渦糸近似法についての考察*
(N-S方程式からの導出)中嶋 智也^{*1}, 木田 輝彦^{*1}A Remark of Discrete Vortex Method
(Derivation from Navier-Stokes Equation)

Tomoya NAKAJIMA and Teruhiko KIDA

The vortex method is one of the methods used to solve high Reynolds number flow problems of incompressible, inviscid fluids. This method has been used for various problems: vortical flows in aerodynamics, separated flow about cylindrical bodies, chaos, stability of the row of vortices in a two-dimensional flow. Mathematical research of this method has also been carried out and the convergence theorem has been established. Nevertheless, some researchers say that this method is awkward because of the appearance of the very large induced velocity and the difference, in calculated results due to the time steps, and so on. To resolve such problems, it is important at least to reduce this method from the Navier-Stokes equation directly. So in the present paper, we aim to formulate the vortex method from the Navier-Stokes equation directly, and to clarify the relation of the earlier proposed vortex methods.

Key Words: Vortex, Diffusion, Computational Fluid Dynamics, Viscous Flow, Vortex Method, Navier-Stokes Equation

1. ま え が き

渦糸近似法は、非圧縮、非粘性流れや、高レイノルズ数流れの数値シミュレーション法の一つとして、流体力学における複雑な流れや流体力学的に興味深い流れの解析に用いられてきた⁽¹⁾。渦糸近似法は、粘性による効果つまり高レイノルズ数の流れもシミュレートすることができると言われ、種々の計算方法が提案されている^{(2)~(7)}。特に大上・赤松は有限レイノルズ数でも渦糸近似法は差分法に匹敵する計算精度を持つことを計算例によって明らかにしている⁽⁸⁾。これらの方法に関する数理的な側面からの研究もすでに多くなされているにもかかわらず⁽⁷⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾、この近似法は技法的であり、正しく流れが表現できているのか？などの疑念がしばしば述べられている。これは、渦度の相互接近による非常に大きな誘起速度の出現に対する処理、渦点の発生の方法や時間ステップ等に依存する計算結果にその原因があると思われる。そこで、渦糸近似法がNavier-stokes方程式からどのように導出されるのかを明らかにすれば、誤差の生ずる原因等が明らかにな

り上述の疑念に対する一つの解決を与えられたい。

以上の背景より、本報ではNavier-Stokes方程式から渦糸近似法の導出を試みる。さらにこれまでに提案された渦糸近似モデルとの関係について検討する。最後に、精度向上のための一方法を提案し、単純なケースを計算し、その有用性を確認する。

2. 基礎方程式

まず、流れ場を二次元とし、滑らかな物体 S_0 のまわりの流れを考える。長さは物体の代表長さで、速度は適当な速度(例えば一様流速)で無次元化する。また、直交座標系を (x, y) 、時間を t とする。レイノルズ数を Re とすると、Navier-Stokes方程式より渦度方程式(1)、連続の式よりポアソン方程式(2)が得られる。

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad \dots\dots\dots (2)$$

ω は渦度、 ψ は流れの関数、 ∇ は微分作用素ナブラである。物体の表面の任意の点の法線と接線方向に n, s 軸を取ると、境界条件は表面で滑りなしの条件から、式(3)のようになる。

*平成元年1月27日 セミナー&シンポジウム境界積分法による流れの数値解析において講演、原稿受付 平成2年1月8日。

*¹ 正員、大阪府立大学工学部(〒591 堺市百舌鳥梅町4丁804)。

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } \partial S_0) \dots \dots \dots (3)$$

式(2)と(3)から、 ω が与えられると速度場は次のように求められる。

$$(u, v) = \iint_D x(x-x', y-y') \omega(x', y'; t) dx' dy' + (u_P, v_P) \dots \dots \dots (4)$$

ただし、

$$x(x, y) = \frac{(-y, x)}{2\pi(x^2 + y^2)} \dots \dots \dots (5)$$

(u_P, v_P) は一様流れや境界条件式(3)を満足するように決められるポテンシャル流れの解($\nabla^2 \psi = 0$)である。

3. 基礎式の導出

渦糸近似法は、ある時刻 t で与えられた渦度場を離散化し、流れ場を表現し、それ以降の流れの様子を時間発展的に知ろうとする手法である。そこでまず、時刻 τ で、 (a, b) の位置にステップ関数的に渦度 ω が発生したとき、その後の挙動を調べてみる。

ある点 (a, b) で、時刻 τ に発生した渦度が、時刻 T までの時間 $T - \tau$ の間に、渦を構成する流体粒子は、その点の速度 (u, v) で移動する (図1)。今、適当に、前もってわかっている滑らかな関数 $\bar{u}(a, b; t)$ 、 $\bar{v}(a, b; t)$ を導入し、この $(\bar{u}, \bar{v})$ で渦度が移動するとする。 (x, y) 座標からこの渦の中心位置を原点とする (X, Y) 座標へ変換する。

$$\begin{aligned} x &= X + \left(a + \int_{\tau}^t \bar{u} dt \right) \\ y &= Y + \left(b + \int_{\tau}^t \bar{v} dt \right) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

