二重線形理論による超音速環状翼列の非定常空気力解析*

李 平^{*1}, 難波 昌伸^{*2}Unsteady Aerodynamic Analysis for Supersonic
Annular Cascade by the Double Linearization Theory

Ping LI and Masanobu NAMBA

This paper presents an extension of the double linearization theory to study the effects of the mean angle of attack, camber and thickness on the unsteady aerodynamic response of a rotating supersonic annular cascade with oscillating blades. The numerical results compared with the strip theory prediction are presented to demonstrate some features of three-dimensional effects. The effect of spanwise nonuniformity in the angle of attack, camber and thickness on the unsteady aerodynamic force distribution is suppressed by the three-dimensional effect. The three-dimensional effect on the overall unsteady aerodynamic work is, in general, small for a supersonic annular cascade.

Key Words: Unsteady Flow, Supersonic Flow, Mach Wave Motion, Flutter, Annular Cascade, Mean Loading, Three-dimensional Effects

1. 序 論

ガスタービンが誕生して以来, その性能の向上に大きな努力がなされてきた。しかし, 性能向上は翼の薄肉化および高負荷化を意味するので, ジェットエンジンや圧縮機やタービンの破壊を引き起こす翼列フラッタは現在でもなおジェットエンジンの研究, 開発, 設計に従事する技術者が直面する重要問題の一つである。従来より翼列の振動問題に関して多くの研究結果が発表されており, 翼列フラッタの解明に大きく役立っている。しかし, そのほとんどが比較的簡単な二次元翼列あるいは三次元直線翼列に基づいて, 翼列の非定常空気力特性および空気弾性的特性を評価しているので, 実機の環状翼列への適用性においてはまだまだ十分なものとはいえない。

以上の背景のもとに, 本論文の著者らは前論文⁽¹⁾で二重線形理論を三次元亜音速環状翼列に拡張して, 定常負荷効果を考慮した非定常空気力のより一般的な三次元解析手法の定式化を行った。さらに, 数値計算によって実機の亜音速環状翼列における三次元効果の重

要性を明らかにした。

一方, 近年のジェットエンジンの高速高負荷化に伴って, 超音速翼列のフラッタの発生機構の解明と防止対策がいつそう重要な課題となってきた。難波・石川⁽²⁾は定常負荷なしの遷音速および超音速回転翼列における非定常空気力特性の線形解析を行ったが, 翼列フラッタに重要な影響を及ぼす定常負荷効果を無視しているため, その実用性が制限されている。

本論文は二重線形理論をさらに超音速回転翼列に拡張して, 定常負荷効果を考慮した超音速回転翼列の非定常空気力特性における三次元効果を明らかにしようとするものである。

2. 基本モデルおよび基本仮定

本研究の基本モデルは図1に示すように, 二重円筒ダクト内の予旋回のない一様軸流速度 W_a^* および一様密度 ρ_0^* の流れが N 枚の羽根からなり角速度 ω^* で回転する翼列によってかく乱される流れ場である。このモデルにおいて, 次のような仮定をおく。

(1) 流体は完全ガス, 非粘性および非熱伝導性で流れは等エントロピー的である。

(2) 軸流速度は亜音速, 羽根に対する相対流速は全翼幅において超音速と限定する。

* 原稿受付 平成2年4月16日。

^{*1} 準員, 九州大学大学院 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。^{*2} 正員, 九州大学工学部。

(3) 定常じょう乱 (上添字 $\sim$ で表す) のオーダと非定常じょう乱 (上添字 $\sim$ で表す) のオーダはそれぞれ $\bar{\epsilon}$ と $\tilde{\epsilon}$ の微小量であり, それらは次の関係

$$1 \gg \bar{\epsilon} \gg \tilde{\epsilon} > 0 \quad (1)$$

を満足する。すなわち, 二重線形理論の仮定を満足する流れ場とする。

以下において, 長さ, 時間, 速度, 密度, 圧力および角振動数はそれぞれ r_i^* , r_i^*/W_a^* , W_a^* , ρ_0^* , $\rho_0^* W_a^{*2}$, W_a^*/r_i^* を用いて無次元化されたものとする。ただし, r_i^* は翼端半径を表す。今, 図2に示すように, 回転翼列の軸を z 軸とし, 翼列と共に回転する円筒座標系 (r, θ, z) を取る。 s 軸は $\theta - \omega z = \text{一定}$ かつ $r = \text{一定}$ のらせんに沿った方向を表す座標, および n 軸は $\theta - \omega z = \text{一定}$ のらせん面に垂直な方向を表す座標であって

