うず電流とゲージ変換*

棚橋 隆彦*¹ 木倉宏成*²

Eddy Current and Gauge Transformation

Takahiko TANAHASHI and Hiroshige KIKURA

Eddy current in moving liquid metals due to electromagnetic induction is similar to vortex motion in viscous fluids. For the analysis of such an eddy current, we must solve simultaneously the Maxwell and Navier-Stokes equations. Scalar and vector potentials are usually introduced for the magnetic field. In the present paper, the clear relationship between gauge transformation and the fundamental equation is theoretically discussed in order to delete ambiguity of the condition on the Stokes potentials. The similarity law of the vector potential of eddy current to the rotational form of the Navier-Stokes equations is also obtained.

Key Words : Eddy Current, Gauge Transformation, Advection Diffusion Equation, Similarity Law, Navier-Stokes Equation

1. 緒 言

現在、電気工学や熔融金属工学の分野で“3次元場のうず電流の解析”が1つのトピックスとして取り上げられている。そして、うず電流を解析するときの定式化にもいろいろある。その際、基礎となる Maxwell の方程式の近似の仕方とゲージ変換の取扱いが不明瞭であるように思われる。ここでは、その点を明らかにしたい。

2. Maxwell の方程式と近似構成方程式

うず電流の解析もその出発点は表1に示された巨視的 Maxwell の方程式に基礎を置くべきである。

磁場に対する Gauss の法則と Faraday の電磁場の法則より、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラー・ポテンシャル φ が導入され、磁束密度 $\mathbf{B}$ と電場 $\mathbf{E}$ は表2のように表される。

そして、基本的には電場の Gauss の法則よりスカラー・ポテンシャル φ に関する方程式(波動方程式、拡散方程式、Poisson 方程式、Laplace 方程式)が、修正 Ampere の法則よりベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に関する方程式(波動方程式、拡散方程式、Poisson 方程式、Laplace 方程式)がそれぞれ導かれる(表3参照)。場が非定常な

場合は φ と $\mathbf{A}$ は独立でなく連立する。場が定常な場合には φ と $\mathbf{A}$ は独立となり、電場と磁場が分離できる。

仮定1 近似構成方程式: うず電流を問題とする導体や熔融金属に対して、表4に示された近似構成方程式が成立するものとする。そして、理論の手順を明確にするため、透磁率 μ および誘電率 ϵ は一定であると仮定する。

3. Ohm の法則

Ohm の法則は表5に示されるように静止導体と運動する導体で同じ表示を持つ。表5中の*印は動座標系

表1 巨視的 Maxwell の方程式

Ampere's law	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Gauss' law	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Gauss' law	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
Faraday's law	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

表2 ベクトル・ポテンシャルとスカラー・ポテンシャル

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

* 原稿受付 平成2年12月25日。

^{*1} 正員、慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 正員、慶應義塾大学大学院。

表3 スカラ・ポテンシャルおよびベクトルポテンシャルの方程式

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	→ Equation of Scalar Potential φ
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	→ Equation of Vector Potential $\mathbf{A}$

表4 近似構成方程式 表5 Ohmの法則

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	Stationary	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	Moving	$\mathbf{j}^* = \epsilon \mathbf{E}^*$

での物理量を表している。すなわち、 $\mathbf{j}^* = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ である。運動する導体中に電荷がない場合は電荷密度 $\rho=0$ であり、Ohmの法則は

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

となる。さらに導体が静止すれば $\mathbf{v} = 0$ となる。ここでは、電気伝導度 σ も導体内で一定であると仮定する。 μ, ϵ, σ 等の物質定数は一般に温度と密度の関数で場所の関数となる。すなわち

$$\mu = \mu(\rho, T), \quad \epsilon = \epsilon(\rho, T), \quad \sigma = \sigma(\rho, T) \quad (2)$$

となる。うず電流を解析する基礎方程式は以上すべてである。以上の方程式系を用いてうず電流を解析する。

4. Lorentz ゲージ

電荷が加速度運動するとき、電場と磁場は相互作用し、切り離すことはできない。それは、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラ・ポテンシャル φ が独立ではなく、Lorentz ゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

によって結ばれているからである。ここで、 $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ は光速である。Lorentz ゲージを用いると、電場に対する Gauss の法則