この変換を用いれば、式(1)は、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{Re} \nabla^2_{xy} \omega = (\bar{u} - u) \frac{\partial \omega}{\partial X} + (\bar{v} - v) \frac{\partial \omega}{\partial Y} \triangleq \hat{f} \dots \dots \dots (7)$$

となる。ただし、

図1 絶対座標系と相対座標系

$$\nabla^2_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

である。この式(7)は (X, Y) 座標系でみると、渦度の拡散と、流れ場の全体に $\hat{f}$ の渦度源の存在を表している。先に述べたように、 $t = \tau$ で渦度が発生するとし、渦度の発生位置は有界領域内とする。したがって有限時間内では無限遠での渦度は0であると仮定すると、初期条件と無限遠の境界条件は以下のようになる。

$$\omega = \omega_0 \delta(X) \delta(Y) 1(t - \tau) \dots \dots \dots (8)$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad (|X| + |Y| \rightarrow \infty) \dots \dots \dots (9)$$

ここで $\delta(x)$ はデルタ関数、 $1(t)$ はステップ関数である。式(7)~(9)の解は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \omega(X, Y; t) &= \frac{Re}{4\pi} \frac{\omega_0}{t - \tau} \exp \left\{ -\frac{Re}{4(t - \tau)} r_0^2 \right\} \\ &+ \frac{Re}{4\pi} \int_{\tau}^t d\tau' \iint_D \frac{1}{t - \tau'} \exp \left\{ -\frac{Re}{4(t - \tau')} r_1^2 \right\} \\ &\times \hat{f}(X_1, Y_1; \tau') dX_1 dY_1 \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ r_1 &= \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} \\ \hat{f}(X_1, Y_1; \tau') &= [\bar{u}(a, b; \tau') - u(X_1 + X_a^{\tau'}, Y_1 + Y_b^{\tau'}; \tau')] \frac{\partial \omega}{\partial X_1} \\ &+ [\bar{v}(a, b; \tau') - v(X_1 + X_a^{\tau'}, Y_1 + Y_b^{\tau'}; \tau')] \frac{\partial \omega}{\partial Y_1} \\ X_a^{\tau'} &\triangleq a + \int_{\tau}^{\tau'} \bar{u} dt, \quad Y_b^{\tau'} \triangleq b + \int_{\tau}^{\tau'} \bar{v} dt \end{aligned}$$

である。

ここで、上式(10)について物理的に考えてみる。まず、式(10)の第1項は、あらかじめ与えられたある適当な速度場 $(\bar{u}, \bar{v})$ で移動する渦度の粘性拡散を表したものである。 r_0 はこの渦度の中心位置 $((X, Y)$ 座標系の原点) から渦度を求めたい点 (X, Y) までの距離である。第2項は、流れ場において時刻が τ から t までの間、式(7)の右辺より、渦度源分布 $\hat{f}$ で連続的に渦度が供給されるとき解である。つまり、被積分関数は時刻 τ' で空間分布する渦度 $\hat{f}(X_1, Y_1; \tau')$ の時刻 t における粘性拡散を表している。したがって、この渦度を時間 τ' に関して τ から t まで積分し、 (X_1, Y_1) に関し空間積分すれば、時刻 τ から t まで全空間から連続的に供給される渦度の、時刻 t における粘性拡散を表わす。 r_1 は (X_1, Y_1) から (X, Y) までの距離である。

いま、ある点 (x, y) での渦度を $\omega(x, y; t)$ とする。この渦度は点 (x, y) を中心にデルタ関数的に渦度分布したものの全空間和とみなすことができる。つま

り,

$$\omega(x, y; t) = \iint_D \omega(\xi, \eta; t) \delta(\xi - x) \delta(\eta - y) d\xi d\eta$$

次に点 \$(\xi, \eta)\$ に時間 \$t\$ までに発生した渦度は,

$$\omega(\xi, \eta; t) = \int_0^t \frac{\partial \omega(\xi, \eta; \tau)}{\partial \tau} d\tau + \omega(\xi, \eta; 0) \quad \dots\dots\dots (11)$$

と、一般的に表すことができる。つまり、点 \$(\xi, \eta)\$ に \$t=0\$ で \$\omega(\xi, \eta; 0)\$ の渦度が発生し、その後時間 0 から \$t\$ まで渦度 \$\partial \omega(\xi, \eta; \tau) / \partial \tau\$ が発生すると考えればよい。このとき、初期値 \$\omega(\xi, \eta; 0)\$ と連続的に発生する \$\partial \omega(\xi, \eta; \tau) / \partial \tau\$ とに対する式 (7) の斉次方程式の解が求められる (式 (10) の右辺第一項に対応)。さらに式 (7) の特解 (式 (10) の右辺第二項に対応) とを重ね合わせて、式 (11) を考慮し、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t) = & \iint_D \left[\frac{Re}{4\pi} \int_0^t \frac{\partial \omega(\xi, \eta; \tau)}{\partial \tau} \right. \\ & \times \frac{1}{t-\tau} \exp\left(-\frac{Re}{4(t-\tau)} r_t^2\right) d\tau \\ & + \frac{Re}{4\pi} \omega(\xi, \eta; 0) \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{Re}{4t} r_0^2\right) \\ & + \frac{Re}{4\pi} \int_0^t d\tau' \iint_D \frac{1}{t-\tau'} \exp\left(-\frac{Re}{4(t-\tau')} r_t^2\right) \\ & \times \hat{f}(X_1, Y_1; \tau') dX_1 dY_1 \Big] d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} r_t &= \sqrt{(x - X_t^{\tau t})^2 + (y - Y_t^{\tau t})^2} \\ r_0 &= \sqrt{(x - X_t^{0t})^2 + (y - Y_t^{0t})^2} \\ r_1 &= \sqrt{(x - X_t^{0t} - X_1)^2 + (y - Y_t^{0t} - Y_1)^2} \\ \hat{f}(X_1, Y_1; \tau') &= [\hat{u}(\xi, \eta; \tau') \\ & - u(X_1 + X_t^{0\tau'}, Y_1 + Y_t^{0\tau'}; \tau')] \frac{\partial \omega}{\partial X_1} \\ & + [\hat{v}(\xi, \eta; \tau') - v(X_1 + X_t^{0\tau'}, Y_1 \\ & + Y_t^{0\tau'}; \tau')] \frac{\partial \omega}{\partial Y_1} \end{aligned}$$