図1 回転翼列モデル

図2 円筒座標系と翼の形状および変位の定義

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 r^2}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \omega r \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 r^2}} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

が成り立つ。この円筒座標系において, 各羽根の定常迎え角, 反りおよび厚みがそれぞれ $\alpha_0 \alpha(r)$, $\mu_0 \mu(r) f(z)$ および $\tau_0 \tau(r) g(z)$ で与えられるとすると, らせん面 $\theta - \omega z = 2\pi m/N$, ($m=1, \dots, N$) から羽根表面までの時間平均周方向距離は

$$rb_{\tilde{\eta}}(r, z) = \{-\alpha_0 \alpha(r) z + \mu_0 \mu(r) f(z) \pm \tau_0 \tau(r) g(z)/2\} \Lambda^2(r) \quad (4)$$

ここで

$$\Lambda(r) = \sqrt{1+\omega^2 r^2} \quad (5)$$

により表される。ただし, 式(4)における定常迎え角は羽根の時間平均翼弦方向と基本流の速度ベクトル $\Lambda(r) \mathbf{e}_s$ とのなす角であり, 図2において s 軸方向 $\mathbf{e}_s = (\mathbf{e}_z + \omega r \mathbf{e}_\theta)/\Lambda(r)$ は回転座標系から見た基本流の方向を表している。また(±)は羽根の上面と下面を表している。

次に, 羽根は角振動数 λ , 一様翼間位相差 $\bar{\sigma} = 2\pi\sigma/N$ で調和振動し, 定常揚力と非定常揚力を同時に受けるものとする。また, h と C_a はそれぞれボス比および z 軸方向翼弦長を表し, 簡単のために, 一定とする。なお, 非定常じょう乱は単純調和振動的な時間依存性を有すると仮定し, $(\sim) e^{i\lambda t}$ と表すが, $e^{i\lambda t}$ の記述は省略する。

3. 問題の定式化

周知のように, 流れ場のじょう乱圧力を支配する線形波動方程式は

$$\left(\nabla^2 - M_a^2 \frac{D^2}{Dt^2} \right) p = \nabla \cdot \mathbf{F} - \frac{DQ}{Dt} \quad (6)$$

ここで, $p = \bar{p} + \tilde{p} e^{i\lambda t}$, $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}} e^{i\lambda t}$, $Q = \bar{Q} + \tilde{Q} e^{i\lambda t}$, により与えられる。ただし, p は流れ場のじょう乱圧力場, $\mathbf{F}$ は羽根に働く空気力の反作用に相当する外力, Q は羽根の厚みおよび振動によるわきだし効果を表している。なお,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (7)$$

は円筒座標系における実質微分である。

二重線形理論のもとに, この波動方程式を定常の部分と非定常の部分に分けると, 定常じょう乱圧力 $\bar{p}$ と非定常じょう乱圧力 $\tilde{p}$ を支配する波動方程式はそれぞれ

$$\left\{ \nabla^2 - M_a^2 \Lambda^2(r) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right\} \bar{p}(r, \theta, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{N-1} \int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \left\{ -\Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \frac{\partial}{\partial n} \right. \\
&\quad \left. - \bar{Q}(r_0, z_0) \Lambda(r) \frac{\partial}{\partial s} \right\} \Lambda(r_0) \\
&\quad \times \frac{1}{r} \delta(r-r_0) \delta(z-z_0) \delta(\theta-\omega z_0-2\pi m/N) dz_0 \\
&\quad \dots\dots\dots (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\nabla^2 - M_a^2 \left\{ i\lambda + \Lambda(r) \frac{\partial}{\partial s} \right\}^2 \right] \tilde{p}(r, \theta, z) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\bar{\sigma}} \int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \left[-\Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \frac{\partial}{\partial n} \right. \\
&\quad \left. - \Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \bar{a}_n(r_0, z_0) \left\{ \frac{i\lambda}{\Lambda(r_0)} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \bar{Q}(r_0, z_0) \left\{ i\lambda + \Lambda(r) \frac{\partial}{\partial s} \right\} - \bar{D}(r_0, z_0) \frac{\partial}{\partial r} \right. \\
&\quad \left. + \bar{Q}(r_0, z_0) \bar{a}_n(r_0, z_0) \left\{ i\lambda + \Lambda(r) \frac{\partial}{\partial s} \right\} \frac{\partial}{\partial n} \right] \Lambda(r_0) \\
&\quad \times \frac{1}{r} \delta(r-r_0) \delta(z-z_0) \delta(\theta-\omega z_0-2\pi m/N) dz_0 \\
&\quad \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

