高速型GSMAC有限要素法による移動層型熱交換器の解析*

河本 真司*¹, 棚橋 隆彦*²Numerical Analysis of Moving-Bed Heat Exchanger
Using High-Speed GSMAC-FEM

Shinji KAWAMOTO and Takahiko TANAHASHI

The high-speed GSMAC-FEM (generalized simplified marker and cell finite-element method) is a stable and cost-efficient FEM method for incompressible viscous flow analysis. Using the high-speed GSMAC-FEM, the gas flow and the heat transfer in the moving-bed heat exchanger are analyzed. In the Navier-Stokes equation, Ergun's equation is used for body force which is a drag caused by the small-scale flow around pebbles, and the experimental heat transfer coefficient is used for the computation of heat sink and heat source terms in gas and pebble energy equations, respectively. The analyzed pressure distributions and temperature distributions nearly agree with the experimental results. Using this scheme, a high-efficiency heat exchanger, i.e. heat exchanger with uniform gas flow, can be designed cost-effectively.

Key Words : Computational Fluid Dynamics, Viscous Flow, Finite-Element Method,
Heat Exchanger, GSMAC Method

1 緒 言

有限要素法は複雑な解析領域形状の取り扱いが容易であるため工学上の問題への応用が比較的簡単であるが、流体を扱う工業上の大規模な問題では要素数が膨大になるため、費用効率の優れた差分法に比較し有限要素法の応用例は少ない。その中で GSMAC (Generalized Simplified Marker and Cell) 有限要素法⁽²⁾は比較的高速かつ安定に非圧縮粘性流体の解析を可能とした。

本論文では、従来の GSMAC 有限要素法に比較し、より費用効率が優れかつ空間振動が発生しにくい高速型 GSMAC 有限要素法⁽³⁾を用いて移動層型熱交換器の解析を行なう。移動層内の運動方程式としては空間で平均化した空塔断面積基準の質量速度を変数とするナビエ・ストークスの式を用い、ペブル周りの小さいスケールの流れにより発生する力は外力項として圧力損失を表わすエルガン⁽⁴⁾の式を用いる。また、エネルギー方程式では実験により求めた熱伝達率を用いて気体とペブルとの交換熱量を求め、これを気体およびペブルの吸熱量および発熱量として扱う。

本解析スキームを用い実験と同条件で解析した結果、圧力分布および温度分布は実験結果とほぼ一致した。本解析スキームを使用すれば、より性能の高い移動層型熱

交換器の設計が可能である。

主 な 記 号

- $\dot{A}$: 単位体積当りのペブルの表面積 [1/m] ($= 6/\dot{L}_0$)
- $\hat{c}$: 気体の定圧比熱 [kJ/kg · °C]
- $\hat{c}_p$: ペブルの比熱 [kJ/kg · °C]
- $\dot{D}_p$: ペブルの球相当径 [m]
- Fr : フルード数 ($= \dot{G}_0^2/(\rho_0^2 \dot{g}_0 \dot{L}_0)$)
- $\dot{G}_0$: 気体の代表質量速度 [kg/m²·s]
- $\dot{G}_{p0}$: ペブルの代表質量速度 [kg/m²·s]
- $\mathbf{G}$: 気体の無次元質量速度ベクトル ($= \dot{\mathbf{G}}/\dot{G}_0$)
- $\mathbf{G}_p$: ペブルの無次元質量速度ベクトル ($= \dot{\mathbf{G}}_p/\dot{G}_{p0}$)
- $\dot{g}_0$: 重力加速度 [m/s²]
- $\mathbf{g}$: 無次元重力加速度ベクトル ($= \dot{\mathbf{g}}/\dot{g}_0$)
- $\hat{h}$: 熱伝達率 [kJ/m²·s·°C]
- H : 無次元ベルヌーイ関数 ($= p + \mathbf{G}^2/(2\rho)$)
- H^* : $= H^{n+1} - H^n$
- $\dot{L}_0$: 代表長さ [m] ($= \phi_p \dot{D}_p/(1 - \varepsilon_p)$)
- $\mathbf{n}_G$: 速度方向の単位ベクトル
- Nu : 気体のヌセルト数 ($= \hat{h} \dot{L}_0/\lambda$)
- Nu_p : ペブルのヌセルト数 ($= \hat{h} \dot{L}_0/\lambda_p$)
- N_α : 内挿関数 (= 要素形状関数)
- $\hat{p}_0$: 気体の代表圧力 [Pa] ($= \dot{G}_0^2/\rho_0$)
- p : 気体の無次元圧力 ($= \hat{p}/\hat{p}_0$)
- Pe : 気体のペクレ数 ($= \dot{L}_0 \dot{G}_0 \hat{c}/\lambda$)
- Pe_p : ペブルのペクレ数 ($= \dot{L}_0 \dot{G}_{p0} \hat{c}_p/\lambda_p$)
- $\dot{q}_0$: 単位体積・単位時間当りの代表熱量 [kJ/m³·s]
($= \dot{G}_0 \hat{c} \dot{T}_0/\dot{L}_0$)

