偏心環状流路における層流熱伝達*

鈴木 健二郎^{*1}, Janusz S. Szmyd^{*2}, 大塚 弘雅^{*3}

Laminar Forced Convection Heat Transfer in Eccentric Annuli

Kenjiro SUZUKI, Janusz S. SZMYD and Hiromasa OHTSUKA

Numerical computation has been carried out for the laminar forced convective heat transfer in eccentric annuli. The finite difference equivalents of the governing equations of velocity and temperature fields written with a bipolar coordinate system were solved with an iterative procedure. A study has been made for two types of the second kind of thermal boundary conditions. The friction coefficient and average Nusselt number obtained were found to agree with the results previously reported by others. This validates the present computational method. The obtained cross-sectional distributions of velocity and of temperature, and the peripheral distributions of wall temperature and of local Nusselt number were discussed in detail. When the radius ratio is rather close to unity and eccentricity is large, the peripheral distributions of the friction coefficient and the local Nusselt number are remarkably nonuniform in relation to the conspicuous nonuniformity of velocity in the eccentric annulus. The local Nusselt number then takes a negative value in some regions. The wall temperature there is lower than the fluid bulk mean temperature because of a large peripheral nonuniformity of wall temperature. The temperature field in some cases is significantly far from axisymmetry.

Key Words: Convective Heat Transfer, Eccentric Annuli, Laminar Flow Regime, Local Nusselt Number, Local Wall Shear Stress

1. 緒 言

著者の一人は、これまで乱流プラントル数を導入しない乱れモデル⁽¹⁾を用いて、円管内⁽²⁾および同心環状流路内⁽³⁾の液体金属中の乱流熱伝達を取扱い、さらにその延長として、偏心環状流路内の乱流熱伝達を取扱った⁽⁹⁾。本報では、その準備として行った偏心環状流路内の層流熱伝達の結果を報告する。

偏心環状流路内の、流体力学的ならびに熱的に十分に発達した層流熱伝達については、これまでもいくつかの報告例がある。しかしそれらの例では管壁全周にわたる平均ヌセルト数の検討が主体であるため、著者の知る限りでは局所熱伝達に関する具体的な情報の提供は必ずしも十分でない状況にある。そこで本報では、一様熱流束で内筒面あるいは外筒面を加熱する場合の局所熱伝達特性について検討を行った。

2. 記 号

A : 流路断面積 m^2
 a : 温度伝導率 m^2/s
 C_p : 定圧比熱 $\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
 d : 偏心量 (軸間距離) m
 D_h : 水力直径 $= 2(R_o - R_i)$ m
 e : 偏心率 $= d/(R_o - R_i)$
 f : ファニングの摩擦係数
 $= (-dP/dz) \times D_h / (2\rho U_m^2)$
 $\overline{Nu}_k$: $k(=i, o)$ 面の平均ヌセルト数
 $= |q_k| D_h / \lambda (\overline{T}_k - T_b)$
 $Nu_k(\theta_k)$: $k(=i, o)$ 面の局所ヌセルト数
 $= |q_k| D_h / \lambda [T_k(\theta_k) - T_b]$
 q : 熱流束 W/m^2
 P : 圧力 Pa
 R : 半径 m
 Re : レイノルズ数 $= U_m D_h / \nu$
 T : 温度 K
 U : 流速 m/s
 z : 軸方向座標 m
 α : 内外筒半径比 $= R_i / R_o$
 θ : 角度 (図1) rad

* 平成元年6月1日 第26回日本伝熱シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成2年2月2日。

*¹ 京都大学工学部 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

*² St. Staszic Univ. of Mining and Metallurgy, Krakow, Poland.

*³ 京都大学大学院 (現在 関西電力(株)姫路発電所)。

- ν : 流体動粘性係数 m^2/s
 λ : 流体熱伝導率 $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
 ρ : 流体密度 kg/m^3
 τ : セン断応力 Pa

添 字

- b : バルク (流体混合平均)
 i : 内筒外表面
 m : 断面内平均
 o : 外筒内表面
 $-$: 全周平均

3. 計算法の概要

本研究では、断面内二次流がない流体力学的、熱的に十分発達した偏心環状流路内の定常な層流熱伝達を取扱う。流体は非圧縮性ニュートン流体で、プラントル数の値は問わないが、物性値は一定とする。流体には、物体力は作用せず、流体中で相変化や化学反応は生じないものとする。解析に使用する基礎式は、連続の式、運動方程式およびエネルギー式であり、それらは直交デカルト座標系に対しては次のように書ける。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

