軸対称狭さく近傍の流れと壁面せん断応力*

山口 隆 平^{*1}, 渋谷 伸 実^{*2}
菊池 和 重^{*3}, 松沢 照 男^{*4}

Wall Shear Stress around Axisymmetric Stenosis in Steady Flow

Ryuhei YAMAGUCHI, Nobumi SHIBUTANI,
Kazushige KIKUCHI and Teruo MATSUZAWA

The flow situation, particularly the wall shear stress, in the developing process of the occlusion in an arterial wall has been studied using an experimental electrochemical method in the range of laminar flow. The configuration of stenosis is symmetric and is expressed by a cosine curve. In the experiment, four stenosis ratios are employed, i. e., $\delta/R=0.1, 0.2, 0.3$ and 0.5 , where δ and R are the height of the stenosis and the radius of the upstream straight tube, respectively. The length of the stenosis is the same as the diameter of the upstream straight tube. Also, this flow has been analysed by a finite-element method. The wall shear stress steeply increases at a point just upstream of the narrowest constriction. Just downstream, the wall shear stress suddenly decreases and is minimum at a point downstream of the stenosis. In the case of severe stenosis, the wall shear stress becomes negative, and the flow finally separates at a point downstream of the stenosis. Therefore, the wall shear stress sharply changes around the stenosis. The experimental results agree with the numerical ones.

Key Words: Pipe Flow, Axisymmetric Flow, Viscous Flow, Finite-Element Method, Stenosis, Wall Shear Stress, Electrochemical Method, Biological Engineering

1. 緒 論

流路の一部が狭まった流れは、オリフィス流量計などに代表されるように工学的にも重要な問題である。生体内の血管の一部が狭まると、血液の流れは大きく変化する。近年、血管壁に生じる病理学的異変が血管内の血液の流れと密接に関連することが指摘されている⁽¹⁾。なかでも、血管壁に生じた狭さくが動脈硬化性病変の発生・促進に大きく関与するとされ、工学・医学両面からその解明が試みられている。その因子として、血液と血管壁との間の大きな壁面せん断応力による傷害とする説⁽²⁾と、小さな壁面せん断応力の領域ではせん断速度依存物質伝達の低下と初期アテローム分布との間に相関があるとする説⁽³⁾とがある。

狭さく流に関しては、数多くの報告がなされている。定常流については、Lee-Fung⁽⁴⁾、Deshpandeら⁽⁵⁾、Kawaiら⁽⁶⁾が、脈動流については川口・浜野⁽⁷⁾、Yamaguchi⁽⁸⁾が数値解析している。Young-Tsai⁽⁹⁾は

軸対称狭さく部での圧力損失の測定と壁面せん断応力分布を近似解析し、Azuma-Fukushima⁽¹⁰⁾は軸対称および非対称狭さく回りの流れを可視化により検討している。最近では、二次元狭さく、非対称狭さく流れの壁面せん断応力分布の限界電流法による測定例が報告されている⁽⁸⁾⁽¹¹⁾。

このように、比較的絞りの緩い軸対称狭さく流の数値解析は数多くなされている。また、軸対称および非対称狭さく流れの可視化や二、三の限界電流法による壁面せん断応力の測定例も示されている。しかしながら、軸対称狭さく流壁面せん断応力の実験的検証は少なく、さらにきつい絞りの軸対称狭さく流の実験や解析はなされていない。

本報では、血管病変の進展に伴う血管閉そく過程における流れ構造を検討するため、軸対称狭さく管を通る定常層流を対象とする。余弦曲線で近似される狭さく形状を持ち、狭さく部長さが直管部直径と同一であり、絞り径の異なる狭さくを取り上げる。このとき、臨界レイノルズ数以下の狭さく回りの壁面せん断応力分布を限界電流法により測定し、狭さく部における壁面せん断応力の変化を検討する。また、測定された壁面せん断応力分布を有限要素法による結果と比較検討するとともに、流れ模様を検討する。

* 原稿受付 平成3年4月2日。

^{*1} 正員、芝浦工業大学工学部 (〒108 東京都港区芝浦3-9-14)。^{*2} 芝浦工業大学大学院。^{*3} 正員、カヤバ工業(株)技術研究所 (〒228 相模原市麻溝台1805-1)。^{*4} 正員、北陸先端科学技術大学院大学 (〒920 金沢市幸町12-1)。

おもな記号の説明

D : 直管直径 (代表長さ) (=24 mm)