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4)$$

より、スカラ・ポテンシャル φ に対する波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (5)$$

が導ける。同様にして、磁場に対する修正 Ampere の法則

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (6)$$

表6 Lorentz ゲージと波動方程式(動電磁場)

Lorentz Gauge	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
Wave Equation	$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$
	$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}$

表7 Coulomb ゲージと Poisson 方程式(静電磁場)

Coulomb Gauge	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
Poisson Equation	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$
	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$

より、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に対する波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} \quad (7)$$

が導ける(表6参照)。ここで、電荷 ρ と電流 $\mathbf{j}$ は波動方程式のソース項である。この波動方程式の基本解は遅延ポテンシャル(Lienard-Wiechertのポテンシャル)で

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V_\infty} \frac{[\rho]}{r} dV(\xi) \quad ; [\rho] = \rho(\xi, \tau), \tau = t - \frac{r}{c} \quad (8)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{[\mathbf{j}]}{r} dV(\xi) \quad ; [\mathbf{j}] = \mathbf{j}(\xi, \tau), \tau = t - \frac{r}{c} \quad (9)$$

と与えられる⁽¹⁾。ここで、 $r = |\mathbf{x} - \xi|$ である。

うず電流の解析にこの解を利用することはきわめて高精度であるが、あまりにも複雑すぎる。

5. Coulomb ゲージ

静電場では $\partial \mathbf{A} / \partial t$ は零になる。よって電場はスカラ・ポテンシャル φ のみで、磁場はベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ のみで記述でき、電場と磁場は完全分離できる。この場合、ベクトル・ポテンシャルに Coulomb ゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (10)$$

が適用できる。そして、スカラ・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルは Poisson の方程式

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad (12)$$

を満足する(表7参照)。この Poisson の方程式の基本解は Stokes のポテンシャル

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V_\infty} \frac{\rho}{r} dV(\xi) \quad ; \rho = \rho(\xi) \quad (13)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\mathbf{j}}{r} dV(\xi) \quad ; \mathbf{j} = \mathbf{j}(\xi) \quad (14)$$

で与えられる。静磁場においてうず電流は発生しないから、この定式化はうず電流の解析に役立たない。

6. 導体ゲージ (A)

うず電流の発生は磁束の時間的変化 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ に起因するから、磁場が非定常に変化することが本質的である。そこで、いま導体ゲージと呼ばれる関係式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

を導入する。このゲージを採用すると、Ohm の法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (16)$$

と修正 Ampere の法則

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (17)$$

より、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に関する減衰波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (18)$$

が導ける⁽²⁾。この方程式はソース項の電流 $\mathbf{j}$ も方程式の中に含まれているのが特長である。同様に電場に対する Gauss の法則

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (19)$$

より、電荷密度 $\rho = 0$ のとき、スカラ・ポテンシャル φ に関する減衰波動方程式

$$\nabla^2 \varphi = \sigma \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (20)$$

が導ける (表 8 参照)。これらの減衰波動方程式を解いて、うず電流を求めることができる。Lorenz ゲージは真空中の電磁波を取り扱う場合に適している。なぜなら方程式の中に減衰項が表れないからである。それに比較して、導体ゲージは導体中の波動の減衰も表示できる特長を持っている。そして、ゲージの取り方によって方程式の形が大きく変わることには注意したい。

7. 導体ゲージ (B)

導体に対して、一般につきの 2 つの仮定が成立する。

仮定 2 変位電流の無視：うず電流が問題になるのは導体中である。導体は良導体で電気伝導度 σ は大き

表 8 導体ゲージ (A) と減衰波動方程式 ($\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$)

Gauge (A)	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
Damped Wave Eq.	$\nabla^2 \varphi = \sigma \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$
	$\nabla^2 \mathbf{A} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$

な値を持つ。したがって、伝導電流に比較して変位電流は無視できる。すなわち、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ とすれば

$$\frac{\partial \mathbf{D} / \partial t}{\mathbf{j}} = \frac{\varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t}{\sigma \mathbf{E}} = \frac{\varepsilon \omega}{\sigma} \ll 1 \quad (21)$$

