二次元キャビティ内振動流のカオスの混合に関する数値実験*

小河原加久治*¹, 高崎 悟*², 飯田 誠 一*¹

A Numerical Simulation on Chaotic Mixing in 2D Cavity Flows

Kakuji OGAWARA, Satoru TAKASAKI and Sei-ichi IIDA

Steady and 2D-driven cavity flows were numerically simulated using the finite difference method. Pseudo-Liapunov exponents were obtained by measuring distances between particles initially located nearby. In the case where the moving lid was oscillated at a certain frequency, the particle paths showed a "folding and stretching" pattern and gave a positive exponent. We found that the pseudo-Liapunov exponent has its maximum at the oscillating period of $1.5T$ for $Re=50$.

Key Words: Chaos, Unsteady Flow, Oscillating Flow, Numerical Analysis, Cavity flow

1. 緒 言

比較的単純な容器内での分子拡散によらない粒子の混合はカオスの混合と呼ばれ、理論と実験・数値計算がよく一致するために流体力学の主要な研究対象の一つとなりつつある⁽¹⁾。立方体キャビティ内流れにおいて、あるレイノルズ数を越えると定常流であっても、流跡線がカオス的になることが示された⁽²⁾⁽³⁾。これは、三次元空間において流れは乱流に遷移するよりはるかに低いレイノルズ数でも多様で複雑であり得ることを意味する。また、二次元性が仮定できるキャビティの場合でも移動壁を調和振動させることで、いわゆる“パイこね”原理によって流れはカオス的になり得る⁽⁴⁾。

カオスの混合は比較的低いレイノルズ数で流れを乱流にせん移させずに拡散効果が得られるため、注入したエネルギーに対する混合効率の高いことが予想され、工学的にも意義は大きい。しかし、従来の研究では力学系の位相幾何学的な性質を探ることに重点がおか

れ、良い混合を得るにはどうしたらよいかという指針は与えていない。本研究は、二次元加振キャビティ内での粒子拡散の度合いを定量化するため、リアプノフ指数⁽⁵⁾に相当する指標を新たに定義し、効率の高い混合の条件を求めることを目的とした。

一般的に良い混合とは、“速い混合”と“一様な混合”の二つが同時に満たされる場合であるが、ここではまず“速い混合”の測度について考える。分子拡散を伴う実際の混合は、拡散係数と接触面積との積で表される。乱流拡散は考えていないので拡散係数は物性値であり、接触面積の増大が速いことが“速い混合”を意味する。実験的には接触面積だけを測定することは困難であるため、数値的に二次元キャビティ流れを非定常計算し、面積を線分の長さに置き換えて混合の測度とした。

2. 計 算 方 法

流れ場の計算は渦度と流れ関数を使い S. O. R. による差分法で行った。図1に座標系と境界条件を示す。時間積分はオイラー法で時間刻みは0.001とし、流れ関数変化量の最大値の相対残差 ϵ を収束判定パラメータとして選び、 $\epsilon=1.0 \times 10^{-4}$ まで収束させた。計算格子は壁付近で細くなるように不等間隔に配し、格

* 平成2年11月2日 北海道支部第31回講演会において講演、原稿受付 平成2年12月25日。

*¹ 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

*² 学生員、北海道大学大学院。

子数は 22×22 である。壁の平均移動速度を代表速度、キャビティーの幅を代表長さとして定義されるレイノルズ数は 50 とし、キャビティーの上部壁が左から右に移動する。このレイノルズ数は Leong らの研究⁽⁴⁾の数十倍であり、混合器としての応用を考えるには妥当な数値である。移動壁が等速度の場合には無次元壁移動速度 $U(t)$ を 1 とし、加振壁の場合には、

$$U(t) = 1.0 + 0.5 \cos(2\pi t/T) \cdots \cdots (1)$$

で与えた。振動の周期 T は無次元時間で 0.1 から 10.0 までの場合について計算した。

混合の速さの指標には、さきに述べたように接触面積の拡大率に相当するものとして、隣接する 2 点間距離の拡大率を用いる。もし、系内で 2 点間の距離が時間とともに指数関数的に増大するときには、この系は決定論的にカオス状態であることを示唆する。この拡大率は系がカオス的であるか否かの判定によく使われるリアプノフ指数と似た定義であるが、その関連は明らかではないので本研究ではこれを擬似リアプノフ指数と呼ぶ。次に、擬似リアプノフ指数の測定および流跡の確認のため、流れ場における質点の動きを追跡した。質点の移動量は格子点での速度から線形内挿した質点位置での速度をオイラー法で積分して求めた。初期状態では図 2 のように、 $x=0.5$, $y=0.05 \sim 0.95$ の直線上に $N=1000$ 点の質点を等間隔に配置した。