R : 直管半径 $= D/2 (=12 \text{ mm})$

Re : レイノルズ数 $= UD/\nu$

U : 直管断面平均速度

V_s : 電圧掃引速度

z : 軸方向座標

δ : 狭さく高さ

μ : 流体の粘度

ν : 流体の動粘度

τ_w : 壁面せん断応力 $= \tau_w^* D / (4\mu U)$

τ_w^* : 有次元壁面せん断応力 $= \mu(\partial q / \partial n)_{\text{wall}}$

$(\partial q / \partial n)_{\text{wall}}$: 壁に平行な速度 q の壁上における法線方向 n の速度こう配

2. 実験装置および方法

2.1 流路概略 実験で使用した流路概略を、図1に示す。作動流体は液位を一定に保ったヘッドタンクから、水平に設置された供試狭さく流路を通り、液温を一定 (設定温度 $\pm 0.1^\circ\text{C}$) に保ったリザーバ1へ戻る。電解液は、空気中の酸素により劣化するので、リザーバ1内に窒素ガスを連続注入して不活性化する。供試狭さく入口で十分発達した流れになるように、狭さく部の前に220 cmの助走長さを設けてある。

狭さく部構造と電極の配置を、それぞれ図2の上半部と下半部に示す。座標系と電気回路を、図3に示す。対象としたモデルは、狭さく長さ L が直管直径 D と同じ軸対称狭さく管である。直管の直径 D は24 mm、狭さく比 δ/R は0.1, 0.2, 0.3および0.5の4種類である。したがって面積比は、0.81, 0.64, 0.49および0.25となる。次式の余弦曲線で近似される形状を持つ供試狭さく管を用いる。

$$r(z)/R = 1 - \{\delta/(2R)\} \{\cos(\pi z/R) + 1\} \quad (-R \leq z \leq R) \quad (1)$$

この狭さく近傍の四分断面上に直径0.5 mmの測定用白金電極を各34本埋め込んでいる。測定では、このうち1列を使用した。狭さくの頂点を流れの原点 O とし、軸方向に z 軸をとると、測定電極は $z = -50$ から190 mmの範囲に3-10 mm間隔で埋め込んでいる。各電極の中、基準となる電極は以下のとおりである。上流直管部から狭さく部の始まりである E_8 、狭さくの頂点である E_{12} 、狭さく部終わりの E_{16} である。

2.2 実験方法 作動流体は、赤血塩 $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ と黄血塩 $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$ の等モル濃度0.01 mol/lの溶液、および支持電解質として濃度1 mol/lの水酸化カ

リウム KOH から成る混合電解液を用いる。

狭さくから上流約100 mmの位置に、管の中心に流れ方向と平行に取付けた注射針から染料を注入し、各狭さくにおける臨界レイノルズ数を調査した。対象とする流れは狭さく比 δ/R にもよるが、各狭さく流の臨界レイノルズ数以下の $Re = 100$ から1400とする。

壁面せん断応力の測定では、上記の酸化還元系の電解液を用い、ポテンシオスタットにより測定電極と対極 (直径0.5 mm、長さ10 cmの白金線) との間に一定電圧をかける。そのとき流れる電流 i の三乗が壁面せん断応力 τ_w^* に比例するところの電気化学的な限界電流法により測定する⁽⁸⁾⁽¹²⁾。

2.3 電極面積測定 狭さく部に埋め込まれた電極は、管軸に垂直に埋め込んでいる。したがって、狭さ

図1 流路概略図

図2 狭さく形状および電極配置

図3 座標および電気回路

く部の余弦曲面上に埋め込まれた電極形状は円形ではなく、短径が元の白金線径 0.5 mm であるが、長径が流れ方向に拡大した円形となる。とくに、狭さく比 $\delta/R=0.3, 0.5$ では、狭さく近傍と直管部に埋め込んだ電極の表面積とは明らかに異なることが観察される。この狭さく頂点近傍に埋め込まれた円形電極面積を理論的に求めることは可能であるが、正確に供試管軸に直交する電極埋込み用の微小径穴(直径 0.8 mm)を開けることは難しい。したがって、狭さく頂点近傍に埋め込まれた電極面形状は厳密な円形から多少変形していると考えられる。そこで、本報ではこれらの電極面積を電気化学的な直線電位走査法により求める⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。

対象とした電極は、参考のための直管部における電極と、狭さく近傍の電極とである。これらは、狭さく頂点から上・下流方向にそれぞれ 3, 6 mm および 9 mm の電極である。

