後向ステップ剥離・再付着流の層流熱伝達* (プラントル数の影響)

近藤 継男^{*1}, 長野 靖尚^{*2}, 辻 俊博^{*2}

Laminar Heat Transfer behind a Backward-Facing Step (Numerical Investigation of Prandtl Number Influence)

Tsuguo KONDOH, Yasutaka NAGANO and Toshihiro TSUJI

Laminar heat transfer in separating and reattaching flow was numerically studied by simulating flow and heat transfer behind a backward-facing step, in which the temperature field was investigated in a very wide range of Prandtl number to elucidate its influence on heat transfer. It was demonstrated that the heat-transfer enhancement, usually assumed around the flow reattachment point, is not consistently realized. It occurred for the cases of Prandtl numbers greater than 0.1, but was by no means observed for lower Prandtl number cases.

Key Words: Forced Convection, Separation, Heat Transfer, Numerical Analysis, Laminar Flow, Backward-Facing Step, Prandtl Number

1. 緒 言

流れの剥離とこれに引き続く再付着は、熱伝達の機構に著しい変化をもたらす。伝熱機器の熱負荷の偏りという弊害となることもあれば、再付着点近傍での伝熱の促進という恩恵につながることもある。従って、伝熱機器を設計する上で、剥離を伴う流れの中での熱伝達に関する基礎的な知見は極めて重要である。

後向ステップ流は、剥離をとまなう流れとしては最も基本的であるため、これを対象とした研究は数多く存在するが、そのほとんどは流れ場のみに関するもので、温度場も含めた研究は未だ十分にはなされていないといえる。現在でも、局所熱伝達が最大となる点と流れの再付着点との位置関係など、最も基本的なことに関してさえ不明な点が多い。

著者らは、先に関連の研究⁽¹⁾において、後向ステップの流れと熱伝達を対象として系統的な数値実験を行い、剥離

を伴う流れの中での熱伝達の機構を探るとともに、熱伝達の特性値(最大熱伝達率とその位置、平均熱伝達率等)とこれに影響する主要なパラメータ(チャネルの拡大率、レイノルズ数、プラントル数)との関係を求め、剥離流伝熱の基礎的な資料としてまとめた。ただし、プラントル数の影響に関しては、伝熱面上の熱伝達率の分布が低プラントル数において特異なものとなるなど興味深い結果が示されたものの、扱われたプラントル数の範囲が比較的狭く、プラントル数が十分に低い領域、或は、高い領域までは調べられていなかった。そこで、本研究ではプラントル数の範囲を十分に広く取り、その影響をより詳細に調べた。

2. 記 号

ER : チャネルの拡大率 $= w_2/w_1$

h : ステップの高さ

Nu : 伝熱面 ($x \geq 0$ の下壁面) 上の局所ヌセルト数
 $= \alpha h / \lambda$

$Nu_{\max}$: Nu の最大値

$\overline{Nu}$: 再循環域 ($0 \leq x/h \leq X_R/h$) における Nu の平均値
 $= \{ \int_0^{X_R} Nu(x) dx \} / X_R$

* 平成2年5月30日 第27回日本伝熱シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成2年6月27日。

^{*1} 正員、(株)豊田中央研究所(●480-11 愛知県愛知郡長久手町大字長湫字横道 41-1)。

^{*2} 正員、名古屋工業大学(●466 名古屋市昭和区御器所町)。

表 1 境界条件

境界	u	v	p	θ
流入	$-6(y-1)(y-1-w_1)/w_1^2$	0	$\partial^2/\partial x^2 = 0$	0
流出	$\partial/\partial x = 0$	$\partial/\partial x = 0$	0	$\partial^2/\partial x^2 = 0$
伝熱面 ($x \geq 0$ の下壁面)	0	0	$\partial/\partial n = (1/Re)\partial^2 u_n/\partial n^2$	1
他の壁面	0	0	$\partial/\partial n = (1/Re)\partial^2 u_n/\partial n^2$	$\partial/\partial n = 0$

