すきま幅が変動し中心部からの吹出しを有する
平行2円板間の非定常粘性流*
(中心部全圧の時間的变化が与えられる場合)

王 祖 温^{*1}, 石 沢 進 午^{*2}, 高 橋 浩 爾^{*3}

The Unsteady Viscous Flow between Two Parallel Disks with a Time-Varying Gap Width and a Central Fluid Source
(The Case Where the Total Pressure of the Fluid Source Is Forcibly Varied with Time)

Zuwen WANG, Shingo ISHIZAWA and Koji TAKAHASHI

This paper analyzes an unsteady viscous incompressible flow between two parallel disks with a time-varying gap width and a central fluid source whose total pressure is arbitrarily varied with time. The theoretical results obtained in the authors' previous papers, which analyzed the case where the rate of flow from the source is forcibly varied with time, are utilized, and the flow is now solved under the boundary conditions of a given time-varying total pressure of the fluid source by the Houbolt method. Experiments were carried out for the special case where the gap width is varied sinusoidally with time, and the total pressure of the fluid source is kept constant by making a hole at the center of the upper disk. The theoretical results are in good agreement with the experimental ones over a wide range of the oscillatory Reynolds number and nondimensional amplitude of the gap width.

Key Words: Unsteady Flow, Viscous Flow, Time-Varying Gap Width, Parallel Disks, Time-Varying Total Pressure, Oscillatory Reynolds Number

1. 結 言

すきま幅 h および中心部からの吹出し流量 q がそれぞれ任意の時間的変動をなしているような平行2円板間の非定常粘性流を考える。このような流れ現象は実際応用上いろいろな機械・装置に見られるが、それら実際の流れにおける中心部吹出し流れの状態に関しては、典型的な理想モデルとして、次の二つの状態が考えられる。

(1) 吹出し流量の時間的变化が外部から強制的に規制された形で与えられる場合(前報⁽¹⁾⁽²⁾の対象)

(2) 中心吹出し部に外部から規制された形の時間変動全圧が印加されている場合(本報の対象)

前2報⁽¹⁾⁽²⁾では、上記の(1)の場合を取扱い、理論解析と実験を行って高精度・広条件範囲適応の級数解を得た。本報は、モデル(2)の場合を対象とする。

理論解析の対象として見た場合、この(1)と(2)は互いに「順」と「逆」の関係となっている。すなわち、(1)においては、(2)の場合に条件として規定される

ところの中心部の圧力が解析の結果として最後に求められるものであるのに対し、(2)においては、逆に、(1)の場合に条件として与えられるところの吹出し流量の時間変化が、解析の結果として最後に求められるものとなっている。

そして、少なくとも前2報⁽¹⁾⁽²⁾を含めた本研究における「多重級数展開理論」⁽³⁾⁻⁽⁵⁾を基礎とした解析法の立場から見た場合、(1)は「順問題」に相当して解きやすいのに対し、(2)は「逆問題」に相当して、直接的には取扱にくい形となっている。そこで、本報においては、(1)の問題の解析結果を利用し、それを数値的に逆に解く(中心部全圧を与えて流量を求める)ことを試みる。そして、それによって得られた $q(t)$ の結果をふたたび前報⁽²⁾の解に代入することによって、円板に作用する圧力と流体力を求める。

理論解析に当たっては、前報⁽²⁾と同じように、二つの前提条件を設定する。すなわち、 r_e を円板外半径、 r_0 を中心部の穴半径とすると、 $r_e/r_0 \gg 1$, $h/r_0 \ll 1$ の場合を考え、かつレイノルズ数が流れの非線形慣性効果を無視できない程度には大きい、あまり極端には大きくない場合[すきま入口付近に形成される吹出し流れの助走区間の長さが $(r_e - r_0)$ に比較して短く無視されうるような状態]を対象とする。以上の前提の