となる。ただし m 番翼における上下面圧力差を $\Delta \tilde{p} + \Delta \tilde{p} e^{i\lambda t + im\bar{\sigma}}$, わきだしを $\bar{Q} + \bar{Q} e^{i\lambda t + im\bar{\sigma}}$ および半径方向空気力を $\bar{D} e^{i\lambda t + im\bar{\sigma}}$ とする。さらに, Green 関数の方法を用いてオイラーの運動方程式と連立して解くと, 基本流速度 $\Lambda(r)\mathbf{e}_s$ に対する定常じょう乱速度場 $\bar{\mathbf{q}} [= (\bar{q}_r, \bar{q}_n, \bar{q}_s)]$ および非定常じょう乱速度場 $\bar{\mathbf{q}} [= (\bar{q}_r, \bar{q}_n, \bar{q}_s)]$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{q}}(r, \theta, z) &= \int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \{ \Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \\
&\quad \times \bar{\mathbf{K}}_{qF}(r, \eta, z-z_0 | r_0) + \bar{Q}(r_0, z_0) \\
&\quad \times \bar{\mathbf{K}}_{qQ}(r, \eta, z-z_0 | r_0) \} dz_0 \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{q}}(r, \theta, z) &= \int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \{ \Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \\
&\quad \times \mathbf{K}_{qA}(r, \eta, z-z_0 | r_0) + \Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \bar{a}_n(r_0, z_0) \\
&\quad \times \mathbf{K}_{qL}(r, \eta, z-z_0 | r_0) + \bar{Q}(r_0, z_0) \bar{a}_n(r_0, z_0) \\
&\quad \times \mathbf{K}_{qQ}(r, \eta, z-z_0 | r_0) + \bar{Q}(r_0, z_0) \\
&\quad \times \mathbf{K}_{qS}(r, \eta, z-z_0 | r_0) - \bar{D}(r_0, z_0) \\
&\quad \times \mathbf{K}_{qD}(r, \eta, z-z_0 | r_0) \} dz_0 \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

で与えることができる。ここで, $\bar{a}_n(r, z)$ は時間平均位置が (r, z) で指定される羽根面上の点の n 方向変位振幅を表す。また, $\mathbf{K}_{q(i)}$ は速度核関数を表し, 次のように圧力核関数の積分から求められる。

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathbf{K}}_{qF}, \bar{\mathbf{K}}_{qQ}] &= - \int_{-\infty}^z \nabla [\bar{\mathbf{K}}_{pF}, \bar{\mathbf{K}}_{pQ}]_{\theta=\eta+\omega z} dz \\
&\quad + [\bar{\mathbf{C}}_{qF}, \bar{\mathbf{C}}_{qQ}] \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{qA}, \mathbf{K}_{qL}, \mathbf{K}_{qQ}, \mathbf{K}_{qD}, \mathbf{K}_{qS}] &= - e^{-i\lambda z} \int_{-\infty}^z e^{i\lambda z} \\
&\quad \times \nabla [\mathbf{K}_{pA}, \mathbf{K}_{pL}, \mathbf{K}_{pQ}, \mathbf{K}_{pD}, \mathbf{K}_{pS}]_{\theta=\eta+\omega z} dz \dots\dots (13)
\end{aligned}$$

さらに, 圧力核関数 $\mathbf{K}_{p(i)}$ は, 波動方程式に関する Green 関数の解から求められるが, その導出方法は前

論文⁽¹⁾および文献(2), (3)に示されている。核関数の具体的表現は紙面の都合で省略し, 核関数の特異性および遠距離場の性質は前論文(1)の亜音速におけるそれらと基本的に異なることを言及するにとどめる。

$\bar{\mathbf{C}}_{qF}$ および $\bar{\mathbf{C}}_{qQ}$ は無限上流での定常じょう乱速度を決める積分定数であるが, これらの積分定数を決めるために, 本論文では定常じょう乱速度は次のような条件

$$\langle \bar{\mathbf{q}} \rangle_{z=-\infty} + \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle_{z=+\infty} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