本研究で取扱う流路形状を図1(a)に、また解析に使用する双極座標 (ξ, η) を図1(b)に示した。ここで、 $\xi=\xi_o$ は外筒の内表面 (以下外筒面)、 $\xi=\xi_i$ は内筒の外表面 (以下内筒面) に相当する。また $\eta=0$ は流路が最も広い $\theta_i=\theta_o=0$ の位置に、 $\eta=\pi$ は流路の最狭部 $\theta_i=\theta_o=\pi$ に相当し、いずれも速度場、温度場の対称面である。使用した双極座標 (ξ, η) と図1(a)に図示した直角座標系 (x, y) の関係は次式で記述される。

$$x = -B \frac{\sinh \xi}{C_s} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$y = B \frac{\sin \eta}{C_s} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$C_s = \cosh \xi - \cos \eta$$

$$B = \frac{1}{2d} \sqrt{(R_o^2 + R_i^2 - d^2)^2 - 4R_o^2 R_i^2}$$

上記の基礎式を双極座標を用いて書き直すと次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{B^2} & \left[C \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C \nu \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + C \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S \nu \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right. \\ & + S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C \nu \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(S \nu \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \\ & + S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S \nu \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C \nu \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \\ & \left. - C \frac{\partial}{\partial \eta} \left(S \nu \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + C \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C \nu \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{B^2} & \left[C \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C a \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + C \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S a \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right. \\ & + S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C a \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(S a \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \\ & + S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S a \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C a \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \\ & \left. - C \frac{\partial}{\partial \eta} \left(S a \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + C \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C a \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ただし、 z は軸方向座標、 U はその方向の速度成分であり、式(7)、(8)にはすでに式(6)が考慮されており、また

$$C = \cosh \xi \cos \eta - 1$$

$$S = \sinh \xi \sin \eta$$

である。

式(7)および式(8)を文献(4)に従って差分化し、得られた差分方程式を数値解析によって解いた。計算にあたっては、計算の開始時点では流れのレイノルズ数を未知量として取扱った。すなわち、入力として圧力こう配の値を与え、それに見合う壁面せん断応力分布を生じる適切な流路内の速度分布を、反復計算によって決定し、得られた結果から断面内平均流速を求め、レイノルズ数を評価した。このとき、関係式

$$\begin{aligned} (2\pi R_i \tau_i + 2\pi R_o \tau_o) \\ = -\pi (R_o^2 - R_i^2) (dP/dz) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

(a) 偏心環状流路

(b) 双極座標

図1 計算対象とした流路と座標系

を使用した。各反復回の計算には3項方程式に対する演算法を使用する line-by-line 法⁽⁴⁾を用いた。 ξ - η 面内には格子点は等間隔に配置し、総格子点数は 50×50 個とした。

境界条件としては、運動方程式に対しては内外壁面上 ($\xi = \xi_o$, $\xi = \xi_i$) で速度を零、 $\eta = 0, \pi$ では η 方向のこう配を零とした。エネルギー式に対しては2種類の第2種境界条件⁽⁵⁾に対して計算を実行した。その第1は内筒面熱流束が周方向と軸方向に共に一様 ($q_i = \text{一定}$) で、外筒面は断熱 ($q_o = 0$) されている場合、その第2は外筒面熱流束 ($q_o = \text{一定}$) が周方向と軸方向の両方向に一様で、内筒外表面が断熱 ($q_i = 0$) されている場合である。以下では、前者を境界条件 A、後者を境界条件 B と呼ぶことにする。なお、式(8)中の温度こう配 (dT/dz) はバルク温度の z 方向変化率と等しいから、

$$(dT/dz) = 2R_k q_k / \rho C_p U_m (R_o^2 - R_i^2) \dots \dots \dots (10)$$

により定められる。ただし、それぞれの境界条件に対応して $k=i$ もしくは $k=o$ とする。また、両境界条件の場合とも $\eta = 0, \pi$ では η 方向の温度こう配は零とした。なお、物性値を一定とした取扱いをするので、以下の議論は流体を加熱する場合にも、冷却する場合にも適用できる。

