三角形格子による差分法の研究*

鯉 淵 弘 資^{*1}

Finite Difference Method on Triangulated Random Mesh

Hiroshi KOIBUCHI

Partial differential equations are discretized on a triangulated random mesh in two dimensions. As a first example to test our discretizations, a Laplace's equation with Dirichlet's boundary conditions on a square area is solved on two types of triangulated mesh. The results are compared with those of the regular square mesh. The second example is a discretization of Navier-Stokes equations for a standard cavity problem of incompressible viscous flow. For the region of low Reynolds number, the unsteady equations are iterated on two types of triangulated random mesh and a regular square mesh, as in the first example. Our tentative conclusion is that for many problems, our finite difference method on a triangulated random mesh can lead to the same results as those obtained by the use of a regular square mesh.

Key Words: Finite Difference Method, Grid Generation, Computational Fluid Dynamics, Triangulated Random Mesh, Two-Dimensional Cavity Flow, Laplace's Equation

1. 緒 言

差分法は偏微分方程式の数値解法のうちで最も基本的な方法の一つで、適用範囲が広く、数値流体力学などの分野でよく利用されている⁽¹⁾⁽²⁾。方程式の差分化のための領域の分割で通常行われるのは二次元の場合、正方形または長方形格子による分割である。このほか、境界の形状に合せた滑らかな曲線による四辺形格子分割も多く用いられている⁽³⁾。一方、有限要素法や境界要素法では三角形分割格子がよく使われるが、それは任意形状の領域に対し三角形分割が比較的容易に行えるという理由による。そこで本論文では同じ理由から三角形分割された格子上での差分法⁽⁴⁾を提案し考察する。ラプラス方程式およびナビエ・ストークス方程式に関する問題の解析を通し、本手法が差分法の一手法として通常の正方格子による差分法と並んで有用な方法となり得ることを確認する。

2. 三 角 形 格 子

二次元の領域を三角形によって格子分割する場合、

規則的な三角形による分割や乱雑な形の三角形による分割などいろいろの可能性があり、ここでは乱雑な分割を含むより一般的な分割法に対して著者らの差分法を試みるためにポロノイ多角形⁽⁵⁾による格子分割法を用いる。図1のようにある領域に適当な方法でばらまかれた格子点 $i, j, k, \dots$ から三角形格子を作る方法⁽⁶⁾を説明する。なお格子点の数は任意に設定でき、格子点間の距離なども後に述べるように制御可能である。

格子生成の手順

- (1) 点 i にいちばん近い点を探し点 j とする。
- (2) 点 i と点 j を結ぶリンク $i-j$ の垂直二等分線上に中心を持ち点 i, j を通る円を考える。初めに円の中心をリンク $i-j$ 上に置き、その円とリンク $i-j$ に囲

図 1 格子点の連結法

* 原稿受付 平成3年1月21日。

^{*1} 正員、茨城工業高等専門学校 (〒312 勝田市大字中根字深谷津 866)。

まれた一方の領域（例えば図1の点*k*側）に点があれば(2-1)の方法で、なければ(2-2)の方法で第3点を決めて点*k*とする。

(2-1) 複数個の点の中の一つの点と点*i, j*から成る三角形に対し、中心が*i-j*リンクの垂直二等分線上にある外接円を考え、その半径が最大となる点を探す。

(2-2) 円の中心をリンク*i-j*上から一方の方向に移動し、最初に円内に入ってくる点を探す。

(3) 点*k*を点*j*とみなして(2)の方法で新しい点*k*を探す。このことを点*k*がいちばん初めの点*j*と一致するまで繰返す。

(4) 点*i*を次の点に移動して(1)～(3)を繰返す。このことを領域のすべての点を対象にして行う。

基本的には上記の手順で格子点を連結して領域を三角形分割できるが、実は領域の境界上の点を中心とする連結は境界の外側に格子点がないためそのままでは上記手順が実行不能となる。そこで例えば領域の境界のすぐ外側に仮想点として内部と同等の密度で格子点を分布させておけば境界上の点でも連結される。

ここで正方形領域の三角形格子分割の二つの例をタイプA, Bとして図2に示す。これらは領域の格子点の分布の仕方が異なるだけで、格子点の連結法はいずれも上記の手順による。領域の外側の点は仮想点である。タイプAでは格子点は領域内に一様乱数を使ってばらまかれている。一つの格子点から出るリンクの数は格子点ごとに乱雑に異なる。三角形の面積、リンクの長さについても同様である。一様乱数を使っているから領域内の各格子点は他の格子点とは全く独立な位置に作られている。ただし、格子点作成時に二つの格子点間の距離に対して下限値を設けることにより三角形の面積、リンクの長さなど、ある程度均一にすることもできる。図2に示したタイプAの格子はある程度均一化して作ったものである。境界の一辺上の格子点の数はその内部の格子点の数あるいは全格子点数*N*に応じて変化させる。例えばその数を $\sqrt{N}$ とする。タイ