4. 渦糸近似法と精度評価

ここで、渦糸近似法との関係を考える。この手法は、例えば物体が急発進した場合などでは、各時間ステップごとに複数個、または 1 つの渦 (渦度) を物体の表面付近から放出し、その渦度により流れの関数をポテンシャル的に解いて流れ場を求める。さらに求めた流れの関数から、時間経過による渦の移動を、渦の中心速度で行うという作業の繰り返しによって時間経過による流れの様子を離散的に得る手法である。この手順を、上で求めた式 (12) に適用してみよう。時間刻みを \$\Delta t\$ とし、時刻 \$t_0\$ から \$t_0 + \Delta t\$ までの時間経過について考察する。式 (12) より、

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0 + \Delta t) = & \iint_D \left[\frac{Re}{4\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right. \\ & \times \frac{1}{t_0 + \Delta t - \tau} \exp\left\{-\frac{Re}{4(t_0 + \Delta t - \tau)} r_t^2\right\} d\tau \\ & + \frac{Re}{4\pi} \omega(\xi, \eta; t_0) \frac{1}{\Delta t} \exp\left(-\frac{Re}{4\Delta t} r_0^2\right) \\ & + \frac{Re}{4\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} d\tau' \iint_D \frac{1}{t_0 + \Delta t - \tau'} \\ & \times \exp\left\{-\frac{Re}{4(t_0 + \Delta t - \tau')} r_1^2\right\} \\ & \times \hat{f}(X_1, Y_1; \tau') dX_1 dY_1 \Big] d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12)' \end{aligned}$$

が得られる。時間刻み \$\Delta t\$ が十分に小さいとすると、

$$\begin{aligned} r_t &= \sqrt{\{x - \xi - (\tau - t_0) \hat{u}\}^2 + \{y - \eta - (\tau - t_0) \hat{v}\}^2} \\ r_0 &= \sqrt{(x - \xi - \hat{u} \Delta t)^2 + (y - \eta - \hat{v} \Delta t)^2} \\ r_1 &= \sqrt{\{x - \xi - (\tau - t_0) \hat{u} - X_1\}^2 + \{y - \eta - (\tau - t_0) \hat{v} - Y_1\}^2} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \{\hat{u}(x_0, y_0; t_0), \hat{v}(x_0, y_0; t_0)\}$$

である。ここでは、\$\Delta t\$ が十分小さいときには、

$$\Delta t \cdot \max\left(\left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right|\right) \ll 1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となると仮定している。

式 (12)' の右辺 [] 内の第一項、第二項、第三項について考える。まず、第一項に関しては、散逸割合を \$\epsilon = \sqrt{4\Delta t/Re}\$ と定義する。ここで、高レイノルズ数の場合を考える。このとき時間刻み \$\Delta t\$ を適当に選べば、\$\epsilon \ll 1\$ とすることができる。このことから、\$r_t=0\$ の近傍をのぞいて、上の積分はオーダー \$O(-1/\epsilon^2)\$ の微量量になるので第一項は、

$$\begin{aligned} & \simeq \frac{Re}{4\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} d\tau' \iint_D \frac{1}{t_0 + \Delta t - \tau'} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \\ & \times \exp\left(-\frac{\Delta t \epsilon^{-2}}{t_0 + \Delta t - \tau'} r_t^2\right) r_t dr_t d\theta \end{aligned}$$

ただし、\$D'\$ は、微少パラメータ \$\delta\$ (\$\delta, \epsilon/\delta \rightarrow 0\$ as \$\epsilon \rightarrow 0\$)

によって \$D' = \{(\xi, \eta) | r_t \leq \delta\}\$ と定義されている。

$$\begin{aligned} & \simeq \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial \tau} \omega\{x - (\tau - t_0) \hat{u}, y - (\tau - t_0) \hat{v}; \tau\} d\tau \\ & \simeq \frac{\partial}{\partial t} \omega(x - \hat{u} \Delta t, y - \hat{v} \Delta t; t_0) \Delta t + O\{(\Delta t)^2\} \\ & \simeq O(\Delta t) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