4. 計算結果および考察

4.1 従来の結果との対比 まず、これまで報告例のある偏心環状流路全体に対する摩擦係数および伝熱面全周にわたる平均ヌセルト数に注目する。図2に摩擦係数を示した。縦軸には摩擦係数とレイノルズ数の積を取り、その内外筒半径比 α に対する変化を偏心率 e をパラメータとして示した。図2中には、Tiedt⁽⁷⁾

が求めた結果も示してあるが、本計算値はそれと良好な合致を示している。図3に境界条件 A, B それぞれの場合に得られた伝熱面全体の平均ヌセルト数を示した。内外筒半径比 α が小さいほど、また偏心率 e が小さいほど、平均ヌセルト数は高い値を示す。すなわち、すきまが大きく、しかも同心環状流路に近い形状の流路ほど平均熱伝達特性は良好である〔したがって後の議論で使用する温度差 ($T_s - T_o$) は小さくなる〕。図3中には Trombetta⁽⁸⁾の結果をも提示したが、今回の結果とよく合致している。

図4に速度分布の計算例を鳥かん図的に示した。図4には内外筒半径比 $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ に対して偏心率を4種類 ($e = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) に変えた場合の結果が示してある。計算結果は、流路断面内で生じる最大流速で規格化して図示されている。なお、これらの計算結果を Snyder-Goldstein の解析解⁽⁶⁾と比較したところ、差異は最大 0.1% であった。以上いずれの

図2 偏心環状流路全体の摩擦係数

図3 平均ヌセルト数

結果からも本研究で使用した数値解析手法は十分な精度を有していると考えられる。そこで以下では諸量の局所値につき検討を加える。

4.2 流れ場の結果 図4を見ると、一般的に最大速度は流路すきまが最大の位置($\eta=0$)で生じ、また流路すきまが最も狭い部分($\eta=\pi$)で流速は最も低下している。最小すきま部の流速は、内外筒半径比 α が大きいほど低下し、また内外筒半径比 α が同じでも

偏心率が大きいほどより顕著に低下する。たとえば偏心率 $e=0.8$ の場合には、最小すきま部の最大流速は内外半径比 α によらずかなり小さく、それと断面内最大流速の比は $\alpha=0.7$ の場合にはほぼ0.014である。

図5に内筒面、外筒面に作用するせん断応力の分布を示した。横軸は内筒、外筒それぞれの中心回りの角度 θ_i, θ_o であり、縦軸には、圧力損失へのそれぞれの面に作用するせん断応力の寄与の程度を判断する際の

図4 流路断面内の速度分布例

図5 せん断応力分布

便宜を考えて、各面と両面のぬれぶち長さの比を乗じた値が示してある。 τ_i , τ_o ともに最大すきま部で最大値を取り、最小すきま部で最小値を示す点は、どの場合にも共通している。偏心率が大きいほど最小すきま部の τ_i , τ_o が、より小さくなっている。また、 α が小さいほど、また e が小さいほど τ_i , τ_o の分布は、より広い範囲で平坦な形状を示す。一方 α が大きくなると τ_i , τ_o の分布は互いに形状が類似し、絶対値の上でも互いに近づく傾向を示している。

4.3 熱伝達の結果 図6および図7にA, B両境界条件に対して計算された局所ヌセルト数と伝熱面温度の周方向分布を示した。内外筒半径比が $\alpha=0.1$ の場合には局所ヌセルト数、したがって局所伝熱面温度、は周方向に大きく変化しないが、 α の値が大きくなるにつれてその不均一が顕著になる。とくに α および e の値が大きくなると、前述のように平均ヌセルト数が低下するから、逆に温度差($T_k - T_b$)は拡大するので、

局所伝熱面温度の絶対値不均一は著しく顕著になる。したがって、このような局所ヌセルト数および伝熱面温度の不均一は、実際応用上問題となる場合が少なくないが、それは従来の研究で検討主題とされてきた偏心環状流路全体の平均ヌセルト数の結果からは推算できないものである。

なお、 $\alpha=0.5, 0.7$ の場合には、 e の値によっては境界条件の種類にかかわらず、最大すきま部に近い部分で局所ヌセルト数 $Nu_i(\theta_i)$, $Nu_o(\theta_o)$ が負となっている。このことは、その位置の熱の移動方向(熱流束の符号)が局所ヌセルト数正の位置のそれと逆になることを示すものではない。伝熱面上の流体温度こう配は、もちろんどの位置でも熱の移動方向と対応する同じ符号を有するが、伝熱面温度の位置的变化が大きいので、場所によっては $T_k(\theta_k) < T_b$ となり、温度差 $[T_k(\theta_k) - T_b]$ によって定義された局所ヌセルト数の符号が変わるものである。図8は流路断面内の流体温度 $[=T$

