可変精度多重格子法による二次元せん断層の数値シミュレーション*

西田 秀利^{*1}, 里 深信 行^{*1}Numerical Simulation of Two-dimensional Shear Layers
Using a Variable Order Multigrid Method

Hidetoshi HISHIDA and Nobuyuki SATOFUKA

A higher order method of lines is devised for the numerical simulation of two-dimensional shear layers. The spatial derivatives of the Navier-Stokes equations are discretized by means of the modified differential quadrature (MDQ) method. The resulting system of ordinary differential equations in time is then integrated by the Runge-Kutta-Gill (RKG) scheme. The elliptic (Poisson) equation is solved by means of a new variable order multigrid method. The numerical simulations of roll-up and pairing (2-eddy and 4-eddy) cases are carried out with 8th order of spatial accuracy. The numerical solutions suggest that the present higher order method is possible to simulate the vortex motions, i. e., roll-up and pairing.

Key Words: Incompressible Flow, Navier-Stokes Equations, Unsteady Flow, Finite Difference Method, Computational Fluid Dynamics.

1. 序 論

二次元せん断層中にある程度秩序を持った組織的構造が存在することが Brown-Roshko の実験⁽¹⁾ で明らかにされて以来, せん断層の研究は実験, 数値計算を問わず広範に行われている⁽²⁾⁽³⁾. この混合層やジェットに代表される流れは, 壁面流が三次元効果によって乱流に遷移するのとは異なり, 二次元渦運動が遷移の中心的役割を果たすために, せん断層の数値シミュレーションを行うことにより乱流への遷移のプロセスを明らかにできると考えられる. しかしながら, 乱流のような複雑な物理現象を限られた計算格子により解析しようとするスペクトル法⁽⁴⁾ に代表される高次精度数値計算法が必要となる. 従来の波数空間に展開する方法はその展開に多大の計算時間を要し, さらに, 固体壁が存在する複雑な幾何学的形状をした流れ場に適用することは非常に困難となる. そこで, 著者らは修正微分求積法 (Modified Differential Quadrature Method: MDQ 法) と 4 段階四次精度のルンゲ・クッタ・ギル法 (RKG 法) とを組合せた高次精度線の方法

(Higher order method of lines) を提案し, 二次元一様等方性乱流の高レイノルズ数流れに適用し, 擬スペクトル法と同一の結果を得るのに 1/6 の計算時間で済むことを明らかにした⁽⁵⁾⁽⁶⁾.

そこで本論文では, 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解法に高次精度線の方法を, ナビエ・ストークス方程式に付随するポアソン方程式の解法に可変精度多重格子法⁽⁷⁾ を組合せた新しい高次精度数値計算法を提案する. この方法は, 一つのパラメータを変化させることにより任意の空間精度を得ることができる. さらに, 完全に陽的な数値計算法であるために現在の科学技術用計算機の主流であるベクトル形計算機に対する適合性が高いと考えられる.

本論文では, 二次元せん断層の時間成長の数値シミュレーションを取り上げ, 空間精度が流れ場に及ぼす影響を考察し, 渦の巻上り (roll-up) および合併 (pairing) に対して高次精度数値シミュレーションを行った結果について述べる.

2. 基礎方程式および計算条件

二次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式は, 渦度 ω および流れ関数 ψ を用いると, 以下の渦度輸送方程式および流れ関数に対するポアソン方程式に帰着す

* 原稿受付 平成2年3月22日.

*¹ 正員, 京都工芸繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町).

る。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{u} \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2)$$

ここで、渦度 ω 、流れ関数 Ψ は、

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と定義され、 $\vec{u}=(u, v)$ は速度ベクトル、 Re はレイノルズ数である。また、無次元化は対向流の速度差の $1/2$ および初期平均渦層厚さ δ_0

$$\delta_0 = U_0 / (du/dy)_{\max} \quad (4)$$

を用いて行っている。

基本せん断流として、本論文では y 方向のみに変化する双曲線正接関数形速度分布を採用する。

$$U(x, y) = \tanh(y) \quad (5)$$

かく乱流としては、Michalke⁽⁸⁾ による Rayleigh の安定方程式

$$(U-c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U''\phi = 0 \quad (6)$$