流路内の電解液を静止した状態で、電極間電圧を 800 mV から -200 mV まで変化させたとき、狭さく頂点上流 6 mm の電極 E_{10} で得られた電流変化の一例を、図 4 に示す。ここで、電圧掃引速度 V_s は 50, 70, 100 mV/s の 3 種類とした。一般に、ピークの電流値 i_p は次式で表される⁽¹³⁾。

$$i_p = (kn^{3/2} D^{1/2} \theta_{\infty}) A V_s^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 k : 定数、 n : 電子のモル数、 D : 電解液の拡散係数、 θ_{∞} : 電解液濃度、 A : 電極面積である。同一電解液中では k, n, D, θ_{∞} は一定である。したがって、電流 i_p は A と $V_s^{1/2}$ の積に比例する。

V_s = 一定であれば、各電極に対して電流 i_p は電極面積 A に比例する。そこで、直管部に埋め込まれた既知面積 A の電極と電流 i_p の関係をもとに、任意の電極面積が算出できる。その一例を図 5 に示す。その結

果、 $\delta/R=0.5$ の場合、狭さく頂点から 3, 6, 9 mm の上流位置にある電極 E_{11}, E_{10}, E_9 の面積は、直管部における電極 E_2 の面積のそれぞれ 1.09, 1.32, 1.06 倍となった(ただし、 E_{12} は狭さく頂点に埋め込まれた電極で、直管部の電極とほぼ同面積である)。 $\delta/R=0.3$ の場合には、それぞれ 1.05, 1.17, 1.04 倍となった。 $\delta/R=0.2, 0.1$ の狭さく近傍の電極面積は、直管に埋め込んだ電極とほとんど差異は認められなかった。なお、狭さく頂点から下流へ 3, 6, 9 mm にある電極 E_{13}, E_{14}, E_{15} の面積は、上流の対称な位置の電極面積と同一とした。

これらの電極形状は、短径が元の白金線径 0.5 mm であり、長径がこの面積比だけ主流方向に拡張した円形と考えられる。この円形電極で得られた電流値 i をその面積比の 2/3 乗で除すれば、直管部での既知の電極で得られた検定結果をもとに、壁面せん断応力が得られる。

3. 数 値 解 析

図 3 のような軸対称狭さく部を通るニュートン流体を仮定する。基礎式は軸対称 Navier-Stokes 方程式と連続の式である。

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 u, v, p はそれぞれ軸方向、半径方向速度、圧力であり、 ρ は流体の密度である。計算領域の要素分割を、図 6 に示す。計算領域は $-15 \leq z/R \leq 50$ 、全計算

図 4 電流-電位曲線 (E_{10})

図 5 ピーク電流と電極面積の関係 ($V_s=70$ mV/s)

領域を1440個のく形型の有限要素に分割し、一つの有限要素内で速度は二次の多項式 N_i 、圧力は一次の多項式 L_i で近似した。この要素内の任意点の速度と圧力は次式で与えられる。

$$u = \sum_{i=1}^9 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^9 N_i v_i, \quad p = \sum_{i=1}^4 L_i p_i \cdots \cdots (6)$$

u_i, v_i, p_i は、速度と圧力の節点での値である。このような近似をすると、全計算領域で速度の節点数は6025、圧力の節点数は1573となる。これらの近似式を基礎式(3)～(5)に代入し、Galerkin法⁽¹⁵⁾によって、離散化した代数方程式を得た。

境界条件は、壁上でNo-slipの条件より $u=v=0$ 、モデルの入口端でポアズイユ流れ速度分布、出口端で軸方向の速度変化がないとし $\partial u/\partial x=0, \partial v/\partial x=0$ とした。非線形計算は、Newton-Raphson法によった。壁面せん断応力 τ_w の算出では、壁面上にある1有限要素内9点の速度を用いて内挿し、法線方向の速度こう配より求めた。

4. 結果および考察

あらかじめ染料を用いた可視化により、各狭さくにおける臨界レイノルズ数を調査した。狭さく比 $\delta/R=0.2, 0.3, 0.5$ の場合、臨界レイノルズ数はそれぞれ $Re_c=1350, 720, 370$ である。なお、 $\delta/R=0.1$ では、本装置のレイノルズ数の上限値1800まで層流であった。本実験の臨界レイノルズ数は、Azuma-Fukushima⁽¹⁰⁾ の値より若干小さい。これは、染料注入の注射針を狭さくの100mm上流に取付けたための影響と考えられる。