* 原稿受付 平成元年9月27日。

^{*1} 正員、上智大学大学院 (〒102 東京都千代田区紀尾井町7-1)。

^{*2} 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

^{*3} 正員、上智大学理工学部。

次元圧力 p_* および流体力 W_* は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} p_{1*} &= (r_*^2 - 1) \frac{P_1}{h_*^4} + R_q (\ln r_*) \frac{P_2}{h_*^3} \\ &\quad + R_q^2 \left(\frac{1 - r_*^2}{r_*^2} \right) \frac{P_3}{h_*^2} - \frac{j}{2h_*^2} \left(R_q - \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \\ p_{2*} &\doteq p_{1*}(r_* = \kappa, t) + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \left(\frac{1}{2h_*^2} \right) \\ &\quad \times \left(R_q - \kappa^2 \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r_*}{\kappa} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{II-13})$$

$$\left. \begin{aligned} W_{1*} &= -\frac{\pi}{2} \left\{ \sigma_1 \frac{P_1}{h_*^4} + R_q \sigma_2 \frac{P_2}{h_*^3} \right. \\ &\quad \left. + 2R_q^2 \sigma_3 \frac{P_3}{h_*^2} + j \frac{\sigma_4}{h_*^2} \left(R_q - \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \right\} \\ W_{2*} &\doteq \pi \left\{ \kappa^2 p_{1*}(r_* = \kappa, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4h_*^2} \left(R_q - \kappa^2 \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{II-14})$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} p_{1*}, W_{1*}: & r_e \geq r \geq r_0 \text{ の領域における値} \\ p_{2*}, W_{2*}: & r_0 > r \geq 0 \text{ の領域における値} \\ \sigma_1 &= 1 - 2\kappa^2 + \kappa^4; \sigma_2 = 1 - \kappa^2 + 2\kappa^2 \ln \kappa \\ \sigma_3 &= 1 - \kappa^2 + 2 \ln \kappa; \sigma_4 = 1 - \kappa^2 \\ j &= \begin{cases} 0: (S_1/2h_*) \leq R_q \\ 1: (S_1/2h_*) > R_q \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

式中の P_1, P_2 および P_3 は次のような $\{S_k\}$ および $\{K_k\}$ に関する多重級数展開式によって表される。

$$\left. \begin{aligned} P_1(t) &= (3.000\ 00 S_1) + (-8.357\ 14 \times 10^{-1} S_1^2 \\ &\quad + 2.996\ 47 \times 10^{-1} S_2) + \dots \\ P_2(t) &= (-1.200\ 00 \times 10^1) + (1.371\ 43 S_1 \\ &\quad - 1.200\ 00 K_1) + (5.943\ 10 \times 10^{-3} S_1^2 \\ &\quad - 2.357\ 10 \times 10^{-3} S_2 - 4.285\ 71 \times 10^{-3} S_1 K_1 \\ &\quad + 1.428\ 57 \times 10^{-3} K_1^2 + 1.412\ 89 \times 10^{-3} K_2) + \dots \\ P_3(t) &= (-7.714\ 29 \times 10^{-1}) + (5.194\ 81 \times 10^{-4} S_1 \\ &\quad + 5.714\ 29 \times 10^{-3} K_1) + (3.124\ 09 \times 10^{-5} S_1^2 \\ &\quad - 6.381\ 15 \times 10^{-6} S_2 - 2.716\ 33 \times 10^{-5} S_1 K_1 \\ &\quad - 1.416\ 20 \times 10^{-4} K_1^2 - 8.166\ 29 \times 10^{-5} K_2) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{II-15})$$

変数パラメータ群 $\{S_k\}$ および $\{K_k\}$ はそれぞれ次のように定義されている(無次元量を用いて書き改めて示す)。

$$S_1 = h_* \frac{dh_*}{d\tau}, \quad S_2 = h_*^3 \frac{d^2 h_*}{d\tau^2} + S_1^2, \dots \dots\dots (\text{II-8-a})$$

$$K_1 = \frac{h_*^2}{R_q} \frac{dR_q}{d\tau}, \quad K_2 = \frac{h_*^4}{R_q} \frac{d^2 R_q}{d\tau^2} + 2S_1 K_1 - K_1^2, \dots \dots\dots (\text{II-8-b})$$

