定すると以下ようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \theta = 0 \quad \text{on } z = 1, 0 \dots (9 \cdot a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{on } x = 1, 0 \dots (9 \cdot b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 1, 0 \dots (9 \cdot c)$$

式 (9) における境界条件は ϕ と θ を x および y 方向に cosine、 z 方向に sine に展開することにより満足される。式 (7) と式 (8) より θ を消去すると、 ϕ についての単一方程式を得る。

図 1 物理モデルと座標軸

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \phi + \delta \phi \cdot \nabla (\nabla^4 \phi) = \nabla^2 (\nabla^4 \phi) - Ra \Delta_2 \phi \quad \dots\dots\dots (10)$$

境界条件式(9)を満足するガラーキン近似は次のようになる。

$$\phi(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{ijk} \cos i\pi x \cos j\pi y \sin k\pi z \dots\dots\dots (11)$$

実際の数値計算においては $i+j+k \leq N$ なる打ち切り数 N を設定して計算を行った。ヌッセルト数は式(11)を用いて次のように計算される。

$$Nu = \frac{q'' d}{k \Delta T} = \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx dy$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5 \pi^5}{Ra} \Phi_{00k} \dots\dots\dots (12)$$

ここで q'' は単位面積当たりの平均熱伝達量である。

3. 線形解析

対流発生の臨界レイリー数近傍において ϕ は非常に小さいと考えられるため、式(10)において非線形項は無視することができる。したがって式(10)は次の線形方程式に帰着させられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 \phi) = \nabla^2 (\nabla^4 \phi) - Ra \Delta_2 \phi \dots\dots\dots (13)$$

ϕ についてのガラーキン近似式(11)を式(13)に代入することにより、 Φ_{ijk} の時間についての線形常微分方程式群を得る。この常微分方程式群の固有値が与えられた Ra 数に対して正の値を持てば、式(13)は自明でない解を持つ可能性がある。したがって立方体中に発生する対流パターンとそのときの臨界レイリー数に対して次式が成立する。

$$Ra = \frac{\pi^4 (i^2 + j^2 + k^2)^3}{i^2 + j^2} \dots\dots\dots (14)$$

対流パターンとそのときの臨界レイリー数を図2に示す。 $k=1$ は対流が上下2層に分離されない場合を、 $k=2$ は分離される場合を表す。一般に $k=2$ は $k=1$ の場合より高い臨界レイリー数を持つので通常では発生しにくい。また $k=1$ の場合、 $i^2 + j^2$ の値が大きいと臨界レイリー数の値も大きくなっていく。これは縦長に分割されたセルを持つ対流パターンは、セルの数が多ほど高い臨界レイリー数を持つことを意味する。最も低い臨界レイリー数を持つパターンは2次元ロールであり式(11)においてスペクトル係数 Φ_{101} により支配される対流である。図2にはスペクトル係数のインデックスのみを示してある。以下においても対流パターンを支配するスペクトル係数のインデックスにより対流パターンを識別する。最も低い臨界レイリー数を持つパターンは2次元ロール(101)であり、立方体の

上面と下面間の温度差を徐々に大きくしていくとき $Ra = 8\pi^4 \approx 779$ で最初に発生する対流である。レイリー数が $27\pi^4/2 \approx 1315$ を過ぎると三次元対流(111)が発生可能となる。発生可能な対流パターンが複数個存在するときどのパターンが実現されるかという問題は興味深い。Straus-Schubert⁽¹³⁾ は多孔質層内対流についてガラーキン法に基づく数値実験を行った結果、ランダムな初期値が与えられた場合、線形理論により発生可能とされるいずれの対流パターンも出現可能であるという結論を得ている。本研究では最も低い臨界レイリー数を持つ三次元対流(111)モードを選び、その高レイリー数域での挙動を明らかにしていく。

4. 数値計算

数値計算は疑似スペクトル法に基づく計算方法を行った。疑似スペクトル法は微分演算を解析的に行うというガラーキン法の長所を保ちながら、ガラーキン法よりはるかに高速な演算を可能にするという特徴を持っている。これは非線形な対流項の計算がガラーキン法においてはスペクトル空間においてなされるのに対し、疑似スペクトル法においては一度物理空間にもどしてから実行されるためである。すなわち非線形項をスペクトル空間において実行する場合、級数同志の積を計算する必要がある。三次元計算の場合打ち切り数 N に含まれる級数の項数は N^3 に比例するので、非線形項の計算に必要な演算回数は N^6 に比例し、したがって計算時間も N^6 に比例して長くなる。これに対して物理空間における非線形項の計算時間は物理空間にお