4・1 狭さく回りの壁面せん断応力 狭さく比 $\delta/R=0.1, 0.3, 0.5$ の場合、臨界レイノルズ数以下の狭さく回りの壁面せん断応力分布を、図7(a)～(c)に示す。図7の縦軸は、十分上流のポアズイユ流れの壁面せん断応力を2.0として無次元化してある。図7中の実線は、実験結果を結んだものである。

絞りの緩い $\delta/R=0.1$ の場合、狭さくに近づくにつれて壁面せん断応力 τ_w は徐々に増加し、狭さく頂点直前 ($z/R=-0.25$) で最大値となる。狭さく直後で最

小値となるが、この狭さく比の場合には τ_w は負の値とはならない。したがって、この狭さく流の場合には、狭さく後部にはく離流は発生しない。

(a) $\delta/R=0.1$

(b) $\delta/R=0.3$

(c) $\delta/R=0.5$

図6 要素分割図 ($\delta/R=0.5$)

図7 狭さく回りの壁面せん断応力分布

$\delta/R=0.3$ の場合, 狭さく頂点に近づくとき τ_w は急激に増加し, 狭さく頂点直前 ($z/R=-0.25$) で大きな最大値をとる。狭さく直後では, τ_w は急速に減少し, $0.5 \leq z/R \leq 5$ の範囲で負の値となり, 狭さく後部にはく離流が発生する。

最もきつい絞り $\delta/R=0.5$ の場合, 狭さく直前 ($z/R=-0.25$) で壁面せん断応力は大変大きな最大値をとる。狭さく直後では, 急激に減少し, 十分上流の値 2.0 よりもその絶対値が大きな負の極小値 (最小値) となる。その後, いったん増加したあと緩やかに減少し二つめの極小値を示す。その後, 徐々に増加し下流の十分発達した壁面せん断応力値 2.0 に漸近する。このように, 絞りのきつい場合には, 狭さく直後のく離領域内で壁面せん断応力は一つの負の極大値と二つの負の極小値をとる。とくに, 狭さく直後では急激に減少し, 絶対値の大きな負の最小値となる。 $0.5 \leq z/R \leq 15$ の範囲では, く離流が生じる。

以上の結果, および $\delta/R=0.2$ について, 狭さくのごく近傍の壁面せん断応力分布を, 図 8 に示す。ただし, 図 8 中の実線は実験結果を結んだものである。狭さくの直前直後では, きつい絞りの狭さくほどその変化が激しいことが示される。とくに, きつい絞りの狭さくと緩い場合とでは, 狭さく直後の壁面せん断応力の変化に著しい違いがある。これらの傾向は, レイノルズ数の大なるほど著しい。狭さく直前で壁面せん断応力が最大となる位置は, 狭さく比およびレイノルズ数 Re に関係せず, ほぼ $z/R=-0.25$ である。

図 8 狭さくのごく近傍の壁面せん断応力分布

4.2 狭さく直径の変化と壁面せん断応力 血管の閉そく過程における流れ構造を検討するため, レイノルズ数 (流量) 一定の場合, 狭さく直径の減少に対する壁面せん断応力の変化を, 図 9 (a), (b) に示す。実線は数値解析結果である。

レイノルズ数 $Re=300$ の場合, 狭さくの閉そく進行過程での τ_w は, 狭さく直径の減少 (狭さく比 δ/R の増加) とともに変化が大きくなる。狭さく直前, 直後の壁面せん断応力の変化 (最大値と最小値との差) $\Delta\tau_w$ は, $\delta/R=0.1$ のとき 2.0 であるが, $\delta/R=0.2, 0.3, 0.5$

(a) $Re=300$

(b) $Re=715$

図 9 狭さく部における壁面せん断応力分布

図 10 狭さく回りのフローパターン
($Re=300$, $\delta/R=0.5$)

と狭まるにつれて、 $\Delta\tau_w=8, 13$ そして 56 と急激に増大する。同様に、 $Re=715$ の場合、 $\delta/R=0.1, 0.2, 0.3$ と狭まるにつれて、 $\Delta\tau_w=3, 13$ そして 20 と増加する。なお、 $\delta/R=0.5$ の場合、臨界レイノルズ数が $Re_c=370$ であるため、図 9 (b) には記されていない。このように、狭さく前後の壁面せん断応力の変化は、レイノルズ数が大きく、狭さく比の大なるほど顕著となる。