2・2 モデル(II)の場合の境界条件とそれを満足する関係式

一般的な状態としては、モデル(1)および(2)のいずれの場合においても、円板中心部に「吹出し流れ供給管」が取付けられ、そのためにこの中心部における流れは外界静止域の流体とは固体壁で隔絶された状態となっている。したがって、この点に関する限り、モデル(1)とモデル(2)の場合とで特に異なるところはない。

しかし、モデル(2)における一つの特殊な状態としての「穴あき円板」の場合には、中心部に「流れ供給管」なるものは存在せず、したがって $r < r_0$ の中心部の流れは、円板外周部と同じように、直接外界の流体と連続的に接触した状態となっている。

このために、この穴あき円板の場合に限り、 $r = r_0$ における境界条件として次のものを考えねばならない。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0 \leq 0: & p_1 = p_e \\ \bar{u}_0 > 0: & p_1 = p_e - \frac{1}{2} \rho \bar{u}_0^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\bar{u}_0$ は $r = r_0$ (中心部すきま出口)における径方向平均流速であり、次式で与えられる。

$$\bar{u}_0 = \frac{q(t)}{2\pi r_0 h} - \frac{1}{2} \frac{r_0}{h} \frac{dh}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

以上の「穴あき円板」の特殊な場合をも含めてモデル(2)の場合に一般的に適用できる関係式を求めれば、式(II-13)および式(II-14)の代わりにそれぞれ次の式(3)および式(4)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} p_{1*} &= (r_*^2 - 1) \frac{P_1}{h_*^4} + R_q (\ln r_*) \frac{P_2}{h_*^3} \\ &\quad + R_q^2 \left(\frac{1 - r_*^2}{r_*^2} \right) \frac{P_3}{h_*^2} - \frac{j}{2h_*^2} \left(R_q - \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \\ p_{2*} &\doteq p_{1*}(r_* = \kappa, t) + j \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \left(\frac{1}{2h_*^2} \right) \\ &\quad \times \left(R_q - \kappa^2 \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r_*}{\kappa} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{1*} &= -\frac{\pi}{2} \left\{ \sigma_1 \frac{P_1}{h_*^4} + R_q \sigma_2 \frac{P_2}{h_*^3} \right. \\ &\quad \left. + 2R_q^2 \sigma_3 \frac{P_3}{h_*^2} + j \frac{\sigma_4}{h_*^2} \left(R_q - \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \right\} \\ W_{2*} &\doteq \pi \left\{ \kappa^2 p_{1*}(r_* = \kappa, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{j}{4h_*^2} \left(R_q - \kappa^2 \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式中の j' については、「穴あき円板」以外の一般的な場合に対して $j' \equiv 1$ であるが、「穴あき円板」の場合に対しては

$$j' = \begin{cases} 0: \kappa^2 (S_1/2h_*) \geq R_q \\ 1: \kappa^2 (S_1/2h_*) < R_q \end{cases}$$

となる。

中心吹出し部, すなわち $r < r_0$ の領域においては, 本理論の前提条件 ($h/r_e, h/r_0 \ll 1$) のもとでは, 粘性の作用がすきま内 ($r_0 \leq r \leq r_e$) のそれに比較して十分に弱く無視可能であり, したがって流れの全圧はこの領域内のいたるところでほぼ一様とみなすことができる。そして, $r=0$ で $u=0$ であることから, その全圧は $r=0$ における静圧 $p_{20} \equiv p_2(r=0, t)$ に等しい値をもつ。

さて, モデル(II)においては, この中心吹出し部における全圧 p_{20} が時間的に一定不変, あるいは外部から規制された形で任意の時間の既知関数として与えられる。式(3)と上述のことから, この p_{20} に関する関係式は, 結局次のような表現によって与えられることになる。

$$p_{20*} \equiv p_{1*}(r_* = \kappa, t) + j \left\{ \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \left(\frac{1}{2h_*^2} \right) \left(R_q - \kappa^2 \frac{S_1}{2h_*} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$p_{20*} = \frac{h_*^4 (p_{20} - p_e)}{\rho \nu^2 r_e^2} : \text{任意の時間の既知関数}$$

$$p_{1*}(r_* = \kappa, t) = (\kappa^2 - 1) \frac{P_1}{h_*^4} + R_q (\ln \kappa) \frac{P_2}{h_*^3} + R_q^2 \left(\frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right) \frac{P_3}{h_*^2} - \frac{j}{2h_*^2} \left(R_q - \frac{S_1}{2h_*} \right)^2$$