の固有解を採用し、それらの重ね合わせによって初期流れを形成する。ここで、 $\phi(y)$ は Rayleigh の安定方程式の固有解、 α はかく乱の波数であり、複素量 c は $c=c_r+ic_i$ で表され、 c_r は位相速度、 c_i はかく乱増幅度である。したがって、初期の渦度 ω および流れ関数 Ψ はおのおの以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \omega_{\text{init}} &= -\text{sech}^2(y) \\ &+ \sum_{k=1}^m A_k R \left[\frac{-U''}{U-c} \phi(y) \exp(iax) \right], \\ \Psi_{\text{init}} &= \ln[\cosh(y)] + \sum_{k=1}^m A_k R [\phi(y) \exp(iax)] \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 A_k はかく乱流の強さを決定するパラメータであり、 m は渦の個数を表す。

境界条件は、 x 方向は周期境界条件とし、 y 方向は自由滑りの条件

$$\omega_{\text{bound}} = 0, \Psi_{\text{bound}} = \Psi_{\text{init}} \quad (8)$$

とする。また、計算領域は初期渦群を含む正方領域

$$(0, -L/2) \leq (x, y) \leq (L, L/2) \quad (9)$$

とし、 L は渦の個数 m 、かく乱の基本波長 $\lambda (=2\pi/\alpha)$ を用いて、 $L=m\lambda$ で与えられる。

3. 数値計算法

本論文で提案する新しい高次精度数値計算法は、渦度輸送方程式(1)を高次精度線の方法で、流れ関数に対するポアソン方程式(2)を可変精度多重格子法で解くものである。線の方法は、空間微分項と時間微分項

とを別個に取扱う方法である。高次精度線の方法においては、空間微分項を修正微分求積法(MDQ法)⁽⁹⁾で離散化する。この離散化により、渦度輸送方程式(1)は時間に関する連立常微分方程式に帰着され、この時間に関する連立常微分方程式は古典的な4段階四次精度のルンゲ・クッタ・ギル(RKG)法により時間積分される。

3.1 修正微分求積(MDQ)法 MDQ法はBellmanらにより提案された微分求積(Differential Quadrature: DQ)法⁽¹⁰⁾を改良した方法であり、空間微分項を適当に定めた係数と関数値との線形結合で近似するものである。式(1)の x 方向1階および2階微分項($\partial\omega/\partial x$, $\partial^2\omega/\partial x^2$)を例に取ると、格子点 (i, j) においておの、

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q a_{i,m} \omega_{i+m,j} \equiv D_M(\omega_{i,j}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q b_{i,m} \omega_{i+m,j} \equiv D_M^2(\omega_{i,j}) \quad (11)$$

と表すことができる。ここで、 $a_{i,m}$ および $b_{i,m}$ は1階および2階微分に対する重み係数であり、係数 $a_{i,m}$ は補助関数 $\Pi(x)$

$$\Pi(x) = (x-x_{i-q,j}) \cdots (x-x_{i,j}) \cdots (x-x_{i+q,j}) \quad (12)$$

を導入することにより、

$$\begin{aligned} a_{i,m} &= \frac{\Pi'(x_{i,j})}{(x_{i,j}-x_{i+m,j})\Pi''(x_{i+m,j})}, (m \neq 0) \\ a_{i,m} &= \frac{\Pi''(x_{i,j})}{2\Pi'(x_{i,j})}, (m=0) \end{aligned} \quad (13)$$

と与えることができる。2階微分に対する係数 $b_{i,m}$ は、 $a_{i,m}$ を用いて

$$b_{i,m} = \sum_{l=1}^q a_{i,l} a_{i,m} \quad (14)$$

と表すことができる。さらに、等間隔格子を用いる場合には、係数は格子番号に依存なくなり、数値計算の最初に一度記憶させておけばよく、

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = -a_{-1}, \dots, a_q = -a_{-q} \\ b_1 &= b_{-1}, \dots, b_q = b_{-q} \end{aligned} \quad (15)$$

なる関係が成立するために、計算効率も高くなる。また、 $M=2q+1$ を MDQ 法の次数と呼び、 $M=3$ のとき二次精度の中心差分と、 $M \rightarrow \infty$ の極限ではフーリエ級数展開法と同一の結果が得られる。一般に、MDQの精度は $(M-1)$ 次精度となる。

3.2 可変精度多重格子法 本論文では流れ関数 Ψ に対するポアソン方程式の解法として、可変精度多重格子法を提案する。可変精度多重格子法は従来の Brandt により提案された多重格子法⁽¹¹⁾を改良した方法であり、緩和法にガウス・ザイデル法を用いずに、擬

似時間項 ($\partial\psi/\partial\tau$) を付加した

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nabla^2\psi = -\omega \quad \dots\dots\dots (16)$$