次に第二項は、第一項と同様にして、

$$\begin{aligned} & = \iint_D \frac{Re}{4\pi} \omega(\xi, \eta; t_0) \frac{1}{\Delta t} \exp\left(-\frac{r_0^2}{\epsilon^2}\right) d\xi d\eta \\ & \simeq \omega(x - \hat{u} \Delta t, y - \hat{v} \Delta t; t_0) \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

最後に第三項について考える。まず \$|t_0 + \Delta t - \tau'| \sim 0\$

である点に注目して \$\epsilon' = \sqrt{4(t_0 + \Delta t - \tau')/Re}\$ と定義し、次の積分を考える。

$$J \triangleq \iint_D d\xi d\eta \iint_D \hat{f} \exp\left(-\frac{r_1^2}{\epsilon^2}\right) dX_1 dY_1 \cdots (16)$$

ここで、 r_1 は次のように定義される。

$$r_1^2 \triangleq \epsilon'^2 \{ \hat{r}_1^2 + \hat{r}_0^2 - 2\hat{r}_1 \hat{r}_0 \cos(\theta_1 - \varphi) \}$$

ただし、

$$\begin{aligned} (X_1, Y_1) &\triangleq \epsilon'(\hat{r}_1 \cos \theta_1, \hat{r}_1 \sin \theta_1) \\ \{x - \xi - (\tau - t_0)\hat{u}, y - \eta - (\tau - t_0)\hat{v}\} \\ &= \epsilon'(\hat{r}_0 \cos \varphi, \hat{r}_0 \sin \varphi) \end{aligned}$$

これまででは、あらかじめ与えられた速度場 $(\hat{u}, \hat{v})$ をどのように設定するかという点にはまったくふれなかった。ここで、 $\hat{r}_1 = O(1)$ とした場合に、第三項がどのようになるかを検討し、その結果を利用して $(\hat{u}, \hat{v})$ の設定について第6節で検討する。この場合、条件 $\delta, \epsilon'/\delta \rightarrow 0$ as $\epsilon \rightarrow 0$ を満足する任意の微量 δ に対し、 $\hat{r}_0 = O(1/\delta)$ ならば、上式(16)の被積分関数は $\exp(-1/\delta^2)$ のオーダーの微量となる。そこで、 $\hat{r}_0$ も $O(1)$ として J を評価することにする。

$$\begin{aligned} J &\simeq \epsilon'^2 \iint_D \hat{f} \Big|_{\substack{X_1=0 \\ Y_1=0}} e^{-\hat{r}_1^2} d\xi d\eta \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{r}_1 e^{-\hat{r}_1^2 + 2\hat{r}_1 \hat{r}_0 \cos(\theta_1 - \varphi)} d\hat{r}_1 d\theta_1 \\ &\simeq 2\pi \epsilon'^2 \iint_{D'} \hat{f} \Big|_{\substack{X_1=0 \\ Y_1=0}} \\ &\times e^{-\hat{r}_1^2} d\xi d\eta \int_0^\infty \hat{r}_1 e^{-\hat{r}_1^2} I_0(2\hat{r}_1 \hat{r}_0) d\hat{r}_1 \end{aligned}$$

ただし、 $D' = [(\xi, \eta) | \hat{r}_0 \leq 1/\delta]$ で、 I_0 は変形ベッセル関数である。したがって、

$$J \simeq \pi \epsilon'^2 \iint_{D'} \hat{f} \Big|_{\substack{X_1=0 \\ Y_1=0}} d\xi d\eta \cdots (17)$$

となる。よって、第三項は、

$$\begin{aligned} &\simeq \Delta t \iint_{D'} \hat{f} \Big|_{\substack{X_1=0 \\ Y_1=0}} d\xi d\eta \\ &\simeq \Delta t \iint_{D'} \left\{ (\hat{u} - u) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + (\hat{v} - v) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right\} d\xi d\eta \\ &\cdots (18) \end{aligned}$$

となる。

以上の結果、式(14)、(15)、(18)を整理すると、

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0 + \Delta t) &= \frac{\partial \omega}{\partial t} \Delta t + \omega + O(\Delta t) \\ &= \omega(x - \hat{u} \Delta t, y - \hat{v} \Delta t; t_0) + O(\Delta t) \end{aligned}$$

つまり、

$$\begin{aligned} \omega(x + \hat{u} \Delta t, y + \hat{v} \Delta t; t_0 + \Delta t) \\ = \omega(x, y; t_0) + O(\Delta t) \cdots (19) \end{aligned}$$

となる。

先に述べたように、渦糸近似法では、まず初期状態($t=0$)の渦度分布が与えられる。この渦度の与えられた空間を格子幅 h の微小な格子に分割する。式(4)による誘起速度の計算に台形公式を用いると、

$$(u, v) = \sum_{ij} \omega_{ij} h^2 x(x - x_i, y - y_j) + (u_P, v_P) \quad (20)$$

となる。ただし、 (x_i, y_j) は格子 (i, j) 内のある適当な点である。この表示は、渦度分布が、

$$\omega(x, y; t) = \sum_{ij} \omega_{ij} h^2 \delta(x - x_i) \delta(y - y_j) \cdots (21)$$