* 原稿受付 平成2年11月27日。

*¹ 正員, 日本板硝子(株)硝子建材生産技術部 (〒299-01 市原市姉崎海岸6)。*² 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

q : 単位体積・単位時間当りの無次元熱交換量

($= \hat{q}/\hat{q}_0$)

Re : レイノルズ数 ($= \hat{L}_0 \hat{G}_0 / \hat{\mu}$)

Re^* : 見かけのレイノルズ数

($= 1.75 \hat{L}_0 \hat{G}_0 / (150 \hat{\mu}) = \hat{L}_0 \hat{G}_0 / \hat{\mu}^*$)

$\hat{s}$: 気体の比エントロピー [$\text{kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$]

$\hat{s}_p$: ベブルの比エントロピー [$\text{kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$]

St : 気体のスタントン数 ($= Nu/Pe = \hat{h}/(\hat{G}_0 \hat{c})$)

St_p : ベブルのスタントン数

($= Nu_p/Pe_p = \hat{h}/(\hat{G}_{p0} \hat{c}_p)$)

$\hat{T}_0$: 代表温度 [$^\circ\text{C}$]

T : 気体の無次元温度 ($= \hat{T}/\hat{T}_0$)

T_p : ベブルの無次元温度 ($= \hat{T}_p/\hat{T}_0$)

$\hat{t}_0$: 気体の代表時間 [s] ($= \hat{\rho}_0 \hat{L}_0 / \hat{G}_0$)

$\hat{t}_{p0}$: ベブルの代表時間 [s] ($= \hat{\rho}_p \hat{L}_0 / \hat{G}_{p0}$)

t : 気体の無次元時間

t_p : ベブルの無次元時間

$\mathbf{x}$: 無次元位置ベクトル

ε_p : ベブルの空隙率

$\hat{\lambda}$: 気体の熱伝導率 [$\text{kJ/m} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$]

$\hat{\lambda}_p$: ベブルの熱伝導率 [$\text{kJ/m} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$]

$\hat{\mu}$: 気体の粘性係数 [$\text{kg/m} \cdot \text{s}$]

$\hat{\mu}^*$: 気体の見かけの粘性係数 [$\text{kg/m} \cdot \text{s}$]

$\hat{\rho}_0$: 気体の標準状態の密度 [kg/m^3]

ρ : 気体の無次元密度 ($= \hat{\rho}/\hat{\rho}_0$)

$\hat{\rho}_p$: ベブルの平均密度 [kg/m^3]

ϕ_p : ベブルの形状係数

ω : 無次元渦度ベクトル ($= \nabla \times \mathbf{G}$)