なお, 「穴空き円板」の場合には, $p_{20*} = 0$ となる。

上式(5)は, $R_q(\tau)$ と $h_*(\tau)$ の変動形態を与えて $p_{20*}(\tau)$ を求める形, すなわち $p_{20*}(\tau)$ に関して陽表示の形となっている。しかるに, 本論文のモデル(II)の場合には, $p_{20*}(\tau)$ は既知関数として与えられ, 代わりに $R_q(\tau)$ を求めることが要請される。この観点から式(5)をみると, これは $R_q(\tau)$ に関するきわめて複雑な形の非線形常微分方程式となっている。これを解くことが, 本論文の中心課題となる。

2.3 モデル(II)に対する計算法 式(II-8)および第2次項までで打ち切った式(II-15)を式(5)に代入, 整理すれば, 次のような $R_q(\tau)$ に関する二階 [式(II-15)の打ち切り次数を高めればこの階数はそれに依りてさらに高くなる] の非線形常微分方程式の形となる。

$$\frac{d^2 R_q(\tau)}{d\tau^2} + C \frac{dR_q(\tau)}{d\tau} + K R_q(\tau) = f \dots\dots\dots (6)$$

ここで,

$$C = C(h_*, S_1, R_q, \frac{dR_q}{d\tau})$$

$$K = K(h_*, S_1, S_2, R_q)$$

$$f = f(h_*, p_{20*}, S_1, S_2, R_q)$$

通常の初期値問題においては, 一般に n 階の微分方程式に対しては n 個の初期条件が必要とされる。しかし, 以上に求めた本理論の級数解は, 本来運動開始直後の過渡現象が過ぎ去ったあとの「究極漸近状態」に対してのみ正しく適用できるものである。過渡現象が過ぎ去ったということは運動開始時点の初期条件の影響が消滅したということにほかならないから, この過渡現象消滅状態すなわち「究極漸近状態」に対しては, 式(6)の階数がいかに高くなっても, 原理的に初期条件を必要とせず解を定めることが可能である。

式(6)の解法としては, 式の形がきわめて複雑ゆえ数値的な方法によらざるを得ないが, 「究極漸近状態」を求めるという点から前進解法が適しているものと考えられる。ただし, 検討の結果によれば, 式(6)の高度の非線形性のために Runge-Kutta タイプやその他の陽公式前進法では解が数値的に不安定となり, 急速に発散してしまう。そこで本研究では, 数値的により安定な多段陰公式に基づく Houbolt 法⁹⁾を採用した。

さきに「初期条件」が不要と述べたが, 前進解法を採用以上, 計算の出発点では関数に何らかの値を与える必要がある。これらの出発値は, 求むべき「究極漸近状態」には影響を与えない(したがってこれらは初期値問題における「初期条件」と言うべきものではない)から, その面からは任意の値でよいと言えるが, 実際には, 特にステップサイズを必要以上に細かくした場合, あまりかけ離れた値では解が発散してしまうことが多い。また, できるだけ早く漸近を完了させる意味からも, 求むべき解になるべく近い値を与えることが望ましい。そこで本研究では, 出発値として Navier-Stokes 方程式の慣性項を省略して得られる純粘性流の近似解:

$$R_q(\tau) = \frac{h_*^3 p_{20*}(\tau)}{12 \ln(\kappa^{-1})} + \frac{r_{s*}^2}{2} \frac{dh_*(\tau)}{d\tau} \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$r_{s*} = \sqrt{(1 - \kappa^2) / (2 \ln(\kappa^{-1}))}$$