狭さく部の直径と同一径の直管を同じ流量が流れた場合、 $2(R-\delta)=21.6, 19.2, 16.8$ mm および 12 mm (それぞれ、 $\delta/R=0.1, 0.2, 0.3$ および 0.5 に対応する) では壁面せん断応力 τ_w は、それぞれ 2.7, 3.9, 5.8 および 16 となる。一方、狭さく直前の壁面せん断応力の最大値は、これらの値より大きく、 δ/R の大なるほど顕著である。したがって、狭さく直前の壁面せん断応力の最大値は、管路径の減少の影響を上回る増加につながる事が示される。

4・3 数値解析 図 9 の実線は、有限要素法により求めた計算結果である。壁面せん断応力の測定結果と、計算結果の極大・極小値や再付着点位置は、おおむね良く一致している。しかしながら、計算で得られた狭さく直前・直後の最大・最小値の絶対値は、実験値より若干大きい。この差異は、狭さく頂点近傍での要素分割数が若干不足していること、測定位置の z 方向の電極長さが管半径 R の 6% 程度になり、測定値はこの長さの平均値となることによるためと考える。

$Re=300$, $\delta/R=0.5$ の場合、狭さく回りのフローパターンを、図 10 に示す。壁面に近い流線は、狭さくに近づくとき壁面に近寄り、 $z/R=-0.10$ 付近で最も接近する。この位置は測定された壁面せん断応力が最も大きくなる位置 $z/R=-0.25$ とほぼ同じ程度である。また、狭さく頂点を通過後 $z/R=0.2$ 付近ではく離が生じ、この位置の下流で壁面せん断応力は負の値となる。

5. 結 論

本研究では、軸対称狭さく回りの流れ構造を壁面せ

ん断応力分布から検討した。余弦曲線で近似される狭さくを用い、狭さく長さは直管の直径と同一とし、狭さく比 δ/R は 0.1, 0.2, 0.3, 0.5 の 4 種類とした。対象とした流れは臨界レイノルズ数以下とした。

(1) 壁面せん断応力は、狭さく比 δ/R に関係なく、狭さく頂点の直前 ($z/R \approx -0.25$) で最大値をとる。狭さく頂点の下流 ($0.5 \leq z/R \leq 1.0$) で最小値をとる。この最大値は、狭さく部直径と同一径の直管内を同じ流量が流れた場合の壁面せん断応力と比較してもより大きくなる。

(2) 狭さく直後では、壁面せん断応力は最小となり、絞りの緩い狭さくでは小さな正の値であるが、きつい絞り $\delta/R=0.5$ の狭さくではその絶対値が上流の値より大きな負の最小値をとり、はく離が発生する。また、このきつい絞りの場合には、狭さく直後で二つの負の極小値と一つの負の極大値をとる。

(3) 狭さく直前直後の壁面せん断応力の変化 (最大値と最小値の差) $\Delta\tau_w$ は、狭さく比 δ/R が大きく、レイノルズ数が大きいほど著しい。

文 献

- (1) Lighthill, M. J., *J. Fluid Mech.*, **52** (1972), 475-497.
- (2) Fry, D. L., *Cir. Res.*, **22** (1968), 165-167.
- (3) Caro, C. G., ほか 2 名, *Proc. R. Soc., London, Ser. B*, **177** (1971), 109-159.
- (4) Lee, J. S. and Fung, Y. C., *Trans. ASME, Ser. E*, **37-1** (1970-3), 9-16.
- (5) Deshpande, M. D., ほか 2 名, *J. Biomech.*, **9** (1976), 165-174.
- (6) Kawai, H., ほか 2 名, *Role of Blood Flow in Atherogenesis*, (1987), 131-137, Springer-Verlag.
- (7) 川口・浜野, 非ニュートン流体力学シンポジウム講演論文集, (1975), 102-108, 東大宇宙研.
- (8) Yamaguchi, R., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **111-1** (1989), 47-54.
- (9) Young, D. F. and Tsai, F. Y., *J. Biomech.*, **6-4** (1973), 395-410.
- (10) Azuma, T. and Fukushima, T., *Biorheology*, **13** (1976), 337-355.
- (11) Yamaguchi, T. and Hanai, S., *Role of Blood Flow in Atherogenesis*, (1987), 109-116, Springer-Verlag.
- (12) Mizushima, T., *Advances in Heat Transfer*, **7** (1971), 87-161, Academic Press.
- (13) Lutz, R. J., ほか 2 名, *AIChE J.*, **28-6** (1982), 1027-1029.
- (14) 藤島・ほか 2 名, 電気化学測定法, (1983), 150, 技報堂.
- (15) Chung, T. J., *Finite Element Analysis on Fluid Dynamics*, (1978), McGraw-Hill.