連続体近似法による球充てん層内放射エネルギー透過解析法*

工藤一彦^{*1}, 谷口博^{*1}, 金銘模^{*2}Analytical Method to solve Radiative Energy Transmission
within Packed Spheres by Continuous Model

Kazuhiko KUDO, Hiroshi TANIGUCHI and Yong-Mo KIN

The methods to obtain the extinction coefficient and the scattering phase function are studied to solve radiative transmission through packed spheres by a continuous model. The validity of the methods is shown by comparing the results with the ones of direct Monte Carlo simulation. To obtain an effective extinction coefficient, a cell model which represents the extinction in a cell composed of a real-sized sphere and its surrounding volume should be used. To obtain an effective scattering phase function, non uniform radiation incidence to the surface of each sphere should be considered instead of using uniform incidence, and the non-uniform incidence onto each sphere surface can be obtained by considering that a real-sized sphere is set in a radiation field whose intensity from the entrance to the exit of the bed of the packed spheres.

Key Words: Thermal Radiation, Packed Bed, Numerical Analysis, Transmittance, Monte-Carlo Method, Cell Model, Continuous Model

1. 序 論

流動層ボイラ, 充てん層式高温再生熱交換器, 高温触媒反応層, 宇宙基地用ドロップレットラジエータなど, 充てん層, 流動層あるいは固(液)-気混層流は広い分野で利用されてきた。このような充てん層などにおける放射エネルギーの透過に関しては, 従来充てん層を均質の放射・散乱性媒体とみなし, その中での散乱断面積と吸収断面積の和である減衰係数と, 球に平行な放射エネルギーが入射したときの散乱方向分布を表す散乱位相関数を用い, モンテカルロ法⁽¹⁾⁽²⁾, 2流束法⁽³⁾⁽⁴⁾, 球面調和関数法⁽⁵⁾⁽⁶⁾などでの解析が行われてきた。ここで従来は, 減衰係数は球1個のそれを単位体積中の球の数だけ加え合せたものを用い, また散乱位相関数は単独球のものを用いていた。このような解析法(以下連続体近似法と呼ぶ)は, 充てん率の値が大きくなるにしたがい, 実際の現象と合わなくなることがこれまでの研究で示されている⁽⁷⁾⁻⁽¹⁰⁾。ここで, Mie理論を適用する必要がある小径粒子により形成された

充てん層については, 粒子相互の散乱の干渉を考慮した解析が行われており, この場合についての連続体近似法の適用限界が調べられている⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。しかし, 本研究で対象としているような散乱に幾何光学が適用される場合, すなわち波長に比べて十分大きい径の粒子の充てん層に対しては, 連続体近似の適用限界に関する研究は全く行われていないのが現状である。そこで前報⁽⁹⁾では, 幾何光学的散乱領域における等径球により形成された充てん層中での放射エネルギー透過に関し, 連続体近似法, 直接モンテカルロシミュレーション法(以下D. M. S.と称する)による結果を比較し, 従来のままの連続体近似法が非常に充てん率の低い場合にしか適用できないことを明らかにした。また, この連続体近似法を高充てん率の充てん層にまで適用するためには, 有限の大きさを有する球による減衰を考えたセルモデルによって求められる減衰係数と, D. M. S.によって求められた, 充てん層中の球表面への放射エネルギー入射量分布に対応した散乱位相関数を用いればよいことを示した。しかし, このような散乱位相関数は, 球の表面放射率, 充てん率および各球への放射エネルギーの入射方向によって変化するため, 適合する散乱位相関数を多数データベースとして求めておく必要があった。しかしながら, おおのこの条件に対

* 平成3年5月30日 第28回日本伝熱シンポジウムにおいて講演, 原稿受付 平成3年3月1日。

^{*1} 正員, 北海道大学工学部(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

^{*2} 正員, 韓国海洋大学(〒606 大韓民国釜山市影島区東三洞1)。

する散乱位相関数を D. M. S. により求めておくことは、スーパーコンピュータのベクトル処理による計算を行ってもかなりの計算時間がかかるため、実用上不可能である。また、充てん層中の各球の散乱位相関数を実験的に求めることも、充てん層の内部での現象であるためほとんど不可能である。

