くりこみ群による乱流モデルの解析*

高 梨 和 光*

Renormalization Group Analysis of k - ϵ Model
and LES Model on Turbulence Problem

Wako TAKANASHI

This paper presents the renormalization group analysis for the turbulence problem. This procedure does not require any experimentally adjustable parameters. The following numerical values for important constants of turbulent flows can be derived: for instance, the Kolmogorov constant for the inertial-range spectrum $C_k=1.605$; turbulent Prandtl number for high-Reynolds-number heat transfer; $Pr=0.7179$; A differential k - ϵ model is derived in the high-Reynolds-number regions of the flow where the algebraic relation $\nu=0.0846 k^2/\epsilon$. A differential LES model is also derived, as is the Smagorinsky constant $C_s=0.00615$.

Key Words: Turbulent Flow, Renormalization Group Analysis, k - ϵ model, LES model

1. 緒 言

乱流問題のアプローチとしてはナビエ・ストークスの方程式をフーリエ変換し、波数領域で解析する方法が知られている。1975年にMa-Mazenko⁽¹⁾によって磁性問題の臨界現象を解明するためにくりこみ群の考え方が導入され、1977年にForster⁽²⁾とその共同研究者によって乱流における移流拡散についてくりこみ群を用いて研究が行われた。そして、1986年、Yukhot-Orszag⁽³⁾⁻⁽⁴⁾はくりこみ群によって乱流モデルの構築を行い、1989年にYakhot⁽⁵⁾とその共同研究者によってくりこみ群から求められたLESモデルによる乱流のシミュレーションが試みられた。しかしながら、Ykhot-Orszagによる乱流モデルは式の展開に誤りがあるため、求められた乱流モデルは正しいものではなかった。ここでは、Ykhot-Orszagの理論の誤りを修正することによって、くりこみ群による乱流モデルの構築を行うものである。

記号の説明

$v_m(\hat{k})$: 波数 $\hat{k}$ に対する流速
 $v_m(\hat{k})$: 波数 $\hat{q}$ より小さい波数 $\hat{k}$ に対する流速
 $v_m(\hat{k})$: 波数 $\hat{q}$ より大きい波数 $\hat{k}$ に対する流速
 $\mathbf{k}$: 波数ベクトル
 ω : 振動数
 $\hat{k}$: 一般化された波数, $\hat{k}=(\mathbf{k}, \omega)$
 d : 次元 ($d=3$ なら三次元を意味する)
 ν_0 : 動粘性係数
 ν_r : くりこみ群による渦動粘性係数
 D_0 : 揺らぎの強度
 Λ : 高波数領域における切断波数

2. 基礎方程式

波数空間でのナビエ・ストークスの方程式は次のようになる。

$$v_i(\hat{k}) = G_0(\hat{k}) f_i(\hat{k}) - \frac{1}{2} i \nu_0 G_0(\hat{k}) P_{lm}(\mathbf{k}) \times \int v_m(\hat{q}) v_n(\hat{k} - \hat{q}) d\hat{q} / (2\pi)^{d+1} \dots\dots\dots (1)$$

このとき、

$$G_0(\hat{k}) = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1} \dots\dots\dots (2)$$

* 原稿受付 平成2年10月30日。

*1 正員、清水建設(株)土木本部 (〒105-07 東京都港区芝浦1-2-3、シーバンスS館)。

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$P_{ijk}(\mathbf{k}) = k_k P_{ij}(\mathbf{k}) + k_j P_{ik}(\mathbf{k}) \dots\dots\dots (4)$$

とする。ここで、外力としては正規分布を考え、

$$\begin{aligned} \langle f_i(\mathbf{k}, \omega) f_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle \\ = (2\pi)^{d+1} 2D_0 k^{-y} P_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

とする。さらに、 $\hat{k} = (\mathbf{k}, \omega)$, $\lambda_0 = 1$, そして $y > -2$ とする。

3. くりこみ群による定式化

式(1)にくりこみ群の考え方を導入して、式の変形を行う。これは、二つのステップから成り立っている。

(1) 第1ステップ 流速 $v_m(\hat{k})$ を波数 Λe^{-r} より高い流速 $v_m^>(\hat{k})$ と波数 Λe^{-r} より低い流速 $v_m^<(\hat{k})$ とに分ける。このとき、式(1)は次のようになる。

$$\begin{aligned} v_e^>(\hat{k}) = G_o^>(\hat{k}) f_l^>(\hat{k}) - \frac{i\lambda_0}{2} G_o(\hat{k}) P_{lmn}(\mathbf{k}) \\ \times \int [v_m^<(\hat{q}) v_n^<(\hat{k} - \hat{q}) + 2v_m^>(\hat{q}) v_n^<(\hat{k} - \hat{q}) \\ + v_m^<(\hat{q}) v_n^>(\hat{k} - \hat{q})] \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\Lambda e^{-r} < q < \Lambda$ とする。