 p : 圧力 Pe : ペクレ数 $= RePr$ Pr : プラントル数 Re : レイノルズ数 $= Uh/\nu$ T : 温度 T_∞ : ステップ上流から流入する流れの温度 (一様かつ一定) T_w : 伝熱面 ($x \geq 0$ の下壁面) の温度 (一様かつ一定) $\vec{u}$: 速度ベクトル U : ステップ上流から流入する十分に発達した流れの平均速度 u_1, u_2 : ステップ上流, 下流のチャンネル幅 x : ステップ位置を始点とする, 管路方向の座標 X_R : 流れの再付着点の x (再付着距離) y : ステップ下端を始点とする, 管路に垂直な方向の座標 α : 伝熱面 ($x \geq 0$ の下壁面) 上の熱伝達率
 $= -\lambda(\partial T/\partial y)_{y=0}/(T_w - T_\infty)$ θ : 無次元温度 $= (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ λ : 熱伝導率 ν : 動粘性係数 ρ : 密度 ∇ : 空間微分の演算子 ∇^2 : ラプラスの演算子

上付添字

 t : ベクトルの転置

3. 基礎方程式と数値解法

基礎方程式は非定常, 2次元, 非圧縮性の流れに対する次の連続の式 (1) とナビエ-ストークス方程式 (2), およびエネルギー方程式 (3) である.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \vec{u}^t) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \theta) = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \theta \quad (3)$$

ただし, $\vec{u}, p$ は $U, \rho U^2$ で, また時間, 空間座標は $h/U, h$ でそれぞれ無次元化されている.

数値解法は差分法である. 時間微分の離散化にはクランク-ニコルソン法を, 空間微分の離散化には, 対流項以外については中心差分法を, 対流項については 3 次精度の風上差分法⁽²⁾を用いた. 離散化の結果として得られる連立方程式を解くには, SOR 法と ILUCGS 法⁽³⁾を併用した.

4. 計算の対象と条件

後向ステップの流れと熱伝達を左右する重要なパラメータとして, チャンネルの拡大率 ER , レイノルズ数 Re , プラントル数 Pr の三つが考えられる. 先の研究⁽¹⁾では, これら三つのパラメータに関し, $ER = \{1.25, 1.5, 1.67, 2.0\}$, $Re = \{10, 20, 50, 100, 200, 500\}$, $Pr = \{0.07, 0.7, 7\}$ という値を設定し, その色々な組合せにつき系統的な数値実験を行った. 今回は, プラントル数の影響をより詳細に調べるため, ER と Re をそれぞれ 1.5 と 100 に固定した上で, プラントル数には $Pr = \{0, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.04, 0.08, 0.1, 0.4, 0.7, 10, 100, 1000\}$ という広い範囲にわたる値を設定し, その各々につき温度場の計算を行った.

ここで計算の対象としたのは, ステップの上流から流入する低温度で一様かつ一定 (T_∞) の十分に発達した流れが, ステップ後方 ($x \geq 0$) の高温度で一様かつ一定 (T_w) の伝熱面により加熱されるというものである. 境界条件の詳細を表 1 に記す (変数はすべて無次元化されている). 表中で n は境界面に垂直な方向の局所座標, また u_n はその方向の速度成分である.

流出境界での温度の境界条件につき若干の説明を加える. ここでの問題の設定からすると無限下流においては流れの温度は下壁面の温度に等しい一定の値に到達するであろう. ただし温度がほぼ一定とみなせるに到るまでの距離はプラントル数に強く依存する. 後で述べるようにこの計算では対象とする空間領域をステップの下流にはステップの高さの 50 倍までとした. この位置において速度場は当面するレイノルズ数 (100) では十分に発達することが期待され⁽¹⁾, また温度場もプラントル数があまり大きくない場合については同様である. 一方プラントル数が極めて高い (例えば 1000 の) 場合には温度場の発達にはなお相当の距離を必要とし, 流出境界位置では温度はまだ変化の過程にあるであろう. しかしこの場合にも温度変化の急激な壁面垂直方向の熱拡散

表 2 2種類の計算格子

格子	N_x	N_y	$\Delta x_{\min}$	$\Delta y_{\min}$
A	60	30	0.1	0.05
B	85	60	0.02	0.01