を満たすとする。ただし, $\langle \rangle$ は周方向平均を表している。式(14)は基本流速度が時間平均無限上流速度の周方向平均と時間平均無限下流速度のそれとのベクトル平均速度に等しいことを意味する。式(12)を式(14)に代入すると, 積分定数を決めることができる。前述のように式(4)における迎え角 $\alpha_0(r)$ は基本流速度 $\Lambda(r)\mathbf{e}_s$ と翼弦がなす角として定義されており, 無限上流速度の時間平均 $\Lambda(r)\mathbf{e}_s + \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle_{z=-\infty}$ と翼弦方向がなす角ではない。したがって, $\alpha_0(r)$ は超音速翼列に特有の入射角の唯一性に矛盾することなく任意に指定することができることを注意しておく。

一方, 非定常じょう乱速度を表す式(13)においては, 羽根のみがじょう乱源である限り, 積分定数は零である。

振動している羽根面上において, 羽根に対する流体の相対速度の羽根面上法線成分が零にならなければならないので, 定常と非定常境界条件は

$$\bar{q}_n(r, \pm 0, z) = \frac{1}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial z} \{ r b_n^*(r, z) \} \dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_n(r, \pm 0, z) &= i\lambda \bar{a}_n(r, z) + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_n(r, z) \\
&\quad - \bar{a}_n(r, z) \frac{\partial}{\partial n} \bar{q}_n(r, \pm 0, z) \\
&\quad + \bar{q}_s(r, \pm 0, z) \frac{1}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_n(r, z) \\
&\quad + \bar{q}_r(r, \pm 0, z) \frac{r}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\Lambda(r)}{r} \bar{a}_n(r, z) \right\}, \\
&\quad \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

により与えられる。式(12)および式(13)の形式のじょう乱速度の式を上境界条件に代入すると, 定常圧力差 $\Delta \tilde{p}$ および非定常圧力差 $\Delta \tilde{p}$ を決定する積分方程式

$$\begin{aligned}
&\int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \bar{\mathbf{K}}_{qnF} dz_0 = \left\{ -\alpha_0(r) \right. \\
&\quad \left. + \mu_0 \mu(r) f'(z) \pm \tau_0 \tau(r) \frac{g'(z)}{2} \right\} \Lambda(r) \\
&\quad - \int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \bar{Q}(r_0, z_0) \bar{\mathbf{K}}_{qnQ} dz_0 \dots\dots\dots (17) \\
&\int_h^1 dr_0 \int_{-ca/2}^{ca/2} \Delta \tilde{p}(r_0, z_0) \mathbf{K}_{qnA} dz_0 = i\lambda \bar{a}_n(r, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_n(r, z) + \int_h^1 dr_0 \int_{-Ca/2}^{Ca/2} \Delta \bar{p}(r_0, z_0) \\
& \times \left[-\bar{a}_n(r_0, z_0) K_{qnL} - \bar{a}_n(r, z) \frac{\partial}{\partial n} \bar{K}_{qnF} \right. \\
& + \frac{1}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_n(r, z) \bar{K}_{qsF} + \frac{r}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial r} \\
& \times \left\{ \frac{\Lambda(r)}{r} \bar{a}_n(r, z) \right\} \bar{K}_{qrF} \left. \right] dz_0 \\
& + \int_h^1 dr_0 \int_{-Ca/2}^{Ca/2} \bar{Q}(r_0, z_0) \\
& \times \left[-\bar{a}_n(r_0, z_0) K_{qnQ} - \bar{a}_n(r, z) \frac{\partial}{\partial n} \bar{K}_{qnQ} \right. \\
& + \frac{1}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_n(r, z) \bar{K}_{qsQ} + \frac{r}{\Lambda(r)} \frac{\partial}{\partial r} \\
& \times \left\{ \frac{\Lambda(r)}{r} \bar{a}_n(r, z) \right\} \bar{K}_{qrQ} \left. \right] dz_0 + \int_h^1 dr_0 \int_{-Ca/2}^{Ca/2} \\
& \times \{ -\bar{Q}(r_0, z_0) K_{qnS} + \bar{D}(r_0, z_0) K_{qnD} \} dz_0 \\
& \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