ここで本報においては、今までの研究の結果を基に、球に入射する放射エネルギー強度分布について検討を行い、各種条件下での散乱位相関数の求め方を明らかにした。また、これらにより求めた球への入射放射エネルギー強度分布を D. M. S. による結果と比較し、その妥当性を確認することにした。また、これらにより求められた散乱位相関数と、前報で提案されたセルモデルを用いた連続体近似法による放射エネルギー透過率解析が、高充てん率充てん層にも適用できることを示した。

2. 連続体近似法

吸収・散乱性粒子が非放射性的のガス中に多数配置された媒体中での放射エネルギー伝ばは、媒体を連続体をみなすと、次のように輸送式を解くことにより解析できる。

$$\frac{di_\lambda}{ds} = -(a_\lambda + \sigma_{sa}) \cdot i_\lambda(s, \omega) ds + a_\lambda \cdot i_{ba}(s, \omega) ds + \frac{\sigma_{sa}}{4\pi} \int_{\omega=4\pi} i_\lambda(s, \omega_i) \cdot \Phi(\lambda, \omega, \omega_i) d\omega_i \dots (1)$$

ここで、 i_λ は放射エネルギー強度、 a_λ , σ_{sa} はそれぞれ吸収係数と散乱係数であり、その和が減衰係数である。また、 Φ は散乱位相関数、 s は位置の座標、また添字 b は黒体を意味する。式(1)の右辺の第1項は吸収・散乱源による放射エネルギーの減衰項、第2項は自己放射項、第3項は ω_i 方向から ω 方向への散乱放射エネルギー項を表しており、この式はモンテカルロ法⁽¹⁾⁽²⁾、2 流束法⁽³⁾⁽⁴⁾、球面調和関数法⁽⁵⁾⁽⁶⁾などを適用して解くことができる。ただし、本報では充てん層における放射エネルギーの減衰、透過を対象としているので、右辺第2項が零の場合を取扱う。これらの解析法は、上述のように媒体を連続体と仮定して、減衰係数と散乱位相関数を用いて解くことになるので、連続体近似法と呼ばれている。本研究では、このうちモンテカルロ法⁽¹⁾⁽²⁾を用いて連続体近似法による充てん層の放射エネルギー透過解析を行い、その結果の妥当性を D. M. S. による解析結果と比較し検討することとした。この D. M. S. は、計算機内に等径球による三次元の不規則配列を作り、その配列の中での放射エネルギーの透過をモンテカルロ法で直接数値解析するもので

あり、その妥当性は前報⁽⁹⁾で示された実験結果および Chen-Churchill⁽¹³⁾の実験結果との比較により明らかにされている。なお、以下の解析では、充てん層に入射する放射エネルギーが拡散光の場合を取扱っているが、平行光の場合も全く同じ結論を得ることができる。充てん層としては、放射エネルギーの平均透過方向に垂直な方向には無限の広がりを持つものと仮定しているので、透過は充てん層の厚さ方向に一次元的に変化する現象となるが、放射エネルギー強度の方向分布は、充てん層の入射面での均一な分布が内部に入るにしたがって変化するので、充てん層内における透過解析を連続体近似法により解析するに当たっては、放射エネルギーの伝ばを三次元モンテカルロ法により計算することとした。

上記の2手法の計算時間について比較すると、D. M. S. では、充てん層中の球数が $6 \times 6 \times 120$ 個（合計 4 320 個、厚さ方向に 120 個）の不規則配列充てん層における透過解析において、球の表面放射率 0.1、充てん率 0.008、600 000 本のエネルギー束数の場合に、スーパーコンピュータ (HITAC S-820/80、ベクトル化率 93%) で 720 s であった。また、モンテカルロ法を用いた連続体近似法の計算時間は、D. M. S. による解析条件と同じ条件となる光学厚さが 8.0、散乱アルベドが 0.9 の場合、同じ 600 000 本のエネルギー束数に対してスーパーコンピュータ (HITAC S-820/80、ベクトル化率 98%) で 4 s と大幅に短くなった。後者はパーソナルコンピュータ (PC 9801 VX 21+80287, MS-FORTRAN) でも 2 h 程度で計算可能である。