の値を用いた。Houbolt 法は多段(3段)形式であるから, 出発点とそれに先立つ2点の合計3点における値をこの式によって与えた。

過渡現象が消滅した(「究極漸近状態」が達成された)とみなされる時点の判定法としては, 計算が発散しない範囲内で出発値を変えてみて, それらの解がほぼ1本のカーブにまとまる時点を探ればよい。なお特に $h_*(\tau)$ あるいは/および $p_{20*}(\tau)$ が周期的変動をする場合には, もっと簡便な方法が可能である。すなわち, 出発値は1種類だけとし, 解 $R_q(\tau)$ が周期的にほぼ同一の変化を繰返すようになり始めた時点を見定めればよ

い。

以上のような方法によって、後出式(13)のすきま幅変化をなす「穴あき円板」の場合について「究極漸近状態」の解 $R_q(\tau)$ を求めた例を図2に示す。

3. 本理論の適用性に関する考察

本理論によって求められた圧力に関する級数解：式(3)および式(5)は、2種類の異なる級数展開の組合せから成っている。すなわち、一つは時間軸方向の級数展開であって、式(II-15)に示される係数関数 $P_1, P_2, P_3, \dots$ に関する多重級数展開であり、もう一つは、径方向に関する級数展開であって、展開各項の中に上記の $P_1, P_2, P_3, \dots$ を係数として含む式(II-1・c)、式(3)、(5)の形の漸近級数展開である。

以下には、これらの級数展開の収束および精度に関して特に注意すべき問題とその対策について述べる。

3・1 多重級数展開：式(II-15) 多重級数展開式(II-15)の収束に関しては特異点の存在に注意しなければならない。いま解： $R_q(\tau)$ が零点を横切って符号を変えることがあれば、すなわち τ_0 を有限値として $\tau = \tau_0$ において $R_q = 0$ ($\tau \neq \tau_0$ では $R_q \neq 0$) ……(8) となることがあれば、そこが本理論の変換形式に特有の特異点に相当し、式(II-8・b)の変数パラメータ群が無限大となるために、式(II-15)の P_2 以降の展開が見掛け上発散するという問題を生ずる。

しかしながらこのような場合、収束の悪化する範囲は、前報⁽²⁾に述べたように、一般に特異点の近傍のきわめてせまい時間領域内に限られ、それ以外では良好な収束の解が得られるので、上述の特異性は少なくとも実用上はほとんど問題とはならない[後出の図7参照]。加えて、もし特に必要ならば、たとえば付録に述べるような方法によって、特異点の近傍のみに適用できる精密変形級数解を別途に求めて、本論文の級数解に接続することもできる。

3・2 漸近級数展開：式(3)、(5) 式(3)、(5)、したがってそれらの導出の基礎となった式(II-

1)の級数展開はいずれも基本的にはパラメータ (R_q/r_*^2) あるいは (R_q/κ^2) に関するべき級数の形をしている。したがってこれらのパラメータが大きくなったとき、すなわち R_q 一定のもとでは r_* あるいは κ が小さくなるほど(円板中心へ近付くほど)級数の収束が急速に悪化する。加えて、すきま入口へ近付けば、そこには本理論で考慮に入れていない助走区間が存在し、その影響も現れてくる。前2報⁽¹⁾⁽²⁾の場合には、条件として与えられた R_q がたとえかなり大きくとも、得られる解の精度低下は円板中心に近い領域に限られ、流れ領域の大部分の面積を占める円板外周近くに対しては依然として良好な精度の解が得られることが多かった。これに対して、本報の場合には、式(3)、(5)にとって収束上もっとも不利な、そして本理論[すなわち式(3)、(5)]で考慮に入れていない助走区間の影響も大きく現れてくることの多い円板中心近くの位置 ($r_* = \kappa$) において圧力に関する境界条件が与えられるので、上述のような性質をもつ式(5)から得られる $R_q(\tau)$ の解は、多くの場合必然的にかなりの精度低下を伴うこととなる。この意味で、式(3)、(5)に基づく本報の解析は、前2報⁽¹⁾⁽²⁾に比較してより困難な立場にあると言わねばならない。