が得られる。この段階では、定常わきだし効果 $\bar{Q}$ 、非定常わきだし効果 $\bar{Q}$ 、半径方向非定常空気力効果 $\bar{D}$ も未知量であるが、それらは式(17)および式(18)において羽根上下面 ($\eta \rightarrow \pm 0$) で $\pm$ (有限量) の形の不連続量となる項が互いに打ち消し合うように決定され、その結果

$$\bar{Q}(r, z) = \tau_0(r) g'(z) \Lambda(r) \dots\dots\dots (19)$$

$$\bar{Q}(r, z) = M_a^2 \Delta \bar{p}(r, z) \left(i\lambda + \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{a}_n(r, z) \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}(r, z) &= -\Delta \bar{p}(r, z) \frac{\partial}{\partial r} \bar{a}_n(r, z) \\
&+ \left(i\lambda + \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{a}_n(r, z) \int_{-Ca/2}^z \frac{\partial}{\partial r} \Delta \bar{p}(r, z) dz, \\
&\dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

により与えられる。それらの物理的意味は文献(4)、(5)を参照されたい。

式(17)において、定常圧力差 $\Delta \bar{p}$ を文献(2)に述べられた直交固有関数 $R^{(l)}(r)$ で展開し、

$$\Delta \bar{p}(r, z) = \sum_{l=0}^{L-1} R^{(l)}(r) \bar{G}_l(z) \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここで、留意する必要があるのは、 z の関数である係数 $\bar{G}_l(z)$ は翼前後縁から発するマッハウエーブの羽根面上反射により不連続となるが、各モード l のマッハウエーブの反射点が一致しないので、各モードの重なりにより $\Delta \bar{p}$ の不連続性は弱められることである。式(22)を式(17)に代入すると、 $\bar{G}_l(z)$ に関する積分方程式が得られ、それを解いて、 $\bar{G}_l(z)$ を決定すれば、式(22)により定常圧力差 $\Delta \bar{p}$ が求まる。

次に、式(18)を解くに当たり、 $\bar{G}_l(z)$ の反射点における不連続分布を考慮して、 $\bar{G}_l(z)$ をさらに

$$\bar{G}_l(z) = \Delta \bar{p}_z^{(l)}(z) + \sum_{k=1}^{J+1} \Delta \bar{p}_z^{(l)}(\zeta_k^l) H(z - \zeta_k^l) \dots\dots\dots (23)$$

と表す。ここで、 $H(\cdot)$ は Heaviside のステップ関数を表している。また ζ_k^l は図3に示すように、 l モードのマッハウエーブの k 番目の不連続点であり、 $k=1$ および $k=J+1$ はそれぞれ羽根前縁および後縁に対応している。 $\Delta \bar{p}_z^{(l)}(\zeta_k^l)$ は不連続点 ζ_k^l における $\bar{G}_l(z)$ の不連続量であって

$$\Delta \bar{p}_z^{(l)}(\zeta_k^l) = \bar{G}_l(\zeta_k^l + 0) - \bar{G}_l(\zeta_k^l - 0) \dots\dots\dots (24)$$

を意味する。

一方非定常圧力差 $\Delta \bar{p}$ は、文献(6)に述べられているように、定常空気力 $\Delta \bar{p}$ を受けている場合の羽根振動によるマッハウエーブの反射点の変位効果が反射点の平均位置に作用する集中交番力 $\tilde{F}_l$ となって現れることを考慮して、

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{p}(r, z) &= \sum_{l=0}^{L-1} R^{(l)}(r) \Delta \bar{p}_z^{(l)}(z) + \sum_{l=0}^{L-1} R^{(l)}(r) \\
&\times \sum_{k=2}^J \tilde{F}_l(\zeta_k^l) \{ \delta(z - \zeta_k^l) + \tilde{S}_{lk}(z) \} \dots\dots\dots (25)
\end{aligned}$$

と表す。ここで、式の右辺の第1項はマッハウエーブの反射点の変位効果を無視した場合の非定常圧力差分布を表し、第2項は定常負荷が存在する場合のマッハウエーブの反射点の変位効果である。式(25)を式(18)に代入すると、式(18)は未知関数 $\Delta \bar{p}_z^{(l)}(z)$ 、 $\tilde{F}_l(\zeta_k^l)$ および $\tilde{S}_{lk}(z)$ を決定する方程式に分解することができる。それらを解くことによって式(25)より非定常圧力差 $\Delta \bar{p}$ を決定できる。