図6 局所ヌセルト数および壁温の分布 (境界条件 A)

図7 局所ヌセルト数および壁温の分布 (境界条件 B)

図 8 断面内流体温度分布の一例

$-T_s(0)/[T_s(\pi)-T_s(0)]$ の分布例 (境界条件 A) である。図 8 中影を付した部分が $T \geq T_b$ に相当するから、 $T_s(\theta_s) < T_b$ となる部分の存在が確かめられる。同心環状流路における軸対称温度分布に類似した分布は、 α および e が共に小さい場合の最大すきま部で多少認められるものの、ヌセルト数分布の不均一が顕著な場合には、それからほど遠い分布になっている。また最大すきま部では、いかなる条件下でも対流熱が支配的で、かつ半径方向の熱移動が顕著であるのに対し、最小すきま部では α および e の増大とともに流速が減じて対流熱の寄与が低下し、しかも周方向熱移動が顕著となるなど、両位置で伝熱機構が互いに異なっている。 α と e の変化に伴う局所ヌセルト数と局所伝熱面温度の変化が、最大すきま部と最小すきま部で互いに異なっているのはこのためである。

図 6, 7 では、場合により伝熱面温度の周方向不均一が $(T_s - T_b)$ の数倍に及ぶことが認められるが、図示された最小すきま部の局所ヌセルト数を読み取って、その場合の伝熱面最大温度を正確に評価することは困難である。熱伝達不良部分の伝熱面温度の評価のためには、局所ヌセルト数を提示するだけでなく、本論文のように同時に局所壁温度を直接提示することが有用である。

なお、本研究では伝熱面熱流束一様な場合につき検討を行ったが、実際には伝熱面内部で生じる熱伝導と関連して、より複雑な境界条件下の問題を取扱う必要がある。そのような場合については別途の検討を必要とするが、図 8 の結果から次の点を指摘しておくことは有用であろう。すなわち α および e が共に大きい場合には、周方向の伝熱面温度の不均一がより顕著になるから、伝熱面内部で生じる周方向熱伝導したがって熱流束の周方向不均一度がより顕著となり、このた

めその場合に対する結果は、本研究の結果からより大きくずれるものと推察される。

5. 結 言

本研究では、偏心環状流路における層流熱伝達を双極座標を用いて数値解析し、(1) 流路全体に対する摩擦係数と平均ヌセルト数を既存の結果と比較して、計算が十分な精度を有することを確認し、(2) 速度と温度の断面内分布、せん断応力と局所ヌセルト数の周方向分布の数例を資料として提供し、これらの結果にもとづいて伝熱面温度の周方向不均一が $(T_s - T_b)$ の数倍にも及ぶ場合があること、このため位置によっては局所ヌセルト数が負になること、実用的には伝熱面温度の直接提示が有用な情報となり得ること、を明らかにした。

文 献

- (1) Suzuki, K., *Lett. Heat Mass Transf.*, **9**-4 (1982), 245-254.
- (2) Suzuki, K. and Tohkaku, A. (Bu-Xuan, Wang *Heat Transfer Science and Technology*, (1987), 261-268.
- (3) Suzuki, K., Tohkaku, A. and Sato, T., *Proc. 8th Int. Heat Transf. Conf.*, **3** (1986), 969-974.
- (4) 鈴木 (甲斐・ほか 4 名編), 伝熱学特論, (1984), 269-289, 養賢堂.
- (5) Shah, R.K. and London, A.L., *Advances in Heat Transfer*, Supplement, 1 (1978), Academic Press, New York.
- (6) Snyder, W.T. and Goldstein, G.A., *AIChE. J.*, **11**-3 (1965), 462-467.
- (7) Tiedt, W., *Chem. Appar.*, **91**-1 (1967), 17-25.
- (8) Trombetta, M.L., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **14**-8 (1971), 1161-1173. および文献(5)に引用された Trombetta, M.L. からの私信.
- (9) 鈴木・J.S. Szmyd・大塚, 機論, **56**-527, B (1990), 2027-2033.