を線の方法により解くものである。式(16)の空間微分項の離散化に MDQ 法を用いることにより、任意の空間精度を得ることができる。この離散化により、式(16)は擬似時間に関する連立常微分方程式

$$\frac{d\vec{\psi}}{d\tau} = \vec{G}(\omega_{i,j}, D_{ij}^k(\vec{\psi}_{i,j})) = \vec{G}(\vec{\psi}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

に帰着される。この連立常微分方程式の解法には、安定性に優れた有理ルンゲ・クッタ法 (RRK 法) ⁽¹²⁾ を採用する。式(17)に RRK 法を適用すると、擬似時間段階 $n\Delta\tau$ から $(n+1)\Delta\tau$ までの積分手順は、

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \Delta\tau \vec{G}(\vec{\psi}^n), \vec{g}_2 = \Delta\tau \vec{G}(\vec{\psi}^n + c_2 \vec{g}_1) \\ \vec{\psi}^{n+1} &= \vec{\psi}^n + \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1, \vec{g}_2) - \vec{g}_3(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_3, \vec{g}_3)} \\ \vec{g}_3 &= b_1 \vec{g}_1 + b_2 \vec{g}_2, b_1 + b_2 = 1 \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。ここで、記号 $(\vec{A}, \vec{B})$ はベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ の内積を示し、 b_1, b_2 および c_2 は RRK 法のパラメータであり、本論文では最も収束性の良いパラメータである $b_1=2, b_2=-1, c_2=0.5$ を採用している。

RRK 法は一般に一次精度であるが、 $b_2c_2=-0.5$ のとき二次精度となり、 $b_2c_2 \leq -1/[2 \cos \alpha(2 - \cos \alpha)]$ の場合には $A(\alpha)$ - 安定となり、通常の陽的方法の安定条件よりも非常に緩やかな安定条件を持つ。

さらに、定常解への収束を加速するために、多重格子法を組合せる。多重格子法は、単一格子系のみを用いるのではなく、何層もの格子系を用いることにより、最上層 (単一格子系と同一の格子系) における収束を加速する方法である。本論文では、Brandt により提案された FAS (Full Approximation Storage) アルゴリズム ⁽¹¹⁾ を採用する。図 1 に FAS アルゴリズムを示す。図 1 において、 k は格子レベルを示し、演算子 I_{k+1}^k および I_{k-1}^k はおのおの密な層から粗い層への重み付け平均化演算、粗い層から密な層への線形内挿演算を表している。また、 L^k は k レベルの格子系における ∇^2 の差分近似を表す演算子である。さらに、収束加速法としてクーラン数を一定にすることにより局所的に時間刻み幅を決定する局所時間刻み幅法を組合せる。本論文においては、各格子系でクーラン数を一定 (= 2.0) にすることにより擬似時間刻み幅 $\Delta\tau$ を決定する。

可変精度多重格子法の精度を検証するために、図 2 に検定問題として単純な二次元ポアソン方程式

$$\nabla^2\psi = -\sin(x) - \cos(y) \quad \dots\dots\dots (19)$$

をディリクレ境界条件の下で解いた際の L_2 率を示

す。縦軸に誤差の L_2 ノルム、横軸に格子間隔を両対数でプロットした際の傾きが L_2 率と呼ばれ、空間精度と一致する。図 2 より L_2 率はおのおの 2, 4, 6, 8, 10 と空間精度と一致しており、本論文で提案した可変精度多重格子法の空間精度に対する信頼性が確認される。また、可変精度多重格子法の収束性は二次精度の場合、Brandt の多重格子法と同一であり、SOR 法と比較しても格子点数 33×33 で約 5 倍の高い収束性 ⁽⁷⁾ が確認されている。したがって、可変精度解重格子法は精度、収束性の両面において非常に有効な数値計算法であることが認められる。

4. 計算結果

本論文においては、二次元せん断層の時間成長問題

図 1 FAS アルゴリズム

図 2 L_2 率

の数値シミュレーションを取り上げ、渦の巻上り (roll-up), 2個および4個の渦の合併 (pairing) についての高次精度数値シミュレーションの結果について述べ、最後に、空間精度が流れ場に及ぼす影響について検討する。流れ関数に対するポアソン方程式の収束判定基準としては、計算機の丸め誤差の影響を排除するために、流れ関数の平均二乗残差を $RES(\Psi)$ として

$$RES(\Psi) < 1.0 \times 10^{-8} \dots \dots \dots (20)$$

を採用している。また、渦度輸送方程式の時間刻み幅は $\Delta t = 1/100$ としている。計算機は京都大学大型計算機センターの FACOM VP-400 を用いた。