図2 対流パターンと臨界レイリー数

けるグリットの数にのみ比例する。スペクトル空間で打ち切り数 N の情報は物理空間にもどすことにより N^3 に比例するグリット上に移される。したがって疑似スペクトル法による計算時間は N^3 に比例する。 N が十分に大きくなると両者の差は容易に数百倍にも達する。今回の計算では最大 $N=20$ を用いて行った。

計算は式(11)でフーリエ係数 $\phi_{lm}(t)$ を他の係数より大きな値に設定して開始した。臨界レイリー数が 1315 なので、数値計算は $Ra=1800$ から始め最大 2×10^5 まで増加させた。2 回め ($Ra=2500$) 以後の計算は常に前回の計算結果を初期値として計算を続けた。この間打ち切り数は $N=6$ から最大 $N=20$ まで変化した。差分法による計算精度がグリットの数と正の相関関係があるのと同様に、ガラーキンなどのスペクトル法の計算精度は打ち切り数 N と正の相関関係がある。計算精度の検定を行う場合レイリー数を一定に保ち、ヌッセルト数の打ち切り数 N への依存性を調べることが一般に行われている。今回の場合、打ち切り数を増加させてもヌッセルト数の変化が 5% 以下であるためには、 $Ra=5000$ で $N=8$ 、 $Ra=10^5$ では $N=16$ 以上が必要であった。

図 3 (a) には $Ra=5 \times 10^3$ の場合の θ の各水平断面における分布を示す。なお各水平断面 A~F の z 方向の位置を表 1 に示す。図 3 (a) 中において実線は正の値を、破線は負の値を示す。 θ は熱伝導解からのずれを示しているので、 $z < 0.5$ では一般に熱伝導解よりも低温に、逆に $z > 0.5$ では熱伝導解よりも高温になっていて対流による効果が現れている。しかし下面側の向かい合うコーナからの上昇流と上面側の他の一対のコーナからの下向流に対応する領域ではそれぞれ高温および低温となっていて、対流パターンの影響が現れている。図 3 (b) には同じレイリー数における各水平断面 A~F での z 方向流速 w の分布を示す。断面 A においては対面する両コーナとそれらを結ぶ対角線にそって上向きの流れが発生し、上昇するにつれて流速を増す。また $x=0.5$ 付近で中央部の流向が上向きから下向きに方向が変わり、角コーナ近傍での流速は最大となる。すなわち下向流が上昇流を分断することになり、上昇流はその後二つの対面するコーナに分けられて徐々に減速していく。図 3 にはいくつかの対称性が存在している。その第 1 は各水平断面において二つの対角線に対する対称性である。その第 2 は $z=0.5$ に対する反対称性で、 $z=0.5$ に対して対称な二つの水平断面において、一方の流速や温度分布の符号を変えて 90° 回転すると他方における分布と同一になる。

図 4 (a), (b) には $Ra=5 \times 10^4$ の場合の各水平断

面における θ および w の分布を示す。全体的な特徴は $Ra=5 \times 10^3$ の場合と同様である。ただしレイリー数の増加にともない各断面での θ の絶対値は大きくなり、対流による影響がより顕著に現れている。 w の絶対値は $Ra=1 \times 10^3$ の場合に比べ約 5 倍になっている。また各水平断面での対角線に対する対称性、 $z=0.5$ に対する反対称性は保たれている。なお図 3, 4 の温度場において数値データは対称・反対称性を有しているにもかかわらず図形出力上の問題で一部本質的でない等高線が現れている。

図 5 (a), (b) には $Ra=10^5$ の場合の θ および w を示す。流速 w の絶対値は $Ra=5 \times 10^4$ に比べ約 1.5 倍程度増加している。これらの図においてこれまでと異なる最も特徴的なことは、 z 方向の対称性と各水平断面での 1 本の対角線に対する対称性がくずれていることである。このようにレイリー数の増加にともない対流パターンの中に存在していた対称性が徐々にくずれていく過程は飽和した多孔質層が下方加熱を受ける場合にも見られる⁽¹²⁾。対称性の破壊を確認する目的で $N=12, 16, 20$ のそれぞれの打ち切り数を用いて計算したが、すべて同様の結果が得られた。