3. 減衰係数の検討

放射エネルギーの透過率解析で連続体近似法を用いる場合、充てん球による散乱と吸収の程度を表す減衰係数は、従来の連続体近似法では各単独球の減衰断面積を吸収と散乱の断面積の和として求め、これが充てん層の体積中に均等に分散され、内部を透過する放射エネルギーが連続的に減衰されるとするモデル（以下連続減衰モデルと称する）を使用している。これに対し、前報⁽⁹⁾で述べたセルモデルでは、図1に示すように、

図1 減衰係数を求めるためのモデル

1 個の球に割り当てられた平均空間体積（一辺が式 (2) で示される Δs の立方体とする）中に実際の大きさの球が 1 個存在し、この体積の一面からこれに垂直に、均等に入射した平行な放射エネルギーが内部の球で不連続に減衰されることを考えている。ここで、

$$\Delta s = (\pi/6C)^{1/3}D \quad \dots\dots\dots (2)$$

であるから、両モデルより求められた等価の減衰係数は、次のようになる⁽⁹⁾。

$$\beta_{\text{cell}} = -(1.241C^{1/3}/D) \ln(1 - 1.209C^{2/3}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\beta_{\text{cont}} = 1.5C/D \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 D は球径、 C は球の充てん率 ($C \leq 0.74$)、 β_{cell} はセルモデルにおける減衰係数、 β_{cont} は連続減衰モデルにおける減衰係数である。一般に $\beta_{\text{cont}} < \beta_{\text{cell}}$ で、 $C \rightarrow 0$ の極限で、 $\beta_{\text{cont}} \rightarrow \beta_{\text{cell}}$ となる。ここで、図 2 (a) のセルモデルにおいて、 $C = \sqrt{2}/(3\sqrt{\pi}) = 0.266(D/\Delta s = \sqrt{2/\pi})$ としたときの、 Δs の厚さのセルの平均透過率は、

$$\tau_{\text{cell}} = (\Delta s^2 - \pi D^2/4)/\Delta s^2 = 0.5 \quad \dots\dots\dots (5)$$

となるが、このセルの減衰断面 $\pi D^2/4$ を一定に保ったまま、これを図 2 (b) のように 2^3 個の小セルに分割すると、各セル内の球の減衰断面はそれぞれ $1/2^3$ となり、したがって各球の直径は $1/\sqrt{2^3}$ になる。この系で、 Δs の厚さの充てん層の平均透過率を求めると、

$$\tau_{\text{cell}, 1/2} = \{[\Delta s^2 - 4\pi(D/\sqrt{2^3})^2/4]/\Delta s^2\}^2 = 0.5625 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、分割前の透過率 0.5 より大きい 0.5625 になってしまう。また、図 2 (a) のセルの各辺を n 分割した場合の Δs 当たりの平均透過率は、

$$\tau_{\text{cell}, 1/n} = \{1 - (\pi D^2/4)/(n\Delta s^2)\}^n \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。したがって、セル内で多数の微小な減衰断面が均等に分散されていることを仮定したときの平均透過率は、式 (5) と同じく $D = (\sqrt{2/\pi})\Delta s$ と置いた場合、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{\text{cell}, 1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - (\pi D^2/4)/(n\Delta s^2)\}^n$$