Ω_e : 要素内領域

上付き添え字

k : 修正子の反復レベル

n : 時間ステップ数

$\wedge$: 有次元量

下付き添え字

0 : 代表量

e : 要素番号

α, β : 局所節点番号

$$Re^* = \frac{1.75 \hat{L}_0 \hat{G}_0}{150 \hat{\mu}} \quad (3)$$

で定義すれば、次式を得る。

$$-\nabla p = \frac{1.75}{\rho \varepsilon_p^3} \left\{ \frac{\mathbf{G}}{Re^*} + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{n}_G \right\} \quad (4)$$

次に、気体とベブルとの単位体積・単位時間当りの熱交換量 $\hat{q}$ は、次式で与えられる。

$$\hat{q} = \hat{h} \hat{A} (\hat{T} - \hat{T}_p) \quad (5)$$

ここで、熱伝達率 $\hat{h}$ は次式で与えられる。

$$\hat{h} = C_1 (Re |\mathbf{G}|)^{C_2} \quad (6)$$

ただし C_1 および C_2 は実験により求めた係数である。(5) 式を

$$\hat{q} = \hat{q}_0 q,$$

$$\hat{T} = \hat{T}_0 T,$$

$$\hat{T}_p = \hat{T}_0 T_p \quad (7)$$

で無次元化し、気体のスタントン数を

$$St = \frac{\hat{h}}{\hat{G}_0 \hat{c}} \quad (8)$$

で定義すれば次式を得る。

$$q = 6 St (T - T_p) \quad (9)$$

2・2 運動方程式 ここで対象としている充填粒子層の間隙の流れは、慣性の影響がかなり大きく、細部にわたる流れは非常に複雑になるためこれを解析することは困難である。しかしながら、変数として空間で平均化した空塔断面積基準の質量速度 $\mathbf{G}$ を用い、これよりも小さいスケールの流れにより発生する力は外力項として実験式で与えることにより解析が容易になる。質量速度 $\mathbf{G}$ を用いてナビエ・ストークスの式を表わせば、次式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{G} = -\nabla p + \frac{\hat{\mu}^*}{\rho} \nabla^2 \mathbf{G} + \hat{\rho} \mathbf{K} \quad (10)$$

ここで、 $\hat{\mu}^*$ はベブル充填層を気体が流動する時の見かけの粘性係数であり、気体の粘性係数 $\hat{\mu}$ との関係は (3) 式および (4) 式から

$$\hat{\mu}^* = \frac{150}{1.75} \hat{\mu} \quad (11)$$

であると類推できる。これは充填物があるために慣性項に比較して粘性項の影響が大きくなっていることを意味している。したがって、

$$Re^* = \frac{\hat{L}_0 \hat{G}_0}{\hat{\mu}^*} \quad (12)$$

と表わされる。また、(10) 式の右辺最終項は流体に働く外力であり、ここでは充填粒子の間隙を流れる小さいスケールの流れにより発生する抵抗力と密度差による浮力を考慮し

2 基礎方程式

2・1 圧力損失および熱伝達率 気体が充填粒子層の間隙を一様な質量速度 $\mathbf{G}$ で流れた場合の気体の圧力損失はエルガンの式⁽⁴⁾で与えられる。

$$-\hat{\nabla} p = \frac{1}{\hat{\rho}} \left\{ 150 \frac{(1 - \varepsilon_p)^2}{\varepsilon_p^3} \frac{\hat{\mu} \mathbf{G}}{(\phi_p \hat{D}_p)^2} + 1.75 \frac{1 - \varepsilon_p}{\varepsilon_p^3} \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{n}_G}{\phi_p \hat{D}_p} \right\} \quad (1)$$

(1) 式を、

$$\hat{p} = \hat{p}_0 p,$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{L}_0 \mathbf{x},$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{G}_0 \mathbf{G},$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 \rho \quad (2)$$