となる。普通の導体に対して $\varepsilon / \sigma = 10^{-18} \text{sec}$ ぐらいであるから、 $\omega \ll 10^{18} \text{sec}$ 以下ならば変位電流を無視することができる。

仮定 3 電荷密度は零：静止導体内部には電荷は存在しない。したがって初期に電荷がなければ、電荷保存則により、うず電流が存在しても真電荷は存在しない。

以後の理論ではこれらの仮定が成立する場合を考える。伝導電流に比較して変位電流が無視できる近似理論を準定常電流の理論という。準定常電流の理論においては電荷保存則は

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{なぜなら } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}) \quad (22)$$

となり、波動方程式は拡散方程式に帰着する (表 9 参照)。準定常電流の理論においては導体ゲージ (B)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \varphi = 0 \quad (23)$$

を採用する。このとき Ampere の法則より、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に関する拡散方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (24)$$

が導ける。同様に電場の Gauss の法則より、スカラ・ポテンシャル φ に関する拡散方程式

$$\nabla^2 \varphi = \sigma \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (25)$$

が導ける。よってこの連立拡散方程式を解くことによりうず電流が解析される (表 10 参照)。すなわち、うず電流は変位電流無視のもとに波動性は失われる。うず電流はソース項がない限り速やかに拡散してしまう。

表 9 波動方程式と拡散方程式

Unsteady theory	$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$	Wave Equation
Semisteady Theory	$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$	Diffusion Equation

表 10 導体ゲージ (B) と拡散方程式 ($\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$)

Gauge (B)	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \varphi = 0$
Diffusion Eq.	$\nabla^2 \varphi = \sigma \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$
	$\nabla^2 \mathbf{A} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

表 11 うず電流に関する積分方程式

Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
$\mathbf{j} + \frac{\sigma\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} dV(\boldsymbol{\xi}) = -\sigma \nabla \varphi$
$\nabla^2 \varphi = 0$

9. うず電流の積分方程式

変位電流が無視できる場合, Ampere の法則

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} \quad (26)$$

に Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を適用すると, ベクトル・ポテンシャルは Poisson の方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad (27)$$

を満足することになる. この方程式の解は $\mu = \text{一定}$ とすれば

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t)}{r} dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (28)$$

で与えられる. 静磁場の解との違いは, 電流が非定常でもこの解は成立することである. また波動性がないため, 解は遅延ポテンシャルではなく, Stokes のポテンシャルとなる. 積分領域は電流の分布する全領域である. 図 1 のように印加電流の分布領域とうず電流の分布領域が分かれている場合には, それぞれの領域で積分される. 式 (28) を Ohm の法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (29)$$

に代入すると, うず電流に関する積分方程式

$$\mathbf{j} + \frac{\sigma\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} dV(\boldsymbol{\xi}) = -\sigma \nabla \varphi \quad (30)$$

が導ける⁽³⁾. ただし, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ よりスカラ・ポテンシャルは Laplace の方程式

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (31)$$

を満足する(表 11 参照). そして, 電流 $\mathbf{j}$ の境界条件が満足されるように, スカラ・ポテンシャル φ は決定される.

9. ゲージ変換と連立方程式の等価性

つぎにゲージ変換とスカラ・ポテンシャル φ とベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ の連立方程式の等価性について調べる. ただし, 変位電流は無視できるものとする. このとき, Ampere の法則と Ohm の法則より, ゲージ変換に無関係に, ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に対する拡散方程式

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (32)$$

図 1 電流分布領域の分割

表 12 変位電流が無視できる場合のうず電流に対する連立方程式(方程式系(I),(II),(III)は皆等価である.)

(I)	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$	No Gauge
	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}$	
(II)	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{A}$	Gauge(B)
	$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \varphi$	
(III)	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{A}$	Coulomb Gauge
	$\nabla^2 \varphi = 0$	

が導ける. ただし $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ であるから, φ と $\mathbf{A}$ は独立でなく, φ は Poisson の方程式

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} \quad (33)$$

を満足する. Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いれば, φ と $\mathbf{A}$ の連立方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{A} \quad (34)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (35)$$

となる. この方程式は導体が静止している限り, 全空間で成立する. 印加電流の条件は, 図 1 の印加電流の流れる断面積分で与えられる. すなわち, 面積分または線積分を用いて

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\sigma \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial A_n}{\partial t} \right) dS \quad (36) \\ &= \iint_S \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

と表せる. ただし, $C = \partial S$ である. 以上より, 変位電流が無視できる場合, 表 12 の 3 つの方程式は等価である. これらは, ゲージ変換に何を用いているかの差だけである. すなわち, ゲージ変換の選択によって, うず電流を支配する方程式は見かけ上大きく変わる.