図 2 セルの大きさの変化による透過率変化

$$= 0.6065 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。これは従来の連続減衰モデルから求められた式 (4) の減衰係数を用いた透過率 $\exp(\beta_{\text{cont}} \cdot \Delta s)$ と等しくなる。したがって、従来から用いられてきた連続減衰モデルは、セルモデルでの減衰断面をセル内に均等に分散したものであり、前述のように $C \rightarrow 0$ の極限でしか減衰係数がセルモデルと合わず、有限の充てん率では常に低めの減衰係数〔透過率は式 (5)、(8) のように逆に連続減衰モデルのほうが高い〕を与えることになる。これより、充てん層の透過解析では、球およびセルの大きさは実際の充てん層中の値と同じにする必要があることがわかった。つまり、巨視的に均一な連続体とみなせる、充てん率が非常に小さい含じんガスのような場合に適用されてきた連続減衰モデルは、高充てん率の流動層あるいは球の充てん層には適用できないことを示している。

図 3～6 には、式 (3)、(4) に求めた減衰係数を式

図 3 減衰係数の違いによる透過特性の差

図 4 減衰係数の違いによる透過特性の差

(9), (10)のビアの法則に代入して求めた, 充てん層の入口面に垂直に入射する放射エネルギーの減衰を示す。破線はセルモデルから求めた減衰係数 β_{cell} による相対エネルギー強度 $[i(s/D)/i(0)]$ の変化を, また実線は連続減衰モデルから求めた減衰係数 β_{cont} による変化を示したもので, 比較のために D. M. S. による結果も併記してある。なお, これらの解析では散乱の影響が無視できるように球の放射率 ϵ を 1.0 としている。

$$i_{\text{cell}}(s/D)/i(0) = \exp(-\beta_{\text{cell}} \cdot s) \quad \cdots \cdots (9)$$

$$i_{\text{cont}}(s/D)/i(0) = \exp(-\beta_{\text{cont}} \cdot s) \quad \cdots \cdots (10)$$

以上の図において, 充てん率が非常に小さい 0.008 の充てん層の場合には三者が互いに一致しているが, 充てん率が大きくなると連続減衰モデルによる相対放射エネルギー強度のみが高く見積もられていることがわかる。この原因は, 前述のように実際の充てん層では, セルモデルのように有限の大きさの球が有限個存在し, 断続的に減衰されるにもかかわらず, 連続減衰モ

デルでは球が充てん層内に均等分散した連続体と仮定し, 充てん層内で一様に指数関数的に減衰すると仮定したためである。

図7~9は, 系をセルモデルにより求めた減衰係数および単独球の位相関数(4章に述べる独立散乱位相関数)を有する連続体とみなし, モンテカルロ法によって求めた拡散放射エネルギーの透過率解析結果(図7~9中の実線)と, D. M. S. による結果を比較したものである。図7~9より, セルモデルを用いて求めた減衰係数を用いた連続体近似法による解析結果は, 図8, 9に示すように充てん率 C が大きい充てん層でも, 充

図5 減衰係数の違いによる透過特性の差

図6 減衰係数の違いによる透過特性の差

図7 セルモデルによる透過率解析結果

図8 セルモデルによる透過率解析結果

図 9 セルモデルによる透過率解析結果

てん球による散乱が行われていない充てん層、つまり黒体球 ($\epsilon=1.0$) の充てん層の場合には D. M. S. による結果とよく一致している。しかし、充てん球による散乱がある場合、すなわち充てん球の放射率 ϵ が 0.1 の場合には、充てん率の増加に伴って D. M. S. による結果と次第に合わなくなってくるのがわかる。これは、充てん率が大きい充てん層中で、散乱位相関数が単独球のそれからずれてくることが原因であることが前報⁽⁹⁾ で明らかにされている。