で無次元化し、見かけのレイノルズ数を

$$\begin{aligned} \dot{\rho} \dot{\mathbf{K}} = & - \frac{1}{\bar{\rho}} \left\{ 150 \frac{(1-\varepsilon_P)^2}{\varepsilon_P^3} \frac{\dot{\mu} \dot{\mathbf{G}}}{(\phi_P \dot{D}_P)^2} \right. \\ & + 1.75 \frac{1-\varepsilon_P}{\varepsilon_P^3} \frac{(\dot{\mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{G}}) \mathbf{n}_G}{\phi_P \dot{D}_P} \left. \right\} \\ & - (\dot{\rho}_0 - \dot{\rho}) \dot{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (13)$$

で与える。さらに、(10) 式および (13) 式を無次元化すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{G} = & - \nabla p + \frac{1}{\rho Re^*} \nabla^2 \mathbf{G} \\ & - \frac{1.75}{\rho \varepsilon_P^3} \left\{ \frac{\mathbf{G}}{Re^*} + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{n}_G \right\} \\ & - \frac{1}{Fr} (1 - \rho) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$Fr = \frac{\dot{G}_0^2}{\dot{\rho}_0^2 g_0 L_0} \quad (15)$$

はフルード数である。

また、連続の式としては定常流に対してのみ厳密な

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (16)$$

を用いる。ペブルは気体に比べ密度が約 10^3 倍大きいので、代表時間もペブルの方が約 10^3 倍大きくなる。したがって、この系の非定常特性はペブルの温度に支配されるため、(16) 式を適用しても計算開始直後の気体の密度変化が大きい場合以外は非定常特性の解析も有効である。

温度場の解析を行なう場合にはペブルの質量速度も求めなければならない。これは、模型実験の観察や経験に頼らざるをえない。しかしながら、観察した速度データを補間して全ノードにセットする必要がある上、各ノードにセットされた質量速度は連続の式を満足しなければならないため、かなり煩雑になる。ここでは、簡便法として気体と同様の運動方程式および連続の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_P}{\partial t_P} + (\mathbf{G}_P \cdot \nabla) \mathbf{G}_P = & - \nabla p_P + \frac{1}{Re_P^*} \nabla^2 \mathbf{G}_P \\ & - \frac{1.75}{\varepsilon_P^3} \left\{ \frac{\mathbf{G}_P}{Re_P^*} + (\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{G}_P) \mathbf{n}_{G_P} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}_P = 0 \quad (18)$$

を用い、気体と同一のアルゴリズムで解析する。ここで、添え字 P はペブルに関する諸量であり、各々添え字の無い気体に関する諸量に対応する。模型実験等により速度の遅い領域が存在することがあらかじめ確認されている場合は、(17) 式においてその部分の空隙率 ε_P を小さくすることにより同等の速度分布を再現することが可能である。

2・3 エネルギー方程式 (5) 式で示す気体とペブルの交換熱量 $\dot{q}$ を使用すれば、気体のエネルギー方程式は次式で与えられる。

$$\dot{\rho} \hat{T} \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + \hat{T} (\dot{\mathbf{G}} \cdot \dot{\nabla}) \hat{s} = \hat{\lambda} \dot{\nabla}^2 \hat{T} - \dot{q} \quad (19)$$

ここで、 $s = s(T)$ として比熱に関する一般関係式

$$\hat{c} = \hat{T} \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial T} \right)_p \quad (20)$$

を用いて (19) 式を $\hat{T}$ に関する式に変換すれば次式を得る。

$$\dot{\rho} \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \hat{c} (\dot{\mathbf{G}} \cdot \dot{\nabla}) \hat{T} = \hat{\lambda} \dot{\nabla}^2 \hat{T} - \dot{q} \quad (21)$$

さらに、(21) 式を無次元化すれば次式を得る。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{G} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\rho Pe} \nabla^2 T - \frac{6}{\rho} St_P (T - T_P) \quad (22)$$

ここで、 Pe は気体のペクレ数である。

ペブルについても気体の場合と同様にして次式のような無次元エネルギー方程式が得られる。

$$\frac{\partial T_P}{\partial t_P} + (\mathbf{G}_P \cdot \nabla) T_P = \frac{1}{Pe_P} \nabla^2 T_P + 6 St_P (T - T_P) \quad (23)$$