と与えられたと同じことになる。この $\omega_{ij} h^2 = \gamma_{ij}$ を循環とし、 $Re \rightarrow \infty$ では、式(19)より γ_{ij} が保存され、 (i, j) 点の誘起速度 $(u_{ij}, v_{ij}) = (u(x_i, y_j), v(x_i, y_j))$ によって流れとともに渦度が移動する。 (x_i, y_j) は、上の考察からもわかるように、平均値の定理によって決定されるべきものである。

$$\begin{aligned} \int_{S_{ij}} x(x - x', y - y') \omega(x', y'; t) dx' dy' \\ = h^2 \omega(x_i, y_j; t) x(x - x_i, y - y_j) \end{aligned}$$

ただし、 S_{ij} は格子 (i, j) を意味する。このように決定できれば速度場を求める積分による誤差はなくなるが、このように決定した格子内の代表点 (x_i, y_j) は、 (x, y) によって変化する。そこで通常、格子 S_{ij} の中心に (x_i, y_j) をとり、それによって誘起された速度を $(\hat{u}, \hat{v})$ として計算される。このように、式(20)の速度場の積分による誤差、式(18)から $(\hat{u}, \hat{v})$ と (u, v) による差にともなう誤差、さらに、式(15)の近似による誤差が生じてくる。このため、時間の経過とともに誤差が累積される可能性を持っている。この誤差の累積により、流体粒子の軌跡にずれが生じ、これがまた速度場の計算誤差となってくることがわかる。ただ、本解析からわかるように、 $\epsilon \ll 1$ とすれば、式(15)と式(19)が近似的に成立し、式(18)による誤差をのぞけば ω に関してはオーダー ϵ^2 の誤差である。このことは、たとえば有限レイノルズ数であっても Δt を十分小さく取れば $[\epsilon \ll 1$ と式(13)が満足するように]、渦糸近似法がある有限時間内において有用な計算手法であることがわかる。

5. Greengardの理論について

ここで、式(12)'を用いて、Greengardの理論について検討してみる。Greengardは初期渦がガウス分布するとし、その後、渦が発生しないとすれば、その渦が、渦の中心速度で移動し、渦度が、その点を中心と同じガウス分布になるとして議論している(図2)。

いま、時刻 $t=t_0$ で点 (x_0, y_0) 近傍の渦度を

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0) \\ = \omega_0 \exp\left[-\frac{Re}{4\Delta t} \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}\right] \quad (22) \end{aligned}$$

としよう。 $(\hat{u}, \hat{v})$ を式(12)'の第三項の積分が無視できるほど小さくなるように選べたとする。

$$\hat{f} \simeq 0$$

このとき式(12)'より,

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0 + \Delta t) \\ = \frac{1}{2} \omega_0 \exp \left[-\frac{Re}{8\Delta t} \{ (x - x_0 - \bar{u}\Delta t)^2 \right. \\ \left. + (y - y_0 - \bar{v}\Delta t)^2 \} \right] \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

となる。つまり、初期に渦度がガウス分布すれば、時間が経過しても渦点はやはりガウス分布することがわかる。この分布は、式(22)と同じ分布になっていることがわかる (Δt に $2\Delta t$ を代入したものになっている)。ただ、上の議論からわかるように $\bar{f}=0$ を仮定している。これは第三項を0と仮定したことに対応している。Greengardの理論では、ガウス分布する渦度が、その中心の速度で移動し、移動した点を中心に再びガウス分布する [図2(a)]。ところが、ガウス分布している渦度の中心以外の点では、中心の速度とは異なった速度で移動するであろう [図2(b)]。したがって、一般に $\bar{f}=0$ とはならず、オーダー Δt の項が厳密には、残ってくる。つまり、 $\bar{u}-u$ や $\bar{v}-v$ の誤差も Δt のオーダーと考えられる。したがって Greengard の指摘のようにこのモデルでは $(\Delta t)^2$ のオーダーの誤差となり、 $\partial^2 \omega / \partial t^2$ において $N-S$ 方程式との差異が出てくると思われる。

6. 精度向上と大上・赤松モデルについて

先にも述べたように、計算誤差は式(15)と式(20)における数値積分によるものと、式(18)によるものが主

(a) Greengard の手法

(b) 本手法

図2 Greengard と本手法の比較

であろう。ここでは、式(12)'の第二項の積分精度を向上させる方法について考えることにする。

初期渦度分布が、時間とともに粘性拡散する。このため、この場合、各格子内の渦度の全量は保存されず、格子内粒子の移動速度も一点で代表できない。いま、Greengard などによるモデルにしたがって、初期渦度分布が、各格子点内において、 Δt 時間後にはガウス分布的に拡散し、格子間の相互干渉を起こしながら、格子内の各点は、それぞれの移動速度で移動する。このときには、まず、渦度を各格子に再配分しなければならず、この格子内の移動速度の相違を考えなければならぬ。そこで、渦の生成がないとすれば、各時間ごとに、式(12)'の第二項を、式(15)より高精度な積分公式を利用し、格子間の再配分と数値積分の精度向上を行うことにする。いま点 (x, y) が、ある (x_p, y_q) を代表点とする格子 S_{pq} 内の点であるとする。このとき、 $\epsilon = \sqrt{4\Delta t/Re}$ とし、