4. 位相関数の検討

連続体近似を用いた輸送方程式(1)に含まれている散乱位相関数については、従来から単独球の散乱特性である独立散乱位相関数が用いられてきた。この独立散乱位相関数は、無限空間に置かれている単独球に平行で均一な放射エネルギーが入射する場合の、この球からの散乱強度を角度別に示したものである。しかしながら実際の充てん層中では、充てん率が高くなると、その中の各球表面への入射放射エネルギー強度分布は、ここで仮定している均一分布からずれてくることが予想され、前報⁽⁹⁾ ではこのような独立散乱位相関数が、充てん率が大きい充てん層には適用できないことが示されている。したがって、充てん層内の放射エネルギー透過解析に使用する散乱位相関数を求める場合、まず充てん層中の各球に入射する放射エネルギーの強度分布についての検討が必要である。

ここで、図 10 に示すように、充てん層中の 1 個の球に入射する放射エネルギーの、平均透過方向成分 (図 10 の横軸に平行な成分) を考えた場合、球の充てん層

図 10 球に入射する放射エネルギーの減衰機構

図 11 透過率減衰こう配

の入射側を向いた正面 (図 10 の A 位置) に入射する放射エネルギー強度は、平均的にはその場所まで透過してきた放射エネルギー強度 i_A に等しく、また球の側面 B に入射する放射エネルギー強度は、球の正面側に入射する場合に比べて、 $0.5D$ だけ無次元厚さの厚い箇所まで透過してきた値 i_B に等しいと考えることができる。またこの i_A と i_B の相対放射強度は充てん層内部での放射エネルギー強度の角度分布が場所によって変わらないとすると、図 10 に示すように、その位置における透過率の値から求めることができる。ここで、 i_A, i_B にかかっている係数 K は透過率から強度への変換係数である。この考えの妥当性を調べるため、図 11, 12 に示すような、D. M. S. により求められた充てん層の透過率の傾きから、図 10 に示す方法によって充て

図 12 透過率減衰こう配

ん層内の一つの球に入射する放射エネルギーの相対強度分布を求め、D.M.S.によって求めた相対強度分布と比較したのが図 13, 14 である。これより、放射エネルギーの透過率の傾きから求めた球表面での放射エネルギーの入射強度分布と D.M.S.による結果が、比較的良好に一致していることが示されている。ここで、 $r=0$ が球の正面中央部 (図 10 の A)， $r=R$ が球の側面 (図 10 の B) である。また、縦軸は球への平均入射強度で無次元化した入射強度を表す。これらの図より、充てん率および球の放射率にかかわらず、各球表面での入射放射エネルギーの強度分布は、図 10 に示すような充てん層中での平均的な強度の減衰効果を考慮すれば十分推定できることがわかった。

したがって、連続体近似法により充てん層中の放射エネルギーの透過解析を行うためには、まずセルモデルによる減衰係数 [式(3)] と前述の独立散乱位相関数を用いて連続体近似法による透過解析を行い、ここで求められた充てん層中での透過率の減衰曲線を用いて、図 10 のようにして球表面への入射放射エネルギーの相対強度分布を求め、このような入射があったときの球の散乱位相関数を求める (以下これを非独立散乱位相関数と称する)。この散乱位相関数としては、モンテカルロ法により多数のエネルギー粒子を上記の入射強度分布にしたがって球の表面に入射させ、球の表面性状 (鏡面反射あるいは拡散反射) に応じて各粒子の散乱方向を決めることにより、球の周方向の散乱放射エネルギー強度分布を求め、これを最小二乗法で多項式近似したものを用いる。最後にこれと式(3)の減衰係数を用いることで、連続体近似法によって充てん