表 13 動く導体に対するうず電流の方程式と Navier-Stokes の方程式

Eddy Current	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = -\nabla \varphi + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{A}$
	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
NS Equation	$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla H + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$
	$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla^2 H = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$

10. 運動する導体

磁場の中を導体が運動すると起電力が発生する。これに基づき誘起電圧を考慮に入れると Ohm の法則は $\mathbf{j}^* = \sigma \mathbf{E}^*$ と書ける。導体中に電荷がない場合、電荷密度 ρ は零であるから、この Ohm の法則は

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (37)$$

となる。これが運動する導体または電磁流体に対する Ohm の法則である。ここでも変位電流は無視できるものとする。そして、ゲージ変換として、Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いることにする。以上の仮定より、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に関する移流拡散方程式

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = -\nabla \varphi + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{A} \quad (38)$$

とスカラ・ポテンシャル φ に関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (39)$$

が導かれる。この Poisson 方程式は、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ または $\nabla \cdot \mathbf{E}^* = 0$ または $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ と同等である。そして、ベクトル・ポテンシャルの方程式は非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 方程式の回転形表示⁽⁴⁾

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla H + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (41)$$

と同等である(表 13 参照)。ここで、 H は Bernoulli 関数、 ν は動粘度である。すなわち、ベクトル・ポテンシャルの方程式において $\mathbf{A} = \mathbf{v}$, $\varphi = H$, $\frac{1}{\sigma \mu} = \nu$ と置けば回転表示の Navier-Stokes の方程式になる。そして、移流方程式の左辺はベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ の循環が流体と共に流れていくことを示している。すなわち、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ の循環の保存条件

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (42)$$

は

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = 0 \quad (43)$$

と同等である。ここで $C_m(t)$ は流体の流れと共に運動する任意の物質閉曲線である。さらに、ベクトル・ポ

表 14 誘導方程式とうず度輸送方程式

Induction Equation	$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Vorticity	$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$
Transport Equation	$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$

表 15 保存条件の等価性

$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$	$= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = 0$
$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{B} \cdot n dS = 0$	$= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0$

テンシャルに関する移流拡散方程式の両辺の回転をとり、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を用いると、磁束密度 $\mathbf{B}$ に関する誘導方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (\text{誘導方程式}) \quad (44)$$

これは、流体のうず運動に関するうず度の輸送拡散方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{うず度輸送方程式}) \quad (45)$$

と同等である(表 14 参照)。すなわち、 $\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}$, $\frac{1}{\sigma \mu} = \nu$ の対応関係にある。この場合、 $\sigma \mu \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (46)$$

となる。この条件は、磁束密度の流束が保存される条件

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{B} \cdot n dS = 0 \quad (47)$$

と同じである。ここで $S_m(t)$ は流体と共に流れていく物質検査面である。すなわち、磁束密度は流体に凍結されている。以上の結果を表 15 にまとめておく。

11. 検 討

一般に、電流密度 $\mathbf{j}$ は印加電流 $\mathbf{j}_0$ とうず電流 $\mathbf{j}_e$ の和からなる。そして、導体または熔融金属中を印加電流 $\mathbf{j}_0$ とうず電流 $\mathbf{j}_e$ が混在して流れる場合でも、基礎式(30),(32)および(38)は成立する。

しかし、印加電流 $\mathbf{j}_0$ の分布領域とうず電流 $\mathbf{j}_e$ の分布領域が異なり、 $\mathbf{j}_0 \gg \mathbf{j}_e$ の場合、次のような計算手法で近似解を得ることができる(図 1 参照)。

Step1. 印加電流 $\mathbf{j}_0$ を用いて場全体のスカラ・ポテンシャル φ とベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ を計算する。ここで、印加電流とはうず電流の影響を受けた計器の実測値を意味する。

表 16 いろいろなゲージ

Lorentz Gauge	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
Coulomb Gauge	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
Gauge(A)	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
Gauge(B) (Semisteady Theory)	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \varphi = 0$

表 17 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と方程式の形

$N_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	Diffusion Eq.
$\mathbf{v} \times \mathbf{B}$	Convective Diffusion Eq.