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0 + \Delta t) &\cong \frac{Re}{4\Delta t} \iint_{\hat{S}_{pq}} \omega(\xi, \eta; t_0) \\ &\times \exp \left[-\frac{Re}{4\Delta t} \{ (x - \xi - \bar{u}\Delta t)^2 \right. \\ &\left. + (y - \eta - \bar{v}\Delta t)^2 \} \right] d\xi d\eta + (3rd \text{ term}) \\ &\cong \sum_{ij} W_{ij} \omega(x - \bar{u}\Delta t - \epsilon(x_i - x_p), y - \bar{v}\Delta t \\ &- \epsilon(y_j - y_q); t_0) + (3rd \text{ term}) \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{S}_{pq} \supset S_{pq}$ で、 $\hat{S}_{pq}$ の格子幅 $\hat{h}$ は S_{pq} の幅 h より十分大きく、また、1 に比べて十分小さいとする。また、 $(x_i - x_p, y_j - y_q)$ および W_{ij} は積分公式によって定まる値である。よって、(第三項) ~ 0 になるように $(\bar{u}, \bar{v})$ を選べば、

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0 + \Delta t) &\cong \sum_{ij} W_{ij} \omega(x - \bar{u}\Delta t - \epsilon(x_i - x_p), \\ &y - \bar{v}\Delta t - \epsilon(y_j - y_q); t_0) \end{aligned}$$

となる。これは、時刻 t_0 に S_{pq} 内にあった渦度が、 $(\bar{u}, \bar{v})$ の速度で時間 Δt の間に $(x + \bar{u}\Delta t, y + \bar{v}\Delta t)$ へ移動し、それとともにその移動点を中心に $\{\epsilon(x_i - x_p), \epsilon(y_j - y_q)\}$ に分裂することを意味している (つまり、格子内の粒子が、異なった速度で移動したことになる)。したがって各時刻毎の速度場を求める際に、これまでの渦糸近似法と同様に、各格子点に台形公式を用いるとすれば、 $t=t_0$ で

$$\omega(x, y; t_0) = \sum_{ij} \omega_{ij} h^2 \delta(x - x_i) \delta(y - y_j)$$

であったものが、 $t=t_0 + \Delta t$ で、

$$\begin{aligned} \omega(x, y; t_0 + \Delta t) &= \sum_{ij} \left(\sum_{pq} W_{pq} \omega_{ij} h^2 \right. \\ &\times \delta\{x - x_i - \bar{u}\Delta t - \epsilon(x_p - x_i)\} \\ &\times \delta\{y - y_j - \bar{v}\Delta t - \epsilon(y_q - y_j)\} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

となることを意味している（7節でこの手法による計算例を示す）。

つぎに、式(12)'の第三項について考えてみよう。
($\bar{u}$, $\bar{v}$)を、式(18)から、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \iint_{D'} u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} d\xi d\eta / \int_{\partial D'} \omega d\eta \\ \bar{v} &= - \iint_{D'} v \frac{\partial \omega}{\partial \eta} d\xi d\eta / \int_{\partial D'} \omega d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

として($\bar{u}$, $\bar{v}$)を選ぶことにすれば、精度の向上が期待できる。

ここで、大上・赤松モデルについて検討してみよう。
大上・赤松の提案は基本的には、

$$(\bar{u}, \bar{v}) \cong (u, v) + \frac{1}{Re} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (26)$$

とするものである。ただし、(x , y)は D' に含まれるとする。式(25)に、この($\bar{u}$, $\bar{v}$)を代入する。もし($\bar{u}$, $\bar{v}$)が連続の式を満すならば、式(18)において、

$$\begin{aligned} & \iint_{D'} \left[(\bar{u} - u) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + (\bar{v} - v) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{Re} \iint_{D'} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{Re} \int_{\partial D'} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \end{aligned}$$

となる。ここで、 n は D' の境界 $\partial D'$ の法線方向を意味

している。格子内の渦度が、その代表点(x_p , y_q)を中心としたガウス分布で、式(22)のように与えられているとすると、上の積分値は、オーダー $\exp(-h^2/\varepsilon^2)$ となり、 $h \gg \varepsilon$ の場合には、上の積分値は無視できるほど小さくなるであろう。つまり、式(26)は、式(25)を近似的に満す可能性を持っている。ただ注意しておきたいのは、ガウス分布で与えられた渦度の場合、式(26)の($\bar{u} - u$, $\bar{v} - v$)は連続の式を満足していない。したがって、正しくは上の議論が成立しない。

そこで、格子(p , q)の幅 h を十分小さくとると、格子内の速度が次のように展開できると考えられるので、これについて調べてみる。

$$(u, v) \cong (u_{pq}, v_{pq}) + \left\{ (\xi - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y_q) \frac{\partial}{\partial y} \right\} (u_{pq}, v_{pq}) \quad (27)$$