図 13 減衰効果による入射強度分布の非一様性

図 14 減衰効果による入射強度分布の非一様性

図 15 透過率に及ぼす散乱位相関数の影響

層での放射エネルギーの透過特性を求めることができる。

図 15 には、セルモデルから求めた減衰係数と、図 14 に示したような入射強度分布に対する非独立散乱位相関数を用いた、連続体近似法による充てん層の放射エネルギー透過率の解析結果を、D. M. S. による解析結果と比較して示す。これより、非独立散乱位相関数を用いた連続体近似法による解析結果が、前述の独立散乱位相関数を用いた解析結果より D. M. S. による結果により近づいていることがわかるが、D. M. S. による結果とはまだ若干の差がある。この原因は、ここで用いられた散乱位相関数が、球に入射する放射エネルギーのうち、平均透過方向の成分を持つものに対して求めた散乱位相関数であるためではないかと考えた。すなわち、図 15 で用いられた散乱位相関数は、図 16 の A の方向（放射エネルギー平均透過方向）に球に入射した放射エネルギーに対する散乱位相関数であり、充てん層中で散乱されて球の横方向から入射する成分 B および入射面に向かって戻っていく成分 C に対しては、図 16 に示すように放射エネルギーの入射方向によって入射強度分布が変化してくるため、散乱位相関数も入射方向に応じて変化させる必要があると考えられる。そこで、本報では球に入射する放射エネルギーの角度を図 16 の a, b, c の三つに分け、それぞれの角度で入射した放射エネルギーに対する散乱位相関数として図 16 中の A, B, C のものを用いた。A は上述と同じやり方で求めることができるが、B, C も球の表面上の各位置における放射エネルギーの透過強度を用いてその方向の入射強度分布を求め、A と同様にして多項式近似をした散乱位相関数として求めることができる。

図 17 はこのように入射方向によって変化する位相関数を用いた、連続体近似法による充てん層中での放射エネルギーの透過率の解析結果を示している。この図 17 よりセルモデルによる減衰係数と、放射エネ

図 16 入射角別の入射強度分布

ギーの減衰曲線から求めた方向性を考えた非独立散乱位相関数を用いることで、正しい透過率が求められることが確認された。

5. 結 言

充てん率の大きい充てん層の放射エネルギー透過を、連続体近似法により解析する場合に使用する減衰係数と散乱位相関数についての検討を行い、以下の結果を得た。

(1) 従来から用いられてきた連続減衰モデルによる減衰係数とセルモデルによる減衰係数の比較を行い、セルモデルから求められる減衰係数を妥当性を確認した。

(2) 充てん率が大きい充てん層で非独立散乱現象は、充てん層を形成している充てん球が有限の大きさを持っていると考えると、ほぼ説明できることを明らかにした。

(3) 従来の連続体近似法に含まれている減衰係数と散乱位相関数として、本研究で得られたセルモデルによる減衰係数と、放射エネルギーの減衰曲線から求めた方向性を考えた非独立散乱位相関数を用いることで、正しい透過率を求めることができ、広い充てん率範囲にわたって連続体近似法による放射エネルギー透過解析ができる。

本研究は平成元・2 年度文部省科学研究費一般研究 C (01550160) およびゼネラル石油研究奨励財団の助成を受けた。また、解析の一部は北海道大学大型計算機センターで行った。記して感謝の意を表す次第である。

図 17 非独立散乱位相関数を用いた連続体近似法による透過率解析結果

文 献

- (1) Siegel, R. and Howell, J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, (1972), 608, McGraw-Hill.
- (2) 工藤・ほか2名, 機論, 53-496, B (1987), 3737.
- (3) Brewster, M. Q. and Tien, C. L., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, 104-11 (1982), 573.
- (4) Viskanta, R., *Proc. 7th Int. Heat Transf. Conf.*, 1 (1982), 103.
- (5) Kamiuto, K. and Iwamoto, M., *JSME Int. J.*, 31-3 (1988), 544.
- (6) 上宇都, 第26回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1988), 193.
- (7) 工藤・ほか3名, 機論, 55-517, B (1989), 2819.
- (8) 工藤・ほか3名, 機論, 56-524, B (1990), 1148.
- (9) 工藤・ほか2名, 機論, 56-527, B (1990), 2098.
- (10) 工藤・ほか3名, 機論, 57-537, B (1991), 1867.
- (11) Tien, C. L., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, 110-2 (1988), 1230.
- (12) Yamada, Y., Cartigny, J. D. and Tien, C. L., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, 108-8 (1986), 614.
- (13) Chen, J. and Churchill, S. W., *AIChE J.*, 9-1 (1963), 35.