図3 マッハウエーブの反射

4. 空気力係数および仕事係数

本研究では純曲げ振動を考察する。まず定常揚力係数を

$$\bar{C}_L(r) = \frac{2}{C_a(1+\omega^2 r^2)} \int_{-ca/2}^{ca/2} \Delta \bar{p}(r, z) dz \cdots (26)$$

と定義する。また、羽根の j 次曲げ振動による n 軸方向変位振幅は

$$\bar{a}_n(r, z) = C_a a_j^{(r0)}(r) / \sqrt{1+\omega^2 r^2} \cdots (27)$$

により与えられるとする。ここで、 $a_j^{(r0)}$ は一様片持ばりのモード形

$$\begin{aligned} a_j^{(r0)}(r) = & \frac{1}{\sqrt{1-h}} [\{\sin(\mu_j) - \sinh(\mu_j)\} \\ & \times \{\sinh(\mu_j R) - \sin(\mu_j R)\} + \{\cosh(\mu_j) \\ & + \cos(\mu_j)\} \{\cosh(\mu_j R) - \cos(\mu_j R)\}] \\ & \div \{\sin(\mu_j) \sinh(\mu_j)\} \cdots (28) \end{aligned}$$

$$\mu_1 = 0.597\pi, \quad \mu_2 = 1.49\pi, \quad \mu_j = \frac{2j-1}{2}\pi; (j \geq 3),$$

$$R = (r-h)/(1-h) \cdots (29)$$

である。さらに、曲げ振動による各半径位置での非定常空気力を示す揚力係数を

$$\bar{C}_L(r) = \frac{1}{i\pi\lambda C_a^2 \Lambda(r)} \int_{-ca/2}^{ca/2} \Delta \bar{p}(r, z) dz \cdots (30)$$

と定義する。振動する羽根に非定常空気力がなす各半径位置での1周期当たりの局所仕事は

$$\begin{aligned} W^*(r) = & \oint dt \int_{-C_a^*/2}^{C_a^*/2} \text{Re} [\Delta \bar{p}^*(r, z) e^{i\lambda t}] \\ & \times \text{Re} \left[r_i^* \frac{d}{dt} \{\bar{a}_n(r, z) e^{i\lambda t}\} \right] \Lambda(r) dz^* \cdots (31) \end{aligned}$$

により与えられる。純曲げ振動による仕事を $\pi\rho_0^* W_a^* C_a^* H^2$ で無次元化すると、各半径位置での1周期当たりの無次元局所仕事は

$$W(r) = \pi\lambda C_a a_j^{(r0)}(r) \text{Re} [\bar{C}_L(r)] \Lambda(r) \cdots (32)$$

となる。さらに、全翼幅において局所仕事係数を積分すると、曲げ振動の全体仕事係数は

$$\bar{W} = \int_h^1 W(r) dr \cdots (33)$$

となる。仕事係数が正のとき、振動する羽根は流体からエネルギーを得るので、構造減衰が零の場合フラッタが発生する。

5. 数値計算および考察

本研究では主に $\omega = 2.4744$, $NC_a = 1.899$, $h = 0.5$ と固定して、羽根枚数 N , 翼間位相差 σ , マッハ数 Ma , 翼弦長基準無次元振動周波数 λC_a および定常負荷分布を変化させて、環状翼列における三次元効果を数値計算によって考察する。ただし、各モードのマッハウエーブの羽根面上での反射回数が1回を超えないよう

に設計パラメータを選ぶ。図4は与えられた翼列条件における各半径位置での節弦比, 食違い角および相対マッハ数を示している。

数値計算にあたり、羽根の反りと厚みが共に放物形で、 $f(z) = g(z) = 1 - 4(z/C_a)^2$ であるとする。さらに、各半径位置での迎え角分布, 反り分布および厚み分布は

$$\alpha(r) = [1 + A_1 \cdot \cos \{(r-h)\pi/(1-h)\}] \cdots (34)$$

$$\mu(r) = [1 + M_1 \cdot \cos \{(r-h)\pi/(1-h)\}] C_a \cdots (35)$$

$$\tau(r) = [1 + T_1 \cdot \cos \{(r-h)\pi/(1-h)\}] C_a \cdots (36)$$

により与えられるとする。

定常圧力差 $\Delta \bar{p}$ および定常揚力係数は迎え角成分, 反り成分および厚み成分に分解して

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}(r, z) = & \alpha_0 \Delta \bar{p}_\alpha(r, z) + \mu_0 \Delta \bar{p}_\mu(r, z) \\ & + \tau_0 \Delta \bar{p}_\tau(r, z) \cdots (37) \end{aligned}$$

$$\bar{C}_L(r) = \alpha_0 \bar{C}_{L\alpha}(r) + \mu_0 \bar{C}_{L\mu}(r) + \tau_0 \bar{C}_{L\tau}(r) \cdots (38)$$