これは、格子内の速度分布はほぼ一様なせん断流れとなっている場合である。これを、式(25)に代入し、しかも、この格子内で渦度がガウス分布している場合を考えてみることにする。この場合、格子内の速度分布による渦度は、式(18)の導入からもわかるように考えなくても良いので、($\bar{u}$, $\bar{v}$)は最終的には次のように与えられる（付記参照）。

$$\begin{aligned} \bar{u} &\cong u_{pq} + \frac{\partial u_{pq}}{\partial x} \frac{h^2}{\varepsilon} \\ &\times \frac{\sqrt{2\pi} \omega_{pq}}{\omega_{p+1,q} \cos \theta_{p+1,q} + \omega_{p-1,q} \cos \theta_{p-1,q} + \omega_{p,q+1} \cos \theta_{p,q+1} + \omega_{p,q-1} \cos \theta_{p,q-1}} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &\cong v_{pq} + \frac{\partial v_{pq}}{\partial y} \frac{h^2}{\varepsilon} \\ &\times \frac{\sqrt{2\pi} \omega_{pq}}{\omega_{p+1,q} \cos \theta_{p+1,q} + \omega_{p-1,q} \cos \theta_{p-1,q} + \omega_{p,q+1} \cos \theta_{p,q+1} + \omega_{p,q-1} \cos \theta_{p,q-1}} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ただし、格子間隔を h , $\varepsilon = \sqrt{4\Delta t/Re}$ とする。これらの式は、 $h \gg \varepsilon$ として求めたが、格子の代表点の速度(u_{pq} , v_{pq})に比べ、流れのせん断流による影響はかなり大きいと推定される。いま、格子間隔を $h = O(\varepsilon^k)$ ($k > 1/2$)とすれば、($\bar{u}$, $\bar{v}$) $\cong$ (u_{pq} , v_{pq})と考えることができよう。つまり、高いレイノルズ数や時間ステップが小さいほど、格子幅を小さく取っておかなければ、代表点のみの速度で、渦度を移動させることによる誤差が、大きくなっていくことが推察される。

以上の考察から、大上・赤松のモデルは、($\bar{u}$, $\bar{v}$)を(u , v)とのずれとして、粘性拡散速度(u_d , v_d)を定義しているが、高いレイノルズ数流れでは(u_d , v_d)は、指数関数的に0になるものである。したがって、筆者等はここに提示した式(25)の($\bar{u}$, $\bar{v}$)と結びつくものではないと考えている。次節で非常に簡単な場合の計算例を提示するが、格子内の連続した渦度分布が、式(21)のようにデルタ関数的に近似し、時間の経過とともに拡散し、再び新しい連続した渦度分布が形成される。この連続分布を、ふたたび式(24)のようにデルタ関数的に近似しようとするときに、(u_d , v_d)が結びつくのではないかと考えている。

7. 計 算 例

本節では、前節で述べたことを数値計算例によって示すために、初期条件を、 $t=0$ において、

$$\omega = \exp(-x^2 - y^2)/\pi$$

とする点渦の拡散を取り上げる ($Re=4 \cdot \Delta t$ とする). 数値計算では, 式(24)によって渦点を分散させた(4次の Hermite の積分公式を用いた). 時間積分は, もっとも単純な陽的差分を用いた. 渦点の分布を示したものが図3である. 時間刻み $\Delta t=0.1$ で, この図では, 渦の大きさを, その位置を中心にした円の半径で表現している. また, 渦点が非常に近接したとき ($r=0.1$), それらの重心に配置して示されている. この図のように, 大上・赤松モデルとはことなり, 粘性拡散速度を導入しなくても, 時間とともに拡散していくことがわかる. 図4は, 上記の再配置等を一切行わずに計算を行った場合の, 渦度分布と周速度分布である.

8. 結 論

数理的な解法の安定性や収束性についての厳密な検

討は今後の課題であるが, 本報では, まず二次元の Navier-Stokes の方程式から, これまで提案された渦糸近似法が導出できることを明らかにした. また, この導出の過程を検討し, 近似度の向上が期待できる一方法を提案した. さらに, 具体例として単一のガウス分布する渦が拡散する問題を取り上げた. この例からも粘性効果の著しい流れ場では, 数値積分公式にしたがった渦度の分布が有用と思われる. また, 式(13)の条件や前節の条件 $h=O(\epsilon^k)$ ($k>1/2$) からわかるように速度変動の大きい流れや, 渦度の空間変動の大きい流れでは, 格子幅 h と時間間隔 Δt を十分に小さくしなければならないと推定される. 本研究に有益な御助言を頂戴した神戸大学葛原道久助教授に謝意を表します. また, 大阪大学基礎工学部辻本良信教授より当初の原稿における式(12)の導出過程の表現について有益な御批評を頂きました. ここに謝意を表す.