プBは一様な正方形分割格子に1本の斜線を入れたものと同等のものである。これは格子点を正方形格子と同じ位置に分布させることによって作られる。ここで注意しなければならないことであるが、実は格子点を正確に正規の位置に置いて前述の手順で連結させようとすると、ある点にいちばん近い点が唯一に定まらないことからこれが実行不可能となる。このことを避けるため、各格子点を正規の位置から適当な大きさの乱数で必ずずらすこととする。このずらしの大きさが零でなければ格子点の連結はうまくいく。なお、3章で述べる差分法は上記二つのタイプの三角形分割格子のみに限定されないことも注意しておく。

以上の格子はいずれも図3に示すような格子点*i*を中心とする基本格子から成っている。図3において、黒丸は格子点、実線はリンクを示す。破線は各リンクの垂直二等分線であり、中空丸はそれらの交点である。中空丸と破線から成る格子を黒丸と実線から成る格子に対してポロノイ格子または双対格子と呼ぶ。図4には図3の一部を拡大して、差分法に必要な幾何学的データを示す。 l_{ij} はリンク*i-j*の長さ、 d_{ij} はリンク*i-j*を垂直に二等分する双対格子のリンク*I-J*の長さを表す。点Pはリンク*I-J*の中点で、ベクトル $\frac{1}{2}\vec{k}_{ij}$ はリンク*i-j*とリンク*I-J*の交点から点Pに向かうベクトルである。また、点*i*を囲んでいる双対格子の面積を Ω_i と書くことにする。

図3 格子点と双対格子点

図4 各種の幾何学的データ

(a) タイプA

(b) タイプB

図2 三角形分割格子の例

3. 差分法

ここでは、2章で述べた三角形格子上の各格子点におけるスカラー関数 $\phi(x)=\phi(x,y)$ の一次導関数および二次導関数に関連した量を導くラプラシアンを表式などを求める。このためにまず次の基本関係式を与える⁽⁷⁾。

$$\phi_j = \phi_i + l_{ij}^\mu \partial_\mu \phi_i + O(l_{ij}^2) \quad (1)$$

$$\sum_j l_{ij}^\mu \lambda_{ij} = 0, \quad \lambda_{ij} \equiv \frac{d_{ij}}{l_{ij}} \quad (2)$$

$$\sum_j \tilde{l}_{ij}^\mu l_{ij}^\nu \lambda_{ij} = 2\Omega_i \delta^{\mu\nu} \quad (3)$$

$$\tilde{l}_{ij}^\mu \equiv l_{ij}^\mu + k_{ij}^\mu$$

ここで、 ϕ_i は格子点 i での関数 ϕ の値、 l_{ij}^μ は格子点 i から格子点 j へ向かうベクトルの第 μ 成分を表す。座標を (x, y) とすれば

$$l_{ij}^\mu \equiv (l_{ij}^x, l_{ij}^y), \quad \partial_\mu \equiv (\partial_x, \partial_y)$$

となる。 $\sum_j$ は格子点 i と連結している格子点についての和を意味する。式(1)~(3)の証明は次のようになる。(1)の証明： i 点の座標を x とすれば点 j の座標は $x + l_{ij}$ となるからテーラー展開により式(1)を得る。(2)の証明： l_{ij}^μ/l_{ij} は点 i から点 j へ向かう単位ベクトル。これに重み d_{ij} を付けて $\sum_j$ の和をとるとき、各 l_{ij}^μ/l_{ij} を一斉に同じ方向に 90° 回転させてから和をとると点 i のまわりの双対格子点を結んで一周するベクトルの和となるからゼロベクトルになる。 90° 逆回転させてもゼロベクトルはゼロベクトル。(3)の証明：格子点 i を囲む双対格子に対しガウスの定理を適用する。すなわち、

$$\begin{aligned} \Omega_i \delta^{\mu\nu} &= \int_{\partial\Omega_i} \partial_\nu (x - x_i)^\mu d^2x \\ &= \int_{\partial\Omega_i} (x - x_i)^\mu dx^\nu \\ &= \sum_j \frac{1}{2} (l_{ij}^\mu + k_{ij}^\mu) l_{ij}^\nu \lambda_{ij} \end{aligned}$$