ここで、 St_P および Pe_P はそれぞれペブルの Stanton 数およびペクレ数である。

3 離散化および時間進行法

3・1 運動方程式の離散化 高速型 GSMAC 有限要素法⁽³⁾で離散化するため (14) 式の対流項のみ回転形表示で示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = & - \nabla H + \frac{1}{\rho} (\mathbf{G} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\rho Re^*} \nabla^2 \mathbf{G} \\ & - \frac{1.75}{\rho \varepsilon_P^3} \left\{ \frac{\mathbf{G}}{Re^*} + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{n}_G \right\} \\ & - \frac{1}{Fr} (1 - \rho) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{G} \quad (25)$$

である。ここで、 $\mathbf{G}$ を陽的に、 H を陰的に離散化し、予測子・修正子法を用いて分解すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}^n}{\Delta t} = & - \nabla H^n + \frac{1}{\rho^n} (\mathbf{G}^n \times \boldsymbol{\omega}^n) + \frac{1}{\rho^n Re^*} \nabla^2 \mathbf{G}^n \\ & - \frac{1.75}{\rho^n \varepsilon_P^3} \left\{ \frac{\mathbf{G}^n}{Re^*} + (\mathbf{G}^n \cdot \mathbf{G}^n) \mathbf{n}_G^n \right\} \\ & - \frac{1}{Fr} (1 - \rho^n) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\mathbf{G}^{n+1} - \tilde{\mathbf{G}}}{\Delta t} = -\nabla H^* \quad (27)$$

$$H^{n+1} = H^n + H^* \quad (28)$$

(27) 式において $\nabla \cdot \mathbf{G}^{n+1} = 0$ とし、要素内で積分した後、ガウスの発散定理を用いれば、

$$\oint_{\Gamma_e} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_e} \tilde{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (29)$$

を得る。ここで、 Γ_e は要素境界、 $\mathbf{n}$ は要素境界の外向き単位法線ベクトルである。また、

$$\phi = H^* \Delta t \quad (30)$$

は無次元修正速度ポテンシャルである。

次に、 $\mathbf{G}$ を各局所座標成分に関し一次で、 $H, \boldsymbol{\omega}, \rho$ を要素内一定でそれぞれ近似する。

$$\mathbf{G} = N_\alpha \mathbf{G}_\alpha, \quad H = H_e, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e, \quad \rho = \rho_e \quad (31)$$

(31) 式を (26) 式および (27) 式に代入し、ガラーキン法により定式化すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{G}}_{\beta} - \mathbf{G}_{\beta}^n}{\Delta t} &= \mathbf{C}_{\alpha} H_{\epsilon}^* + \frac{M_{\alpha\beta}}{\rho_{\epsilon}^n} (\mathbf{G}_{\beta}^n \times \boldsymbol{\omega}_{\epsilon}^n) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_{\epsilon}^n Re^*} F_{\alpha\beta} \mathbf{G}_{\beta}^n \\ &\quad - \frac{1.75}{\rho_{\epsilon}^n \epsilon_p^3} M_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\mathbf{G}_{\beta}^n}{Re^*} + (\mathbf{G}_{\beta}^n \mathbf{n}_{\epsilon}^n)_{\beta} \right\} \\ &\quad - \frac{\Omega_{\epsilon}}{8Fr} (1 - \rho_{\epsilon}^n) \mathbf{g} - \mathbf{S}_{\alpha}^n \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\bar{M}_{\alpha\beta} \mathbf{G}_{\beta}^{n+1} - \tilde{\mathbf{G}}_{\beta}}{\Delta t} = \mathbf{C}_{\alpha} H_{\epsilon}^* - \mathbf{S}_{\alpha}^* \quad (33)$$