4.1 渦の巻上り (roll-up) のシミュレーション

式(7)においてかく乱の基本波だけを与える ($m=1$) と渦は合併せずに巻上りを起こすだけとなる。ここでは、かく乱の基本波数を $\alpha = 0.4446$ とし、その強さを $A_1 = 0.2$ としており、格子点数は 65×65 レイノルズ数 $Re = 200$ および空間精度は八次精度として計算を行っている。

図3に渦度の時間推移を等高線で示す。初期 ($t=0$) における一対の渦は時刻 $t=8$ で巻上りを始め、渦の厚さが増加し始めている。時刻 $t=24$ で渦は激しい巻上りを示し、渦厚さもピークを示す。その後、渦は流れ方向に引き伸ばされ始め ($t=32$)、一定の渦形状に落

ち着き始める ($t=40$)。さらに時刻が経過すると、渦層の中に渦が整然と配列され ($t=120$)、その位置は変化しない。さらに、渦の厚さにもほとんど変化はなく、渦の合併も見られない。

4.2 2個の渦の合併 (2-eddy case) のシミュレーション 渦の巻上りの初期値に対し、かく乱の低調波成分を重ね合わせることで渦の合併のシミュレーションを行うことができる。最初に、かく乱の $1/2$ 低調波 ($\alpha = 0.2223$) を重ね合わせた、計算領域に2個の渦が存在する 2-eddy ケースのシミュレーションを行う。低調波のかく乱の強さを $A_2 = 0.14$ 、格子点数を 65×65 とし、レイノルズ数を $Re = 200$ 、空間精度を八次精度として計算を行っている。

図4に渦度の時間推移を等高線で示す。初期 ($t=0$) の一対の渦が対向流の影響で巻き上がる ($t=16$)。この過程は roll-up の場合とほとんど相違がなく、渦の厚さも同一の挙動を示す。この時刻 ($t=16$) 以降、二つの渦は徐々に接近し ($t=32$)、ついには時刻 $t=40$ で合併する。そして、二つの渦があたかも一つの渦のように回転する様子が観察され ($t=64$)、このときに、渦の厚さはピークを示す。以後、roll-up の場合と同様に対向流の影響によって流れ方向に引き伸ばされるが、それにともない渦の先端が境界に接近し ($t=80$)、境界を越えて長く伸びる様子 ($t=112$) が観察される。

図3 等渦度線図 (roll-up case, $Re = 200$)

しかしながら、まだ渦の内部構造は二つの渦の構造を保ったままである。時刻 $t=144$ になると、その内部構造も完全に一つの渦の構造となり、一つの渦として回転する様子が認められ、時刻 $t=240$ では roll-up の場合と同様の形状をした渦となり、定在する。

4.3 4個の渦の合併 (4-eddy case) のシミュレーション 2-eddy のケースに $1/4$ 低調波のかく乱 ($\alpha=0.11115$, $A_3=0.1$) を重ね合わせるにより 4 個の渦の合併のシミュレーションを行う。レイノルズ数は roll-up, 2-eddy の場合と同様 $Re=200$, 格子点数は 129×129 とし、空間精度も八次精度としている。

図 5 に渦度の時間推移を等高線で示す。初期 ($t=0$) から $t=24, 40, 64$ の挙動は全く 2-eddy の場合と同様

であり、時刻 $t=40$ で第一次合併 (first pairing) が起こる。第一次合併の後は渦の先端が互いに伸び ($t=96$), 合併した二つの渦が互いに接近し ($t=112$), その伸びた渦の部分で第二次合併 (second pairing) が起こる ($t=128$)。そして、一つの渦として回転を始め ($t=140$), 流れ方向に引き伸ばされ ($t=160$), 細長い渦となって回転していく様子 ($t=200$) が観察される。さらに時間が経過すると、完全に一つの渦として定在する様子 ($t=576$) が認められる。

次に、roll-up, 2-eddy および 4-eddy の各場合に対する渦厚さの時間推移を図 6 に示す。時刻 $t=16$ までは 3 ケースとも同一の挙動を示し、それ以降 roll-up の場合は渦厚さに変化は見られない。渦の合併の場合

図 4 等渦度線図 (pairing case: 2-eddy, $Re=200$)

図 5 等渦度線図 (pairing case: 4-eddy, $Re = 200$)