具体的な数値例[前前報⁽¹⁾の図7(a)参照]で説明すると、モデル(1)[前2報⁽¹⁾⁽²⁾]の場合には、圧力 p_{1*} の解の妥当な範囲は、 $R_q \leq 36, a = 0.38$ のとき $r_* = 0.13$ において $R_q \leq 0.9, r_* = 0.33$ において $R_q \leq 2.5, r_* = 0.80$ において $R_q \leq 4.1$ であり、したがってたとえば $R_q = 4.1$ のときには、 $r_* \leq 0.80$ の領域では解が妥当でなくとも $r_* \geq 0.80$ の領域では依然として妥当性を保っている。ところが、これに対しモデル(2)[本報]の場合には、たとえば $\kappa = 0.13$ のときには、 $r_* = \kappa = 0.13$ において圧力に関する境界条件が与えられ、それを満足する式(5)の解として R_q が定められるから、その R_q を用いてあらためて式(3)によって計算された各半径位置における圧力 p_{1*} の解は、すべての r_* の位置にわたって $R_q \leq 0.9$ のときにしか妥当性が保証されないことになる。

次に、上述のことに関連するが、円板中心穴部に印加される流れの全圧に関する制約について検討する。

いま、簡明のためにもっとも基本的にして単純な次の場合を例にとって考えよう。

$$h_* \equiv 1 \quad \text{かつ} \quad p_{20*} \equiv \text{const.} \quad \dots\dots\dots (9)$$

この場合には式(5)は次のようになる。

$$p_{20*} = AR_q^2 + BR_q \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$A = (0.7714\kappa^2 - 0.2714)/\kappa^2, \quad B = -12 \ln \kappa$$

図2 通り抜け流れのレイノルズ数 R_q の計算結果例

すなわち、 p_{20*} は、 κ 一定のもとでは R_q に関する二次式によって表される。したがって、 $A < 0$ 、すなわち $\kappa < 0.59315$ のときには

$$\frac{\partial p_{20*}}{\partial R_q} = 2AR_q + B = 0$$

となる点、すなわち

$$R_q \equiv R_{qc} = \frac{-B}{2A} = \frac{6\kappa^2(-\ln \kappa)}{(0.2714 - 0.7714\kappa^2)} \quad \cdots (11)$$

なる R_q の値のときに p_{20*} は

$$(p_{20*})_{\max} = \frac{-B^2}{4A} = \frac{36\kappa^2(\ln \kappa)^2}{(0.2714 - 0.7714\kappa^2)} \quad \cdots (12)$$

なる極大値を形成して、 R_q が R_{qc} より大きくなると p_{20*} はそれまでの上昇傾向から反転して下降傾向を示すようになる[なお、ここで上式(11)、(12)の分母が0となる $\kappa = 0.59315$ の付近においては、式(II-1・c)において P_3 を含む項より高次の、本論文では求められていない P_4 を含む項の影響が支配的となってくるので、上述とは異なった傾向を示すようになる]。

しかしながら、実際の現象においては、特殊な例外的現象(たとえば作動流体が液体で大気中へ流出する場合の流線の放射状分裂現象など)を除けば、明らかにそのようなことはなく、 p_{20*} は一般に R_q とともに単調に増大していくことが経験的に明らかである。したがって、本論文の有限打ち切り級数解に関しては、おおよそその目安として、円板中心穴部に印加される全圧がほぼ式(12)の程度の大きさを超えるような状態には適用できないと考えなければならない。

4. 実験装置ならびに考察

4・1 実験装置ならびに方法 本研究では、以上に述べた理論を検証するために、モデル(2)の一つの特別な場合である「穴あき円板」の場合について実験を行った。

実験装置の全体図を図3に示す。下側円板は固定され、上側円板は回転から往復運動への変換機構を介して駆動され、正弦波的に上下振動する。

$$h(t) = h_m(1 + a \sin \omega t) \quad \cdots (13)$$

この運動に伴って、2円板の外周部および上側円板の中心部にあけられた半径 r_0 の穴を通して流体が出入りする。

円板の主要寸法および各種データ計測、処理方法などは前報⁽²⁾と同様である。

本実験では、 $\omega/(2\pi)$ は $0.1 \sim 4$ Hz、 a は $0.3 \sim 0.4$ 、 h_m は $1.3 \sim 1.6$ mm の間で変化させた。 κ は $0.1, 0.2, 0.3$ の3種類に変えて実験した。