ここで、

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{\epsilon}} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (34)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} M_{\alpha\beta} \quad (\text{集中質量行列}) \quad (35)$$

$$F_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{\epsilon}} \nabla N_{\alpha} \cdot \nabla N_{\beta} d\Omega \quad (36)$$

$$\mathbf{C}_{\alpha} = \int_{\Omega_{\epsilon}} \nabla N_{\alpha} d\Omega \quad (37)$$

$$\mathbf{S}_{\alpha}^n = \int_{\Gamma_h} N_{\alpha} (H^n \mathbf{n} - \frac{1}{\rho^n Re^*} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G}^n) d\Gamma \quad (38)$$

$$\mathbf{S}_{\alpha}^* = \int_{\Gamma_h} N_{\alpha} H^* \mathbf{n} d\Gamma \quad (39)$$

で表わされる。ただし、 Γ_h は自然境界である。

3・2 エネルギー方程式の離散化 (22) 式においてオイラー的時間前進法に BTD (Balancing Tensor Diffusivity) ⁽¹⁾ を適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho^n} (\mathbf{G}^n \cdot \nabla) T^n + \frac{1}{\rho^n Pe} \nabla^2 T^n \\ &\quad - \frac{6}{\rho^n} St^n (T^n - T_p^n) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot (\mathbf{G}^n \mathbf{G}^n \cdot \nabla T^n) \end{aligned} \quad (40)$$

T を各局所座標成分に関し一次で、 $\mathbf{G}$, ρ , St を要素内一定でそれぞれ近似する。

$$T = N_{\alpha} T_{\alpha}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_{\epsilon}, \quad \rho = \rho_{\epsilon}, \quad St = St_{\epsilon} = \frac{\dot{h}_{\epsilon}}{\dot{G}_0 \dot{c}} \quad (41)$$

ただし、 $\mathbf{G}_{\epsilon}$ は次式で定義する。

$$\mathbf{G}_{\epsilon} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha=1}^8 \mathbf{G}_{\alpha} \quad (42)$$

(42) 式を (41) 式に代入し、ガラーキン法により定式化すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{M}_{\alpha\beta} T_{\beta}^{n+1} - T_{\beta}^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho_{\epsilon}^n} (\mathbf{G}_{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_{\alpha\beta}) T_{\beta}^n - \frac{1}{\rho_{\epsilon}^n Pe} F_{\alpha\beta} T_{\beta}^n \\ &\quad - \frac{6St_{\epsilon}^n}{\rho_{\epsilon}^n} M_{\alpha\beta} (T_{\beta}^n - T_{p\beta}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}_{\epsilon}^n \mathbf{G}_{\epsilon}^n : \mathbf{F}_{\alpha\beta} T_{\beta}^n + R_{\alpha}^n \end{aligned} \quad (43)$$

ここで、

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{\epsilon}} N_{\alpha} \nabla N_{\beta} d\Omega, \quad (44)$$

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{\epsilon}} \nabla N_{\alpha} \nabla N_{\beta} d\Omega, \quad (45)$$

$$R_{\alpha}^n = \frac{1}{\rho^n Pe} \int_{\Gamma_h} N_{\alpha} (\mathbf{n} \cdot \nabla T^n) d\Gamma \quad (46)$$

である。ただし、BTD 項を部分積分する時に発生する自然境界上での積分項は無視した。また、ペブルのエネルギー方程式 (23) 式も同様に離散化できる。

3・3 時間進行法 図1に示す要素において、(29) 式に基づいた以下の3段階の修正子ステップで速度場および圧力場の修正を行ないながら時間を進行する⁽³⁾。

1. 第1修正子ステップ：修正子の反復レベル $k+1$ における要素 X の修正速度ポテンシャルの初期値を次式で与える。

$$\phi_{X0}^{k+1} = -\frac{\omega_1}{\alpha_X} \oint_{\Gamma_X} \mathbf{G}^k \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (47)$$

ここで、 ω_1 は第一緩和係数、 Γ_X は要素 X の境界であり、また、

$$\alpha_X = \sum_{i=1}^6 \alpha_i = \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^2}{3V_i} \quad (48)$$