は2ケースともに時刻 $t=64$ まではほぼ同様の挙動となり、2-eddy の場合はそれ以降一定の渦厚さとなっている。一方、4-eddy の場合はさらに変化を続けるが、時間の経過とともに一定値に収束する傾向がうかがわれる。Lesieur ら⁽⁹⁾によれば、渦厚さの増加率はケースにかかわらず一定の直線になると報告されているが、本数値シミュレーションにおいても渦厚さはほぼ線形

図6 渦厚さの時間推移 ($Re=200$)

に変化しており、彼らと同様の結果が得られている。

以上のことから、基本波のかく乱は roll-up のみに関し、1/2 低調波のかく乱は第一次合併のみに、1/4 低調波のかく乱は第二次合併のみに関与すると考えられる。

4.4 空間精度の流れ場に及ぼす影響 最後に、2-eddy の場合を例に取り、空間精度が流れ場に及ぼす影響について検討を行う。レイノルズ数は $Re=166$ とし、格子点数を 65×65 とした際の等渦度線図の時間推移を図7、8に示す。図7は空間精度を二次精度とした際の結果であり、図8は八次精度とした際の結果である。二次精度解は時刻 $t=16$ の roll-up 過程においても八次精度解に対する時間遅れが見られ、異なった解となっていることがわかる。さらに、時間の経過とともに、二次精度解には八次精度解に見られない解の振動が生じ、時刻 $t=80$ に至っては渦の内部構造にまで相違が見られる。二次精度解の時間遅れは空間微分項を離散化する際に生じた打ち切り誤差が数値粘性として作用したためであると考えられる。また、時間の経過とともに生じる振動は渦の合併という複雑な物理現象をこの格子点数において二次精度では分解できていないためであると考えられる。

図7 等渦度線図 (pairing case: 2-eddy, $Re=166$, 二次精度)

図8 等渦度線図 (pairing case: 2-eddy, $Re=166$, 八次精度)

したがって、せん断層の数値シミュレーションには高次精度の数値計算法が必要であることが判明し、本論文で提案した数値計算法の有効性が確認される。

5. 結 論

本論文では、高次精度線の方法と可変精度多重格子法とを組合せた新しい高次精度数値計算法を提案し、せん断層の渦の巻上りおよび渦の合併の数値シミュレーションに適用した結果、以下の結論を得た。

(1) 基本流れにかく乱を重ね合わせることににより、渦の巻上り (roll-up) および渦の合併 (pairing) が再現され、基本波のかく乱は roll-up 過程のみに、1/2 低調波および 1/4 低調波のかく乱はそれぞれ、第一次合併 (first pairing) および第二次合併 (second pairing) のみに関与することが判明した。

(2) 渦の合併のような複雑な物理現象に対して、二次精度で数値シミュレーションを行うと数値粘性による時間遅れおよび分解能の不足による解の振動が生じ、高次精度解と異なる結果が得られることが確認され、高次精度数値計算法の必要性が結論された。

最後に、本研究の一部は平成元年度文部省科学研究

費補助金奨励研究 A (01750151), および重点領域研究 (01613006) により行ったものであり、ここに感謝の意を表する。

文 献

- (1) Brown, G. L. and Roshko, A., *J. Fluid Mech.*, **64**(1974), 775.
- (2) Metcalfe, R. W., Orszag, S. A., Brachet, M. B., Menon, S. and Riley, J. J., *J. Fluid Mech.*, **184**(1987), 207.
- (3) Lesieur, M., Staquet, C., Roy, P. L. and Comte, P., *J. Fluid Mech.*, **192**(1988), 511.
- (4) Orszag, S. A., *Lecture Notes in Physics*, **59**(1979), 32, Springer-Verlag.
- (5) Satofuka, N. and Nishida, H., *BAIL*, III(1984), 291, Boole Press.
- (6) Satofuka, N., Nakamura, H. and Nishida, H., *Lecture Notes in Physics*, **218**(1984), 475, Springer-Verlag.
- (7) Nishida, H. and Satofuka, N., *Mem. Fac. Eng. Des.*, KIT, **36**(1987), 24.
- (8) Michalke, A., *J. Fluid Mech.*, **19**(1964), 543.
- (9) Satofuka, N. and Morinishi, K., *NASA Tech. Mem.*, 81339(1982).
- (10) Bellman, R., Kashef, B. G. and Casti, J., *J. Comput. Phys.*, **10**(1972), 40.
- (11) Brandt, A., *Math. Comput.*, **31**-138(1977), 333.
- (12) Wambecq, A., *Computing*, **20**(1978), 333.