式(6)の中の波数 Λe^{-r} より高い流速 $v_m^>(\hat{k})$ を繰返し式(6)の中に代入して消去することによって波数 Λe^{-r} より低い流速 $v_m^<(\hat{k})$ による展開式が得られる。

$$\begin{aligned} (-i\omega + \nu_0 k^2) v_l^<(\hat{k}) = f_l^<(\hat{k}) - \frac{i\lambda_0}{2} P_{lmn}(\mathbf{k}) \\ \times \int G_o(\hat{q}) G_o(\hat{k} - \hat{q}) f_m^>(\hat{q}) f_n^>(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ - \frac{i\lambda_0}{2} P_{lmn}(\mathbf{k}) \int v_m^<(\hat{q}) v_n^<(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ + 4\left(\frac{i\lambda_0}{2}\right)^2 2D_0 P_{lmn}(\mathbf{k}) \int |G_o(\hat{q})|^2 G_o(\hat{k} - \hat{q}) \\ \times P_{m\mu\nu}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) P_{m\mu\nu}(\mathbf{q}) q^{-y} v_\rho^<(\hat{k}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ + O[(v^<)^3] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

この式(7)の右辺第4項を次の積分によって考慮する。

$$\begin{aligned} R_l = -\lambda_0^2 \frac{2D_0}{(2\pi)^{d+1}} P_{lmn}(\mathbf{k}) \int |G_o(\hat{q})|^2 \\ \times G_o(\hat{k} - \hat{q}) P_{m\mu\nu}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) P_{m\mu\nu}(\mathbf{q}) q^{-y} \\ \times v_\rho^<(\hat{k}) d\hat{q} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

この積分は、波数 Λe^{-r} より高い成分について積分するもので、物理的には乱流中の大きな渦に対する小さな渦の影響を取り込むことを意味する。

式(8)の積分を実行して式(7)を整理すると、

$$v_l^<(\hat{k}) = G_r(\hat{k}) (f_l + \Delta f) - \frac{i\lambda_0}{2} G_r(\hat{k})$$

$$\begin{aligned} \times P_{lmn}(\mathbf{k}) \int v_m^<(\hat{q}) v_n^<(\hat{k} - \hat{q}) \frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ + O[(v^<)^3] \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで、

$$G_r(\hat{k}') = (-i\omega + \nu_r k'^2)^{-1} \dots\dots\dots (10)$$

で、くりこみ群による渦動粘性係数 ν_r は、

$$\nu_r = \nu_0 \left(1 + A_d \lambda_0^2 \frac{e^{\varepsilon r} - 1}{\varepsilon} \right) \dots\dots\dots (11)$$

となる。そして、 $\varepsilon = 4 + y - d$,

$$\tilde{A}_d = A_d \cdot S_d / (2\pi)^d \dots\dots\dots (12)$$

$$\tilde{A}_d = \frac{1}{2} \frac{d^2 - d - \varepsilon}{d(d+2)} \dots\dots\dots (13)$$

$$S_d = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}d\right)} \dots\dots\dots (14)$$

とする。

そして、三次元等方性乱流を考えると $d=3$, より高い波数領域で非線形項が熱雑音を生じるためには $y=3$ となる。このとき、 $r \rightarrow \infty$ で $\varepsilon \rightarrow 4$ となる。ここで、式(9)は $0 < k < \Lambda e^{-r}$ の波数領域で定義される。

(2) 第2ステップ 式(9)は $0 < k < \Lambda e^{-r}$ で定義されているが、これを $0 < k < \Lambda$ で定義できるようにするためにスケール変換(くりこみ群)を用いて再規格化を行う。このとき、変数は次のようなスケール変換をうける。

$$k' = k e^r \dots\dots\dots (15)$$

$$\omega' = \omega e^{a(r)} \dots\dots\dots (16)$$

$$v^<(\mathbf{k}, \omega) = \xi v'(\mathbf{k}', \omega') \dots\dots\dots (17)$$

式(15), (16)と式(17)を式(9)に代入して整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} v_l^<(\hat{k}') = G_r(\hat{k}') f_l^<(\hat{k}') - \frac{i\lambda(r)}{2} G_r(\hat{k}') \\ \times P_{lmn}(\mathbf{k}') \int v_m^<(\hat{q}') v_n^<(\hat{k}' - \hat{q}') \frac{d\hat{q}'}{(2\pi)^{d+1}} \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$G_r = [-i\omega + \nu(r)(k')^2]^{-1} \dots\dots\dots (19)$$

$$f'(\hat{k}') = f^<(\hat{k}) e^{a(r)} \xi^{-1}(r) \dots\dots\dots (20)$$

$$\lambda(r) = \lambda_0 \xi(r) e^{-(d+1)r} \dots\dots\dots (21)$$

$$\nu(r) = \nu_0 e^{a(r)-2r} \dots\dots\dots (22)$$

となる。外力 $f'(k')$ は次のような相間で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle f'_i(\mathbf{k}, \omega) f'_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle \\ = 2D'(2\pi)^{d+1} k^{-y} P_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