(a) 計算格子 A(60 × 30)

(b) 計算格子 B(85 × 60)

図 1 計算格子 (部分)

の方が軸方向のそれよりはるかに優っており、よく知られているように⁽⁴⁾、 $RePr > 100$ では $\partial^2\theta/\partial x^2$ の項は無視できる。本研究では流れの再付着点を中心としたステップに比較的近い領域での温度場に関心があったため上に述べた様な計算領域をとったが、このような計算領域の設定で高低両極端のプラントル数を扱うために、流出境界での温度の境界条件として2階微係数をゼロとするものを採用した。

計算領域としては、ステップの上流にステップ高さの10倍を、また、ステップの下流には同50倍をとった。計算格子は非一様で、壁面の近傍で密となるようにした。図1(および表2)に示す2通りの計算格子を用意し、プラントル数の値に応じて使い分けた。すなわち、温度の分布が穏やかな低プラントル数($Pr = 0-0.7$)の領域に対しては比較的粗い格子(格子A)を、温度の空間的な分布が急峻となる高プラントル数($Pr = 10-1000$)の領域に対しては比較的細かい格子(格子B)を充てた。表2において N_x 、 N_y はそれぞれ x 、 y 方向の格子数、 $\Delta x_{\min}$ 、 $\Delta y_{\min}$ はそれぞれ x 、 y 方向の最小格子間隔である。なお、高プラントル数における(特に伝熱面近傍での y 方向の)空間解像度の問題については、最も高いプラントル数(1000)において格子Bよりも少し粗い 60×40 の格子でも計算を行い、温度分布と伝熱面上の局所ヌセルト数の分布を格子Bによるものと比較した。その結果両格子ではほぼ同じ分布が得られているのが確認され、格子Bの妥当性が検証された。

図 2 速度場の概観

5. 結 果

5.1 速度場の概観 計算により得られた速度場の概観を図2に示す。図中の分離流線が示す通り、流れの再付着点は $X_R/h = 6.3$ にある。この値は実測値の $X_R^{exp}/h = 6.0^{(5)}$ よりやや大きい。他の計算の結果も実測値より大きめの値を与えるものが多く⁽⁵⁾、実測値に不確かさの問題があるものと思われる。再循環域の流れは、乱流の場合⁽⁶⁾⁽⁷⁾とは異なり、比較的穏やかで、逆流速度の最大値もステップ上流の平均速度 U の10%程度とあまり大きくはない。再循環の中心は、 $x/h \approx 1.86$ 、 $y/h \approx 0.64$ にある。主流は再付着後、 $x/h \approx 15$ までに再び十分に発達した流れとなっている。なお、この図に示されたものは 60×30 の格子による計算の結果であるが、格子の数を各座標方向に2倍にした計算でもほぼ同じ結果の得られることが確かめられている⁽¹⁾。

5.2 温度場に対するプラントル数の影響 種々のプラントル数における温度場の分布を等温線により図3に示す。非常に低いプラントル数の領域($Pr \leq 0.001$)では、温度の変化(加熱の影響)が流入境界($x/h = -10$)にまで及んでいる。プラントル数が0.01或いは0.04になると、加熱の影響範囲(以下、影響域)が流入境界から徐々に下流に後退し、プラントル数が0.04では、ステップより上流にはほとんど影響が及ばなくなっている。その後、主流部分の影響域はプラントル数の増大とともにさらに下流に後退し、プラントル数が0.4になると、図に示された $x/h \leq 20$ の区間においては、加熱の影響が反対側の壁面(上壁面)にはほとんど届かなくなり、伝熱面($x \geq 0$ の下壁面)に沿って温度境界層が形成されるに至る。プラントル数が0.4或いは0.7の温度分布に見られるように、この温度境界層は下流に向かって単調に厚みを増してはならず、再付着点($x/h = 6.3$)の近傍で最も薄くなっている。これは、再付着する流れが温度境界層をいわば圧縮するためである。また、ステップ直後の速度せん断層の部分でも等温線の密集が見られるが、これは再循環する流れがこの部分に高温の流体を運び続けるためである。温度の分布に関するこのような特徴はプラントル数の増加とともに一層強まる。その後、プラントル数が10になると温度場の基本的な構造に変化が生じる。すなわち、再循環流の影響で、等温線に大きなうねりが現れる。続いてプラントル数が100になると、ステップの背面($x/h = 0$ 、 $0 \leq y/h \leq 1$)にも温度境界層的な層が形成されるに至る。