である。ただし、 S_i および V_i は、例えば要素 $i=1$ の場合、それぞれ面 ABCD の面積および8面体 $X1ABCD$ の体積であり、その他の要素の場合も同様である。なお、反復レベル0における質量速度は $\mathbf{G}^0 = \tilde{\mathbf{G}}$ である。

2. 第2修正子ステップ：(48) 式を要素 X の周辺要素 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ に適用した後、要素 X の修正速度ポテンシャルの新しい値を次式で計算する。

$$\phi_X^{k+1} = \frac{1}{\alpha_X} \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i \phi_{i0}^{k+1} - \omega_2 \oint_{\Gamma_X} \mathbf{G}^k \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right) \quad (49)$$

ここで、 ω_2 は第2緩和係数である。

3. 第3修正子ステップ：修正子反復レベル $k+1$ における速度ベクトルおよびベルヌーイ関数は ϕ_X^{k+1} をそれぞれ (33) 式および (28) 式に代入し次式で計算する。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} (\mathbf{G}_{\beta}^{k+1} - \mathbf{G}_{\beta}^k) = \mathbf{C}_{\alpha} \phi_X^{k+1} \quad (50)$$

$$H_X^{k+1} = H_X^k + \frac{\phi_X^{k+1}}{\Delta t} \quad (51)$$

図1 ϕ_x の計算に関係する要素

この修正子の反復は全要素で

$$|\nabla \cdot \mathbf{G}^{k+1}| < \varepsilon \quad (52)$$

を満足するまで続ける。ここで ε は 10^{-3} オーダーの小さな値を意味する。

前述のように、ペブルと気体との密度差のため、この系の非定常特性はペブル温度に支配される。したがって、ペブルの各時間ステップ毎に、気体は数時間ステップ進めることになる。

図2 熱交換器モデル

図3 熱交換器の要素分割図

図4 気体の質量速度ベクトル

図5 気体入口断面の圧力分布

(A) 気体

(B) ペブル

図6 気体およびペブルの温度分布

図7 ペブルの温度分布詳細

4 解析結果および検討

図2は本解析対象とした熱交換器を示す。加熱用の高温気体は左方に位置する矩形ダクトから移動層本体外周に設けられた入口空間部(赤色半透明部分)に導入される。この入口空間部の下方はペブルが充填された移動層本体に全周にわたって接続されており、この部分に形成されるペブルの自由表面から気体がペブル中に導入される。さらに、気体はペブルと熱交換した後上方の青色半透明部分から放出される。一方、ペブルは最上端の円形部分から導入され、自重で移動層本体中を降下する間に気体と熱交換した後、最下端の円形部分から排出される。本体下方の中央部に設けられた円錐状の構造物はペブルを一樣速度で流すためのものである。解析領域は図3に示すように移動層本体の1/2とし、6784要素を用いた。質量速度の境界条件としては、壁面の接線方向および出口境界において次式を用いた。

$$\rho \mathbf{n} - \frac{1}{\rho Re^*} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G} = 0 \quad (53)$$

また、温度境界条件としては、ペブル入口で $T_p = 0$ 、気体入口で $T = 1$ とし、その他は全て断熱条件で与えた。数値積分法としては、エルガンの式で表わされるペブルによる抵抗力項以外は高速型 GSMAC 法⁽³⁾と同様に一点積分を使用した。この抵抗力項は対流項・粘性項に比較して影響が大きく、この項を一点積分すると空間振動が発生しやすいため、この項には $3 \times 3 \times 3$ 点積分を適用した。