4・2 実験結果ならびに理論との比較検討

本実

験の流れ現象においては、流れの特性は a, κ および振動流れのレイノルズ数 R_ω によって支配される。これらのパラメータを上述の範囲内で種々に変えて圧力および流体力の測定を行った。二、三の例を図4および図5に示す。図4、5中には、式(5)、(6)から求められた解： $R_q(\tau)$ に基づいて式(3)、(4)によって計算された p_{1*} および $W_*(=W_{1*}+W_{2*})$ の理論値も併せ記載してある。これらの結果からわかるように、少なくとも実験の範囲内では本理論解は実験結果によく一致しており、これによって本理論の妥当性が確かめられた。

なお、打ち切り級数解の適用範囲に関しては、 a および R_ω については本質的に前報⁽²⁾の場合と同じであると考えられる。 κ に関しては、少なくとも本実験で変化させた範囲内($\kappa = 0.1 \sim 0.3$)では、理論の適用範囲は κ の値にほとんど関係しない。また、 R_q に関しては、3・2節で数値例を上げて説明したとおりのことが、数多くの本実験の結果から確かめられている。

なお、円板中心部に印加される全圧についての制約の目安：式(12)に関しては、本実験の「穴あき円板」の場合には $p_{20*} \equiv 0$ であるから、この面での制約は特にない。

最後に、「穴あき円板」の場合に関する従来の理論解析としては、Elkhouhの研究⁽⁷⁾が、緒言に述べたような問題を含んではいるが、代表的なものと考えられる。そこで、このElkhouhの理論に従って著者らが計算した結果と、本理論の結果とを対比し、併せて実験結果と比較した例を図6に示す。図6からわかるように、本理論の計算結果は実験結果により近く、近似度がよいことを示している。

図3 実験装置

図4 実験結果と理論値(圧力)

図5 実験結果と理論値(流体力)

5. 結 言

すきま幅が任意の時間的変動をなし、かつ中心吹出し部に外部から規制された形の時間変動全圧が印加されている平行2円板間の粘性流現象について理論的、実験的に研究を行った。まず前報⁽²⁾で得られた Navier-Stokes 方程式に対する高精度の級数解に基づいて、中心部の圧力に関する境界条件を満足するように、逆解法によって通り抜け流れの流量 $q(t)$ [その無次元量は $R_q(\tau)$] を求め、それをあらためて前報⁽²⁾の結果に代入することによって円板に作用する圧力および流体力を得た。

一方、上述の現象の一つの例として「穴あき円板」の場合を取り上げ、すきま幅を正弦波的に変化させた場合について実験を行って理論と比較した。その結果次のような結論を得た。

(1) 振動流れのレイノルズ数 R_ω 、すきま幅の変動振幅 a および穴あき円板の内外径比 κ の広い組合せに対して、本理論はよく実験に一致する。

(2) 本理論により得られた結果は従来の研究結果⁽⁶⁾⁽⁷⁾より適用範囲が広く(緒言参照)、精度もよい。

(3) 本理論のモデル(II)に対する適用範囲は、 R_ω および a についてはほぼ前2報⁽¹⁾⁽²⁾と同じと考えることができる。また κ については少なくとも本研究の範囲内 ($\kappa=0.1\sim0.3$) では十分に適用できるが、ある程度以上に小さな κ の値に対しては適用できなくなるものと考えられる。 R_q については、3・2節の数値例によって説明したとおりのことが実験によって確かめられている。

最後に、本研究を行うにあたり、実験装置の製作に尽力された上智大学 芦野光男氏、服部忠男氏、また実験の遂行に協力された同大学機械工学科学生(当時)の仙波克章氏に謝意を表する。

〔付録〕 式(8)の τ_0 の近傍に対する解

さきに式(8)に関連して述べたように、 $\tau \rightarrow \tau_0$,

図6 他の研究との比較

図7 $q=0$ の点の近傍の解

$R_q \rightarrow 0$ のときには式(II-8・b)の変数パラメータ群が無限大となるので、式(II-4)において γ を係数として含む第2式以降 ($F, G, \dots$ の式)に問題を生ずる。