図3 種々のプラントル数における温度の分布 (曲線群は無次元温度間隔 $\Delta\theta = 0.1$ の等温線)

図4 種々のプラントル数における局所ヌセルト数の分布

プラントル数がさらに高くなると ($Pr=1000$)、これら三つの部分 (伝熱面上、ステップ直後の速度せん断層、および、ステップ背面上) の温度境界層はますます薄くなる。プラントル数がなお大きくなり続けた場合には、伝熱面上以外の温度境界層は消滅すると考えられ、伝熱面上の温度境界層も厚さを減じ、ついには、無限に薄くなるであろう。なお、 $Pr=0$ の温度場は、エネルギー方程式 (3) ではなく、ラプラス方程式 ($\nabla^2\theta=0$) を解いて求めたものである。

5.3 熱伝達率の分布に対するプラントル数の影響 図3の温度分布に対応して、伝熱面上の熱伝達率の分布が各々のプラントル数においてどうであるかを図4に示す。プラントル数が0.001以下においては、伝熱面上のヌセルト数の分布は熱伝導方程式の解 ($Pr=0$) とほとんど異なっておらず、温度場がほぼ熱伝導だけに支配されているのが分かる。プラントル数が0.01になると、プラントル数が0の場合との差が定量的に認められるようになるが、定性的な変化はまだない。プラントル数が0.04になると、ヌセルト数の分布に変曲点が見れる。これは、伝熱面に再付着する流れが再付着点近傍の温度境界層を圧縮することが働き始めたことを示す。その後、プラントル数の増加とともに、ヌセルト

(a) 最大ヌセルト数

(b) 再循環域の平均ヌセルト数

図5 プラントル数による熱伝達特性の変化

数が全域にわたり増加するとともに、ヌセルト数の分布が、下流に向い単調に減少するものから再付着点の近傍に極大値を持つものに変化する。そして、ヌセルト数のこの極大値は、プラントル数が0.1でステップ位置 ($x/h = 0$) での値とほぼ等しくなった後、それ以降は、全域における Nu の最大値となる。

5.4 その他の考察 熱伝達の促進がみられるプラントル数の領域 ($Pr \geq 0.1$) において、ヌセルト数の最大値 (Nu_{max}) がプラントル数とともに変化する様子を図5(a)に示す。 Nu_{max} は、概ね、プラントル数のべき乗で増加している ($Nu_{max} \sim Pr^\beta$) のが分かる。べきの指数は、 $\beta \approx 0.35$ である。再循環域 ($0 \leq x/h \leq X_R/h = 6.3$) におけるヌセルト数の平均値 ($\bar{Nu} = \{\int_0^{X_R} Nu(x) dx\} / X_R$) がプラントル数とともに変化する様子を図5(b)に示す。 $\bar{Nu}$ のプラントル数に対する振舞いは、概ね三つの領域に区分される。温度分布 (図3) を参照しながら、各領域での熱伝達の機構を考察してみる。第一は $Pr \leq 0.001$ の領域で、ここでは熱伝達率は極めて低いレベルに留まり、かつプラントル数に対してほとんど変化しない。そして、その値は静止流体中における純粋な熱伝導におけるものと実質的に異ならない。すなわち、

図6 種々のプラントル数における“温度境界層”の外縁位置 (無次元温度 $\theta = 0.01$ の等温線)