と表すことができ、同様に、定常じょう乱の影響を受けている非定常圧力差 $\Delta \bar{p}$ は振動速度成分 (すなわち

$$(\omega = 2.4744, NC_a = 1.899, h = 0.5)$$

図4 与えられた翼列条件における各半径位置での節弦比, 食違い角および相対マッハ数

[迎え角成分 ($A_1 = 0.0$) および反り成分 ($M_1 = 0.0$)]

(—: 本三次元理論, - - - : ストリップ理論)

$$\omega = 2.4744, NC_a = 1.899, h = 0.5, N = 30$$

図5 定常揚力係数に対するマッハ数の影響

定常負荷を考慮しない成分), 迎え角成分, 反り成分および厚み成分に分離でき

$$\Delta \tilde{p}(r, z) = \Delta \tilde{p}_a(r, z) + \alpha_0 \Delta \tilde{p}_a(r, z) + \mu_0 \Delta \tilde{p}_\mu(r, z) + \tau_0 \Delta \tilde{p}_\tau(r, z) \quad \dots\dots\dots (39)$$

と表される。非定常揚力係数, 仕事係数も同様に振動速度成分, 迎え角成分, 反り成分および厚み成分に分離することができる。

以下の図において, $\text{Re}[\]$ と $\text{Im}[\]$ はそれぞれ複素数の実数部と虚数部を表し, 本三次元理論解とストリップ理論解はそれぞれ実線と破線で表す。

図5は定常揚力係数の軸流マッハ数に対する依存性を示している。軸流マッハ数が減少するにつれて, 翼端では三次元理論の計算結果とストリップ理論の計算結果との差はほとんど変わらないが, 局所マッハ数が低い翼根ではその差が大きくなる傾向がある。

図6は定常負荷のスパン方向分布における三次元効果を表している。式(34)~(36)からわかるように, 定

常負荷分布を制御するパラメータ A_1, M_1, T_1 が 0.5 から -0.5 に変化するにつれて, 定常負荷は翼根から翼端に向かって減少する分布から増大する分布に変わる。図6に示すように, $A_1 \neq 0.0$, すなわち定常迎え角が一樣でない場合には三次元効果が大きく, $A_1 = -0.5$ と 0.5 では三次元効果の向きも逆になり, 三次元理論解における A_1 に対する定常揚力分布の依存性はストリップ理論解のそれより大きい。また, 反り成分についても同様な結論になっている。

次に, 非定常揚力係数における三次元効果を考察する。図7と図8はそれぞれ振動速度成分および一定厚み分布 ($T_1=0$) の場合の厚み効果成分におけるマッハ数の影響を示している。いずれの場合でも, 三次元効果は非定常空気力を翼端で小さくしかつ翼根で大きくするが, 大きな三次元効果は現れず, またマッハ数上がるほど三次元効果は小さくなる。

図9は非定常揚力係数に対する反りのスパン方向分

$$(\omega = 2.4744, NC_a = 1.899, h = 0.5, M_a = 0.8, N = 30)$$

図6 定常揚力係数に対する迎え角分布および反り分布の影響

$$(\omega = 2.4744, NC_a = 1.899, h = 0.5, N = 30, \lambda C_a = 0.2, \sigma/N = 0.2, T_1 = 0.0)$$

図8 非定常揚力係数に対するマッハ数の効果 (厚み成分)

$$(\omega = 2.4744, NC_a = 1.899, h = 0.5, N = 30, \lambda C_a = 0.2, \sigma/N = 0.2)$$

図7 非定常揚力係数に対するマッハ数の効果 (振動速度成分)

$$(\omega = 2.4744, NC_a = 1.899, h = 0.5, M_a = 0.8, N = 30, \lambda C_a = 0.2, \sigma/N = 0.2)$$