擬似リアプノフ指数 λ は、ある時刻 t での n 番めと $n+1$ 番めの距離を $L_n(t)$ として、

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{1}{L_0} \sum_{n=0}^{N-1} L_n(t) \right] \cdots \cdots (2)$$

と定義する。ここに、 $L_0 (=0.90)$ は初期総粒子間距離である。

図 1 座標系および境界条件

3. 結 果

図 3 に上部壁が (a) 一定速度で移動する場合と (b) 一定周期で振動しながら移動する場合について粒子の動きを時間経過に従って示す。図 3 (a) では初期状態で直線上に並んでいた質点粒子が渦巻状に引き延ばされていくだけであるが、図 3 (b) の場合には壁が加速・減速されるために粒子が図 3 (a) より拡散しているのがわかる。レイノルズ数は 50 であるから流れは乱流ではない。本計算ではトレーサ粒子は質点であり大きさは持たないし、分子拡散の効果も加味されていないが、最初に隣同士であった粒子間距離が指数関数的に引き延ばされることは物質拡散が促進されていることを意味する。つまり、質点間距離が延びることは接触面積が増大することと同じであると解釈する。

この壁を振動させることによる拡散効果はその振動周期によって大きく異なる。図 3 (b) に見るように $x=1.0$, $y=0.7$ 付近で粒子の列がひずめられ突起ができる場合には、擬似リアプノフ指数が正で大きな値をとる。

同じ時刻での周期による粒子分布の相違を図 4 に示す。周期が短いと粒子はひだ状に分布するが、それは局所的に遍在して、キャビティー内には一様に拡散していない。一方、周期が長い場合はひだの折返しが少なくなり、やはり一様に拡散していない。

図 5 (a) に周期の差により粒子間距離が時間とともにどう伸びるかが示されており、壁を調和振動させた場合には指数関数的に伸びているのがわかる。図 5 (b) に擬似リアプノフ指数の周期 T による変化を示す。 $T=1.5$ 付近で最大となっていることがわかる。

それではなぜ流線に突起ができると、急激に粒子間距離が延びるのかを考えてみる。いったん流線がひずめられると速度こう配の影響で突起はどんどん引き延

図 2 $t=0$ における粒子配置

図 3 粒子位置の時間的变化

図 4 $t=18.0$ における粒子位置 (a) 粒子間距離の伸び率 L/L_0 の時間的推移 (b) 周期 T による擬似リアプノフ指数 λ の変化

図 5

ばされるが、振動の次の周期でまた別の突起が作られるため「折り返しては引き延ばす」という操作を繰り返すいわゆる「パイこね」状態になっている。これはカオスに至る典型的な例であり、キャビティーの壁近傍では $t=18.0$ ですでに粒子が空間にまばらに分布してしまい初期状態でどれが隣同士だったのか判別困難になっている。図 3 (b) の $t=12.0$ と $t=16.0$ および $t=14.0$ と $t=18.0$ において、それぞれ渦中心付近の流跡模様が似通っており、フラクタルの特徴である自己相似性を持っているように見えることも興味深い。

4. 結 論

二次元キャビティー流れにおいて、片側壁が調和振動しながら一定方向に動くことにより、キャビティー

内の混合を促進させ得ることがわかった。

$Re=50$ で、振動が式 (1) で表せるとき、擬似リアプノフ指数は $T=1.5$ 付近で最大値をとる。

文 献

- (1) Ottino, J. M., *Proceedings of the IUTAM Symposium*, Cambridge, August 13-18, 1989, (1990), 13, Cambridge University Press.
- (2) Ishii, K. and Iwatsu, R., *Proceedings of the IUTAM Symposium*, Cambridge, August 13-18, 1989, (1990), 54, Cambridge University Press.
- (3) Ishii, K., Iwatsu, R., Kambe, T. and Matsumoto, N., *Proc. Int. Workshop Nonlinear Turbulent Processes Phys.*, Kiev, USSR, (1989).
- (4) Leong, C. W. and Ottino, J. M., *J. Fluid Mech.*, **209** (1989), 463.
- (5) 高安編, フラクタル科学, (1987), 82, 朝倉書店.