前節でも述べたように、ここでは温度場がほぼ熱伝導だけに支配されている。第二は $0.001 \leq Pr \leq 0.1$ の領域で、ここではプラントル数の増大とともに熱伝達率が急激に増大する。プラントル数がこの領域に入ると、主流部で対流が熱伝導に打ち勝つようになり、高温の流体部分がプラントル数の増加とともに急速に下流に押しやられる (図3)。これに伴い、伝熱面上の熱伝導の層が薄くなるとともに、伝熱に実質的に寄与する伝熱面の区間が広がる。その結果 $\bar{Nu}$ がプラントル数とともに急激に増加する訳である。この機構による熱伝達の増大はプラントル数がおよそ0.1になるまで続き、この時、 $\bar{Nu}$ は概ね1となる。この値は、等温線が $0 \leq y/h \leq 1$ の部分に x 軸に平行に等間隔に並んだ時に得られる熱伝達に相当するものとして納得されよう。第三は $0.1 \leq Pr$ の領域で、これが、いわゆる「再付着流による伝熱促進」の領域である。先の機構による熱伝達率の増加はプラントル数が1の辺りで止まるが、その後、再付着点近傍での温度境界層の圧縮の効果が現れ、熱伝達率は再び上昇するようになる。次いで、プラントル数が10の辺りからは、再循環域での対流の効果も加わり、熱伝達率の上昇はその勾配を増す。

伝熱面による加熱の影響が及ぶ空間の範囲がプラントル数とともに変化する様子を、無次元温度 $\theta = 0.01$ の等温線を描くことにより、図6に示す。先に5.2節で述べたように、 $Pr \leq 0.001$ では加熱の影響が流入境界まで及んでいるが、 $Pr = 0.001-0.04$ で影響域の先端がステップの辺りまで後退し、さらに、 $Pr = 0.1-0.7$ でこれが一気に下流に向かって流れ去る。そして、 $Pr \geq 10$ になると明確な温度境界層が形成され、その厚さはプラントル数とともに減少する。

6. 結 言

後向ステップで剝離・再付着する層流に関し、幅広い範囲にわたるプラントル数における温度場を数値的に解析し、温度場或は熱伝達に対するプラントル数 Pr の影響を調べた。チャネルの拡大率 $ER = 1.5$ 、レイノルズ数 $Re = 100$ の条件下で得られた主要な結論を以下に記す：

- (1) $Pr \leq 0.001$ (ペクレ数にすると、 $Pe \leq 0.1$) では、温度場はほとんど熱伝導だけに支配される

- (2) $Pr \leq 0.1 (Pe \leq 10)$ では、局所熱伝達の最大は加熱開始点 (ステップ位置, $x = 0$) にある。すなわち、このプラントル数の領域では、流れの再付着点近傍での熱伝達の促進は起こらないか、或は、起こっても効果が小さい
- (3) $Pr \geq 0.1 (Pe \geq 10)$ になると、再付着する流れによる熱伝達の促進が認められるようになり、局所熱伝達の最大は流れの再付着点の近傍に現れる。すなわち、流れの再付着による熱伝達の促進が期待されるプラントル数の下限は $Pr \approx 0.1 (Pe \approx 10)$ である
- (4) 熱伝達の促進がみられるプラントル数の領域 ($Pr \geq 0.1$) において、ヌセルト数の最大値はプラントル数に対しそのべき乗で増加する (べき指数 ≈ 0.35)

なお、チャンネルの拡大率 ER とレイノルズ数 Re が剝離・再付着流の伝熱に及ぼす影響については、既報⁽¹⁾を参照願いたい。

文 献

- (1) 近藤・長野, 機論, 54-503, B (1988), 1760.
- (2) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA Paper* 84-0340 (1984).
- (3) 名取, 大形連立一次方程式の高速反復解法, 情報処理研修センター, 1984.
- (4) Singh, S. N., *Appl. Sci. Res., Ser. A*, 7(1958), 325.
- (5) K. Morgan ほか 2 名 (editors), *Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step: A GAMM Workshop*, Volume 9 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Friedr. Vieweg & Sohn (1984).
- (6) 近藤・長野, 機論, 55-512, B (1989), 1016.
- (7) Kondoh, T. and Nagano, Y., Preprints, *International Symposium on Computational Fluid Dynamics—Nagoya '89*, (1989), 299.