で、

$$D' = \frac{D_0 \exp[3a(r) + (d+y)r]}{\xi^2} \dots\dots\dots (24)$$

となる。スケール変換を行っても、揺らぎ D_0 は影響を

うけないので、 $D'=D_0$ とおける。したがって、これから流速 v' のスケールパラメータ ξ は次のようになる。

$$\xi = \exp\left[\frac{3}{2}\alpha(r) + \frac{d+y}{2}r\right] \quad (25)$$

このとき、式(21)と式(22)の関係は微分方程式の形式に書くこともできる。これらの微分方程式を用いるとスケール変換が容易になる。

以上の二つのステップによって、式(1)を変形して式(18)が得られる。

4. くりこみ群による k - $\bar{\epsilon}$ モデル

くりこみ群によって k - $\bar{\epsilon}$ モデルを求める。Yakhot-Orszag⁽³⁾⁻⁽⁴⁾ はくりこみ群から得られるコルモゴロフ定数 C_K を求める式の展開で誤まりをしているため、 k - $\bar{\epsilon}$ モデルの中の定数は正しくない。ここでは、くりこみ群から得られるコルモゴロフ定数 C_K とエネルギースペクトル $E(k)$ の訂正したものを記すと次のようになる。

$$E(k) = C_K \bar{\epsilon}^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (26)$$

$$(C_K = 1.605) \quad (27)$$

このコルモゴロフ定数 C_K は、実験によって求められている範囲 ($C_K = 1.3 \sim 2.3$) の中にある。

k - $\bar{\epsilon}$ モデルの式をくりこみ群によって求めるには、ナビエ・ストークスの方程式を変形して波数領域での乱流の運動エネルギーの式(k の方程式)と乱流のエネルギーの消散率の式($\bar{\epsilon}$ の方程式)を求め、それに3章で述べたくりこみ群による定式化を行えばよい。これによって、高い波数成分によって生じる効果を陽な形で表現した式が得られ、これが従来より用いられてきた k - $\bar{\epsilon}$ モデルの式になる。このとき、式(26)と式(27)も当然用いられる。これらのプロセスによって求められた k - $\bar{\epsilon}$ モデルの式は次のようになる。

乱流の運動エネルギーの式は、

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)k = \frac{\nu_T}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)^2 - \bar{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \nu_T \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (28)$$

となり、乱流のエネルギー消散率の式は、

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{\epsilon} = -1.049 \frac{\bar{\epsilon}}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - 1.634 \frac{\bar{\epsilon}^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \nu_T \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_i} \quad (29)$$

となる。ここで、

$$\nu_T = 0.084 \, 6 k^2 / \bar{\epsilon} \quad (30)$$

$$\alpha = 1/P_t = 1.392 \, 9 \quad (31)$$

$$P_t = 0.717 \, 9 \quad (32)$$

とする。

5. くりこみ群による LES モデル

式(22)、(26)と式(27)から LES モデルが得られる。いま、格子による切断波数 Λ をコルモゴロフ波数 k_d と同じとすると、

$$k_d = \Lambda = \gamma \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\nu_0} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (33)$$

となる。これから、LES モデルが、

$$\nu = C_s \Delta^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right| \quad (34)$$

と得られる。ここで、 Δ は格子の大きさで、

$$C_s = 0.006 \, 15 \quad (35)$$

となる。このとき、

$$\Lambda_0 = \Lambda e^{-r} \quad (36)$$

$$\Lambda_0 = \frac{\pi}{\tilde{\Delta}} \quad (37)$$

$$\Delta = 2\tilde{\Delta} \quad (38)$$

を用いている。

6. 結 論

Yakhot-Orszag の理論の誤まりを訂正することによって、くりこみ群による k - $\bar{\epsilon}$ モデルと LES モデルの乱流モデルの構築を行った。これによって乱流モデルの定数を理論的に決定することができた。

文 献

- (1) Ma, S. K. and Mazenko, G. *Phys. Rev.*, B 11(1975), 4077.
- (2) Forster, D., Nelson, D. and Stephen, M., *Phys. Rev.*, A 16(1977), 732.
- (3) Yakhot, V. and Orszag, S. A., Renormalization Group Analysis of Turbulence, *Phys. Rev.*, 57(1986), 1722-1724.
- (4) Yakhot, V. and Orszag, S. A., Renormalization Group Analysis of Turbulence, *J. Sci. Comput.*, 1-1,(1986), 3-51.
- (5) Yakhot, A., Orszag, S. A., Yakhot, V. and Israeli, M., Renormalization Group Formulation of Large-Eddy Simulations, *J. sci. Comput.*, 4-2(1989), 139-158.