図 6 にはレイリー数が 1800 から 2×10^5 まで増加したときのヌッセルト数を示す。ヌッセルト数は各レイリー数で定常状態に達した後式(12)を用いて求めた。レイリー数が 3000 まではヌッセルト数の立上りがすどく、その後しだいにこう配がゆるやかになり、 10^4 以上ではほぼレイリー数の $1/3$ 乗に比例して増加している。これはレイリー数が 10^4 以上では、上、下面近傍での温度境界層が十分に発達していることを示している。またヌッセルト数が打ち切り数 N によりどの程度変化するかについても同じ図に示してある。

5. 結 論

プラントル数無限大の流体が下方から加熱された場合の対流の様子を三次元空間において数値的に解明した。三次元空間としては立方体を考え、速度場の境界

表 1 各水平断面の z 方向における位置

	Truncation Number	
	N=8	N=12
A	0.111	0.077
B	0.222	0.231
C	0.444	0.462
D	0.555	0.538
E	0.777	0.769
F	0.888	0.923

図 3 各水平断面における θ および w ($Ra=5 \times 10^3$, $\Delta\theta=0.1$, $\Delta w=10$, $N=8$)

図 4 各水平断面における θ および w ($Ra=5 \times 10^4$, $\Delta\theta=0.1$, $\Delta w=50$, $N=12$)

条件としては, Stress free な条件を想定した。対流パターンとしては式(11)におけるスペクトル係数 ϕ_{lm} により支配されるパターンを選択した。線形解析によりこのパターンは三次元対流の中で最も低い臨界レイリー数 ($Ra=1315$) を持っていることを示した。数値計算はレイリー数が1800から始め, 2×10^5 まで増加させた。その結果, $Ra=5 \times 10^4$ までは流れおよび温度場にいくつかの対称性の存在が認められた。その一つ

は各水平断面において対角線を軸とした線対称性であり, 例えば $z=0.25$ における θ は $z=0.75$ における θ の符号を逆転して 90° 回転させることにより得られる。これらの対称性はレイリー数が 10^5 において各水平断面における一つの対角線についての対称性を残しにくずれる。またレイリー数が 10^4 以上ではヌッセルト数がほぼレイリー数の $1/3$ 乗に比例して増加していくことが認められた。数値計算における打ち切り数 N が

図5 各水平断面における θ および w ($Ra=10^5$, $\Delta\theta=0.1$, $\Delta w=50$, $N=12$)

図6 レイリー数とヌッセルト数

計算精度に与える影響も調べた。その結果、ヌッセルト数の違いが5%程度になるためにはレイリー数が 10^4 で $N=12$, 10^5 では $N=16$ がそれぞれ必要であることが示された。Rigid boundary の場合 $Ra=4 \times 10^4 \sim 10^5$ で発生するとされている時間依存性を持つ対流の存在は、Stress free の境界条件に基づく今回の計算範囲においては確認されなかった。

文 献

- (1) Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (1981), 35, Dover.
- (2) Busse, F. H., Non-linear properties of thermal convection, *Rep. Prog. Phys.*, **14**(1978), 1931.
- (3) Busse, F. H. and Whitehead, J. A., *J. Fluid Mech.*, **47** (1971), 305.
- (4) Busse, F. H. Bolton, E. W. and, *J. Fluid Mech.*, **146** (1984), 115.
- (5) Bolton, E. W. and Busse, F. H., *J. Fluid Mech.*, **150** (1985), 487.
- (6) Schubert, G., *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **7**(1979), 289.
- (7) Aziz, K. and Hellums, J. D., *Phy. Fluids*, **10**(1967), 283.
- (8) Ozoe, H., Natural Convection in a Confined Regime, 博士論文(京大), (1976).
- (9) Gollub, J. P. and Benson, S. V., *J. Fluid. Mech.*, **100** (1980), 449.
- (10) Horne, R. N. and O'sullivan, M. J., *J. Fluid Mech.*, **66** (1974), 339.
- (11) Schubert, G. and Straus, J. M., *J. Fluid Mech.*, **121** (1982), 301.
- (12) Kimura, S., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **166**(1986), 305.
- (13) Straus, J. M. and Schubert, G., *J. Fluid Mech.*, **91** (1979), 155.