図9 非定常揚力係数に対する反り分布の影響 (反り成分)

布の影響を表している。迎え角、反りおよび厚みのスパン方向分布に対する非定常空気力の依存性は大きく、三次元理論とストリップ理論は定性的に同じ傾向を予測するが、定量的に大きな差が存在する。特に $M_1 = 0.5$ および $M_1 = -0.5$ の場合では、翼端での両理論の差が共に大きく逆向きである。しかしその差の向きは定常揚力における場合 (図 6) とは異なり、 M_1 に対する非定常空気力のスパン方向分布の依存性が三次元理論ではストリップ理論ほどには大きくない。言い替えば、反りのスパン方向分布の変化が非定常空気力のスパン方向分布に与える影響は三次元効果によって押さえられる。

翼間位相差および羽根枚数の効果はそれぞれ図 10 および図 11 に示されている。この二つの設計パラメータの変化に応じて非定常空気力の大きさは変わるが、三次元効果はあまり変化しないことがわかる。

図 12 は非定常空気力の無次元振動周波数に対する依存性を示すものである。無次元振動周波数が減少す

($\omega = 2.4744$, $NC_a = 1.899$, $h = 0.5$, $M_a = 0.8$, $N = 30$, $\lambda Ca = 0.2$, $T_1 = 0.0$)

図 10 非定常揚力係数の翼間位相差に対する依存性 (厚み成分)

($\omega = 2.4744$, $NC_a = 1.899$, $h = 0.5$, $M_a = 0.8$, $\lambda Ca = 0.2$, $\sigma/N = 0.2$, $T_1 = 0.0$)

図 11 非定常揚力係数に対する羽根枚数の影響 (厚み成分)

るにつれて、翼端での非定常揚力係数の定常負荷が寄与する成分の絶対値は増大していくと同時に、三次元理論解とストリップ理論解との差は大きくなる傾向が現れている。

最後に、振動安定性における三次元効果を図 13 に示す。仕事係数が正のとき、振動する羽根に周囲の流体からエネルギーを加えられるので、フラッタが発生する。図 13 からわかるように、三次元効果は、羽根全体に対する空気力仕事には顕著に現れず、振動安定性に関する三次元理論の予測とストリップ理論の予測はよく一致している。

6. 結 論

本論文は二重線形理論を二重円筒ダクト内の超音速回転翼列に拡張し、定常負荷効果を考慮した非定常空

($\omega = 2.4744$, $NC_a = 1.899$, $h = 0.5$, $M_a = 0.8$, $N = 30$, $\sigma/N = 0.2$, $A_1 = 0.0$)

図 12 非定常揚力係数に対する振動周波数の影響 (迎え角成分)

($\omega = 2.4744$, $NC_a = 1.899$, $h = 0.5$, $M_a = 0.8$, $N = 30$, $\lambda Ca = 0.05$)

図 13 振動安定性における三次元効果 (迎え角成分)

気力のより一般的な三次元解析手法を展開した。それを用いて羽根の一次曲げ振動における平均迎え角, 反り, 厚みの効果を数値計算によって調べた。さらに, 従来の二次元理論を各翼幅に適用して得られた準二次元理論すなわちストリップ理論による計算結果との比較を行い, 環状翼列における非定常空気力に対する三次元効果の大きさおよび性質を調べた。振動翼列に働く非定常空気力および空気力仕事係数における定常負荷効果に関し, 以下の事項が明らかとなった。

(1) 迎え角, 反りおよび厚みのスパン方向分布の変化による定常空気力のスパン方向分布の変化は三次元効果によって増大する(三次元理論値のほうがストリップ理論値より大である)のに対し, 非定常空気力のスパン方向分布の変化は三次元効果によって押さえ

られる。

(2) 無次元振動周波数が小さくなるにつれて, 特に翼端での非定常空気力における三次元効果が大きくなる。

(3) 振動安定性に関する三次元理論とストリップ理論との予測はよく一致する。

文 献

- (1) 難波・利光・李, 機論, 55-517, B (1989), 2551.
- (2) 難波・石川, 機論, 48-430, B (1982), 988.
- (3) Namba, M., *ARC R&M*, No. 3740 (1974).
- (4) 難波・利光, 機論, 53-496, B (1988), 3560.
- (5) 難波・利光, 機論, 54-501, B (1988), 1073.
- (6) 難波・利光, 機論, 55-510, B (1989), 313.