付 記

まず, 渦度は,

$$\omega(x, y; t) = \sum_{ij} \omega_{ij} \exp \left[-\frac{1}{\epsilon^2} \{ (x-x_i)^2 + (y-y_j)^2 \} \right]$$

$$\epsilon \triangleq \sqrt{4\Delta t / Re}$$

として与えられるとする. ここで, 次のように座標変換する.

$$(x-x_p, y-y_q) = r(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$(x_p-x_i, y_q-y_j) = R_{ij}(\cos \theta_{ij}, \sin \theta_{ij})$$

この結果, 渦度は,

$$\omega(x, y; t) = \sum_{ij} \omega_{ij} \times \exp \left[-\frac{1}{\epsilon^2} \{ R_{ij}^2 + r^2 - 2R_{ij}r \cos(\theta - \theta_{ij}) \} \right]$$

これらを用いて次の積分を評価する. ここで,

$$\partial D' = [(x, y) | (x-x_p)^2 + (y-y_q)^2 = h^2]$$

と考えることにする. このとき,

$$\int_{\partial D'} \omega(\xi, \eta) d\eta = \int_0^{2\pi} \omega \cdot h \cos \theta d\theta$$

$$= h \sum_{ij} \omega_{ij} 2\pi e^{-1/\epsilon^2 \cdot (R_{ij}^2 + h^2)}$$

$$\times I_1 \left(\frac{2R_{ij}h}{\epsilon^2} \right) \cos \theta_{ij}$$

$(p, q) = (i, j)$ ならば $R_{ij}=0$, $(i, j) = (p \pm 1, q \pm 1)$ ならば $|R_{ij}| \approx 2h$ である. したがって,

$$\cong 2\pi h \sum_{(i,j)=(p \pm 1, q \pm 1)} \omega_{ij} e^{-5h^2/\epsilon^2}$$

$$\times I_1 \left(\frac{4h^2}{\epsilon^2} \right) \cos \theta_{ij}$$

したがって, $h \gg \epsilon$ とすると,

図3 計算結果1—時間経過による渦点の拡散

(a) 渦度場(上)と渦度分布(下)の時間変化 ($t=0 \sim 6 \cdot \Delta t$)

(b) 速度分布の時間変化 ($t=0 \sim 6 \cdot \Delta t$)

図4 計算結果2—渦度分布と速度分布

$$\begin{aligned} &\cong \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &\times (\omega_{p+1\ q} \cos \theta_{p+1\ q} + \omega_{p-1\ q} \cos \theta_{p-1\ q} \\ &+ \omega_{p\ q+1} \cos \theta_{p\ q+1} + \omega_{p\ q-1} \cos \theta_{p\ q-1}) \\ &\times e^{-h^2/\varepsilon^2} + O(e^{-13h^2/\varepsilon^2}) \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} &\iint_{D'} u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} d\xi d\eta + \iint_{D'} v \frac{\partial \omega}{\partial \eta} d\xi d\eta \\ &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial(u\omega)}{\partial \xi} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

に注目すると,

$$\iint_{D'} u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} d\xi d\eta = \int_{\partial D'} u \omega d\eta$$

と考えるとよい。ここで,

$$u \cong u_{pq} + (\xi - x_p) \frac{\partial u_{pq}}{\partial x} + (\eta - y_q) \frac{\partial v_{pq}}{\partial y}$$

を上式に代入すると,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D'} u \omega d\eta &= u_{pq} \int_{\partial D'} \omega d\eta \\ &+ \frac{\partial u_{pq}}{\partial x} \int_{\partial D'} h \cos \theta \cdot \omega \cdot h \cos \theta d\theta \\ &+ \frac{\partial v_{pq}}{\partial y} \int_{\partial D'} h \sin \theta \cdot \omega \cdot h \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。そこで、まず右辺の第二項の積分は,

$$\begin{aligned} &h^2 \int_0^{2\pi} \omega \cos^2 \theta d\theta \\ &= h^2 \sum_{ij} \omega_{ij} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} e^{-1/\varepsilon^2(\dots)} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{h^2}{2} \cdot 2\pi \sum_{ij} \omega_{ij} e^{-1/\varepsilon^2(R_{ij}^2 + h^2)} \\ &\times \{I_0(2R_{ij}h/\varepsilon^2) + \cos 2\theta_{ij} I_2(2R_{ij}h/\varepsilon^2)\} \\ &\cong h^2 \pi \omega_{pq} e^{-h^2/\varepsilon^2} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

第三項も、同様にして,

$$h^2 \int \sin \theta \cos \theta \omega d\theta \cong O(\varepsilon)$$

したがって、式(28)が得られる。同様にして、式(29)が得られる。

文 献

- (1) 稲室, なかれ, 7 (1988), 104-122. Sarpkaya, T., *Trans. ASME, J. Fluid Engr.*, **115** (1989), 5-52.
- (2) Leonard, A., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **17** (1985), 523-559.
- (3) Leonard, A., *J. Comp. Phy.*, **37** (1980), 289-335.
- (4) Beale, J. T. and Majda, A., *Math. Comp.*, **39** (1982), 1-27, 29-52.
- (5) Aref, H., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15** (1983), 345-389.
- (6) Chorin, A. J., *J. Fluid Mech.*, **57** (1973), 785-796.
- (7) Greengard, C., *J. Comp. Phy.*, **61** (1985), 345-348.
- (8) 大上・赤松: 機論, **54**-505, B (1988), 2283-2290.
- (9) Marchior, C. and Pulvirenti, M., *Lecture Note in Physics*, **203** (1984), Springer-Verlag.
- (10) Cottet, G. H., et al. *Vortex Method for the Incompressible Euler and Navier-Stokes Equations, Computational Fluid Dynamics and Reacting Gas Flows*, ed. by Engquist, B., Lusk, A., & Majda, A. (1988), Springer-Verlag.