図4、図5は $Re^* = 17.5$ におけるエネルギー方程式を考慮しない解析結果である。図4は気体の質量速度ベクトルを示す。移動層断面に比較し十分な層高がとられているため、気体入口付近を除き一様な質量速度分布が得られていることがわかる。この質量速度分布は実験では測定しにくいいため圧力分布について室温での模型実験との比較を行なった。まず、気体の入口・出口間の圧力損失を実験値と一致させるため ε_p を調整した。 ε_p はペブルの充填状態により変動し、(1)式からわかるように圧力損失に大きな影響を与えるため、実際にペブルが流れている状態での圧力損失の平均値と一致するようにした。気体の入口・出口間の圧力損失を解析と実験で一致させているため、気体の質量速度の断面方向成分が最も大きい気体入口付近で解析と実験の圧力分布が一致すれば全領域の圧力分布および質量速度ベクトルは一致していると考えられる。図5は気体入口断面での解析と実験による圧力分布の比較を示す。ただし、この図では移動層直径を代表長さとし、 $G = \dots$ で気体が行れる時に代表長さだけ離れた場所での圧力差を代表圧力として無次元化している。気体は左方に位置する矩形ダクトから導入され、入口空間部を経由してペブル自由表面に到達する。このためペブル自由表面では矩形ダクトと反対側の圧力がわずかに高くなっているが、全体的に解析結果は実験結果と非常によく一致していることがわかる。

図6、図7は $Re^* = 17.5$, $Pe = 1310$, $Pe_p = 86$, $\hat{T}_0 = 600^\circ\text{C}$ における解析結果である。前述のように気体の入口・出口間の圧力損失が実験値と一致するように ε_p を調整している。図6は移動層内の気体およびペブルの温度

分布を示す。また、図7は気体と熱交換した後のペブルの温度分布を示す。本解析では壁面を断熱壁として扱っているため、放熱量(交換熱量の約5%)に相当する熱量分はあらかじめペブルの質量速度を小さくして解析している。この結果、ペブル及び気体の平均出口温度は実験結果と比較して $\pm 15^\circ\text{C}$ 以内の誤差で一致している。熱伝達率および伝熱面積の誤差を考えればかなりよい一致であると言える。熱交換した後のペブルの温度むらを小さくすることは移動層型熱交換機の重要な要素の1つである。熱交換後の移動層の中心部と外周部におけるペブルの温度差は、実験では $15 \sim 30^\circ\text{C}$ の範囲で変動しており、図7に示すペブルの中心部と外周部の温度差とほぼ一致していると言える。温度分布は圧力分布に比較し実験が長期間に及び実験値がかなり変動するため精度の高い比較はできなかった。しかし、工業的に応用するにはこの程度一致していれば十分であると考えられる。

本解析で用いた解析モデルは軸対称であるため特に3次元計算をする必要はないが、非対称な境界条件での計算や、他の工業的な応用のため当初から3次元計算を実施した。なお、本解析は TITAN3000(クボタコンピュータ(株))で実行し、数時間で定常解を得ることが可能であった。

5 結 言

従来の GSMAC 有限要素法に比較し、より費用効率が優れかつ空間振動が発生しにくい高速型 GSMAC 有限要素法を移動層型熱交換器の解析に応用する事により以下の結論を得た。

1. ペブルの間隙を流れる小さいスケールの流れにより発生する抵抗力をエルガンの式でモデル化し、ナビエ・ストークスの式の外力項として扱うことにより、移動層型熱交換機内の3次元的な気体の流れをかなり精度よく予測することが可能である。
2. 実験により求めた熱伝達率を用いて計算したペブルと気体の熱交換量をペブルおよび気体のエネルギー方程式に導入することにより、ペブルおよび気体の温度分布は工業的な応用において十分な精度で予測できる。

計算精度および計算コストを考慮すれば本解析スキームは十分実用的である。本解析スキームを利用することによりさまざまな形状および条件での移動層型熱交換器の解析が効率的に実施できるため、設計への貢献が大いに期待できる。

参考文献

- (1) Gresho, P.M., ほか3名, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 4, 557-598(1984).
- (2) 河合・澤田・棚橋, 機論, 54-507, B, 3118-3125 (昭63).
- (3) 河本・棚橋, 機論, (投稿中, 論文 No.90-1460A)
- (4) 尾花英朗, 熱交換器設計ハンドブック, 工学図書, 第2版(1980).