Step2. うず電流の分布領域に Ohm の法則を適用し、
導体が運動していない場合

$$\mathbf{j}_e = \sigma \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

よりうず電流を計算する.

実際には, うず電流 $\mathbf{j}_e$ によって生じるベクトル・ポテンシャルを付加しなければならないが, $\mathbf{j}_0 \gg \mathbf{j}_e$ の仮定よりそれは無視できるものとする.

この様な意味で, 式(32)を

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{j}_0 \quad (48)$$

と書くことがある⁽⁵⁾⁽⁶⁾. しかし, この表現は印加電流とうず電流が混在するときは成立しない. また, 熔融金属中に電荷が存在しないことより $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ が成立するとして基礎式(30)のスカラ・ポテンシャル φ を零として

$$\mathbf{j} + \frac{\sigma \mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} dV(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (49)$$

をうず電流の基礎式⁽⁷⁾としている例もある. しかし, これは近似である.

電気伝導度 σ と透磁率 μ は温度によってその値が大きく変わる. このとき, 式(38)および式(39)は

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = -\nabla \varphi + \frac{1}{\sigma} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) \quad (50)$$

$$\nabla \cdot \left\{ \sigma \left[\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right] \right\} = 0 \quad (51)$$

となる. さらに, 印加磁場 $\mathbf{B}_0$ が時間的に変動することによって生じるうず電流を求めるには, 誘導方程式(44)を用いるのがよい.

12. 結 論

導体中を流れるうず電流とゲージ変換に対して検討を行った結果, 次のことが明らかになった.

(1) Lorentz ゲージは真空中の電磁場を取り扱うのに適している. しかし, うず電流の解析には複雑すぎる.

(2) 変位電流を考慮すると, うず電流は減衰波動方程式によって支配される.

(3) 変位電流を無視すると, うず電流は拡散方程式によって支配される.

(4) 導体ゲージはうず電流のスカラ・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルを対称的に取り扱うのに適している.

(5) Coulomb ゲージは静電磁場の解析に適している. そして, 非定常なうず電流の解析に対しても Coulomb ゲージを用いることができる.

(6) ゲージ変換の取扱い方(表 16 参照)によって, うず電流を支配するスカラ・ポテンシャルの方程式とベクトル・ポテンシャルの方程式はいろいろな形に書ける.

(7) 導体が運動する場合は, うず電流の方程式は移流拡散方程式となる(表 17 参照).

(8) ゲージ変換 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いたとき, 運動する導体や電磁流体中のうず電流を支配する方程式は回転形の Navier-Stokes の方程式と同形である.

(9) ゲージ変換 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いたとき, 磁束密度を求める誘導方程式はうず度輸送拡散方程式と同形である.

(10) うず電流の解析には Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いた, 積分方程式(30)または, ベクトル・ポテンシャルの移流拡散方程式(38)または誘導方程式(44)を基礎方程式とするのがよい. 式(38)および式(44)を基礎方程式として用いる場合, 速度 $\mathbf{v}$ を決定するために, 導体の運動方程式または流体の運動方程式が必要となる.

なお, 本論文ではゲージ変換と電磁気学の構造を明かにするため, 多くの周知の事実も結論の中にまとめられている.

文 献

- (1) Jackson, J.D. Classical Electrodynamics, John Wiley (1962), 465.
- (2) 棚橋, 連続体の力学(4), 理工図書(1989), 36.
- (3) Moon, F.C., Magneto-Solid Mechanics, John Wiley (1984), 303.
- (4) 棚橋, 連続体の力学(2), 理工図書(1986), 89.
- (5) 河瀬・ほか 2 名, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J72-D-II, No2 (1989-2), 271.
- (6) 中田・高橋, 電気工学の有限要素法 第 2 版, 森北出版(1983).
- (7) Tarapore, E. and Evans, J.W. Metallurgical Trans. B Vol. 7B (1976), 343.