いま、 $\tau = \tau_0, R_q = 0$ の点において $dR_q/d\tau \neq 0$ なる一般的な場合を考えれば、式(II-8・b)の定義より、 $R_q \rightarrow 0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} K_k &= O(R_q^{-k}), (k=1, 2, 3, \dots); \\ K_2 &\equiv -K_1^2, K_3 \equiv 2K_1^3, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となる。これより、 $R_q \rightarrow 0$ のとき K_2 以上の高次パラメータが近似的にすべて K_1 のみによって表されることになるので、式(II-9)における K -系統の微分は次のように K_1 による微分ただ1項のみとなる。

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} &= \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} = S_2 \frac{\partial}{\partial S_1} + (S_3 + S_2) \frac{\partial}{\partial S_2} \\ &+ \dots - K_1^2 \frac{\partial}{\partial K_1} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

また、 $F, G, \dots$ に関する多重級数展開式(II-10・b), (II-10・c), $\dots$ においては $K_2, K_3, \dots$ を含む項がすべて消滅する (K_1 のべきの項に吸収される)。

以上の条件のもとで多重級数展開式(II-10)をあらためて解いてみると、 S -系統に関しては不変であるが、 K -系統および $S \cdot K$ -干渉系統に関しては、上

述のように $K_2, K_3, \dots$ を含む項が消滅すると同時に、式(II-10・b)においては K_1^2 以上、また式(II-10・c)においては K_1^3 以上の高次べきの項も消滅し、それぞれ K_1 および K_1^2 の項までで終わる形となる。そして、係数関数に関しては、式(II-10)に示した第2次項までの範囲内では、 $h_{11} \equiv h_2 \equiv j_2 \equiv 0$ となることと、 j_{11} が次式(16)を満足する $\tilde{j}_{11}$ におきかえられることのほかは、すべて式(I-13), (I-14)および式(II-11), (II-12)に求められたものと同じである。

$$h_{11} \equiv h_2 \equiv j_2 \equiv 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\tilde{j}_{11}''' = j_{11}'' - 2h_1 h_1' \dots\dots\dots (17)$$

式(16)を式(II-12)のもとに解いた結果は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{j}_{11}''(0) &= -\tilde{j}_{11}''(1) = -5.08134 \times 10^{-5} \\ \tilde{j}_{11}'''(0) &= \tilde{j}_{11}'''(1) = 1.17502 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

以上のようにして求められた解においては、 $R_q \rightarrow 0$ のとき $F=0(K_1)=0(R_q^{-1}), G=0(K_1^2)=0(R_q^{-2}), \dots$ となるが、これらを最終的な解である式(II-1)に代入すれば、それぞれに $0(R_q), 0(R_q^2), \dots$ の大きさの係数がかかるので、各項は $R_q \rightarrow 0$ のときにも有限確定となり、正しい結果が得られることになる。

以上の方法によって、モデル(1) [すきま幅 $h(t)$ と中心部からの強制的な吹出し流量 $q(t)$ とが正弦波的に変化する] の場合について計算した例を図7に示す。図7中、部分拡大図は $q=0$ の点の近傍の横(時間)幅を1000倍に引き伸ばしたものである(縦軸は等倍)。また、 R_{qm} は $|R_q(\tau)|$ の時間平均値、 b は $q(t)$ の無次元振動振幅である。

文 献

- (1) 石沢・渡辺・高橋, 機論, 52-473, B (1986), 276.
- (2) 王・石沢・高橋, 機論, 55-517, B (1989), 2559.
- (3) 石沢, 機論, 48-427, B (1982), 453.
- (4) 石沢, 機論, 48-427, B (1982), 464.
- (5) 石沢, 機論, 49-443, B (1983), 1345.
- (6) Turns, S. R., Trans. ASME, J. Lubr. Technol., 105 (1983), 361.
- (7) Elkouh, A. F., Trans. ASME, J. Tribol., 106 (1984), 223.
- (8) Ishizawa, S., Bull. JSME, 9-35 (1966), 533.
- (9) 例えば, 日本機械学会, 機械工学便覧, A3, (1986), 197, 丸善.