ここで、 $\partial\Omega_i$ は点 i のまわりの双対格子点を結ぶ閉じた線に対応し、領域 Ω_i の境界を表す。 dx^ν は双対格子のリンクに垂直な単位ベクトルにそのリンクの長さをかけたものに対応する。第3番目の等号は $\partial\Omega_i$ 上の線積分を離散化したものである。

さて式(1)の両辺に $\lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^\mu$ をかけて $\sum_j$ をとり、式(2)、(3)を使うと ϕ_i の x に関する一次導関数

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{1}{2\Omega_i} \sum_j \lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^x (\phi_j - \phi_i) \quad (4)$$

が得られる。 y に関する一次導関数も同様に

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{1}{2\Omega_i} \sum_j \lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^y (\phi_j - \phi_i) \quad (5)$$

となる。

次にポアソン方程式の離散化を考える。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad (6)$$

これは

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \rho \phi \right\} \quad (7)$$

で定義される作用積分の極値を与えるオイラー・ラグランジュの方程式である。そこで、式(7)の離散化版から式(6)に対応するものを求める。式(7)を離散化するには

$$\int d^2x \rightarrow \sum_i \Omega_i$$

なる置き換え、および

$$\begin{aligned} \sum_j \lambda_{ij} (\phi_i - \phi_j)^2 &= \sum_j \lambda_{ij} l_{ij}^\mu l_{ij}^\nu \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_i \\ &\simeq 2\Omega_i (\partial \phi_i)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

を使う。式(8)では $\sum_j \lambda_{ij} l_{ij}^\mu l_{ij}^\nu$ は $\sum_j \lambda_{ij} (l_{ij}^\mu + k_{ij}^\mu) l_{ij}^\nu$ とほぼ等しいという仮定を使っているため2番目の等号を $\simeq$ とした。これらを使うと式(7)の S は次のように離散化される。

$$S = \frac{1}{4} \sum_{ij} \lambda_{ij} (\phi_i - \phi_j)^2 + \sum_i \Omega_i \phi_i \rho_i \quad (9)$$

式(9)から得られるオイラー・ラグランジュの方程式は

$$\frac{1}{\Omega_i} \sum_j \lambda_{ij} (\phi_j - \phi_i) = -\rho_i \quad (10)$$

となる。この最後の式は式(6)の三角形格子上での離散化版とみることができる。以上示したとおり差分式(4)、(5)、(10)は基本関係式(1)、(2)、(3)から容易に導ける。すなわち、ここで新しいのは基本関係式を差分法とみなした点であり、“差分法の提案”とはこの意味に使われている。

4. 数値計算例

ここでは、線形問題として単純なディリクレ境界条件を持つラプラスの方程式、および非線形問題として正方キャビティ流れの各問題に対して著者らの差分法を試みる。キャビティ問題は差分法や有限要素法などの数値解法の比較検討に取り上げられる典型的な問題となっている⁽⁸⁾。

4・1 線形問題：ラプラス方程式 次のようなディリクレ境界値問題を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0, \quad 0 < x, y < 1, \\ \phi(x, 0) &= 1, \quad \phi(x, 1) = 0, \quad (11) \\ \phi(0, y) &= \phi(1, y) = 0 \end{aligned}$$

式(11)のラプラシアン部分は三角形格子上で離散化

すると、式(10)より

$$\phi_i = \frac{\sum_j \lambda_{ij} \phi_j}{\sum_j \lambda_{ij}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となり、四角形格子の場合と同様に周囲の ϕ の値から真ん中の ϕ を決める形となっている。式(12)は境界での ϕ の値および領域内部での ϕ の初期値を与えて反復法によって解ける。そこでSOR法の適用を考えて式(12)を次のように書き直す。

$$\phi_i^{(n+1)} \leftarrow \phi_i^{(n)} + A \left(\frac{\sum_j \lambda_{ij} \phi_j^{(n)}}{\sum_j \lambda_{ij}} - \phi_i^{(n)} \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 A は加速係数でその最適の値は実際に計算して決めることとする。 ϕ の右上の添字 $^{(n)}$ は反復回数を示す。収束判定条件は

$$\sum_i |\phi_i^{(n+1)} - \phi_i^{(n)}| < \varepsilon N \quad \dots\dots\dots (14)$$

とする。 N は格子点の総数 (= 領域内部および境界上の格子点の数) を示し、 ε はここでは $\varepsilon = 10^{-5}$ とする。格子は2章で示したタイプA、Bおよび一様な正方形格子を使い、格子点の数をいろいろと変えて、結果の格子タイプ依存性や分割数依存性、収束までの反復回数、最適加速係数 A_{opt} などを調べる。表1に結果を示す。表1の中で # Sites, # Iters. はそれぞれ格子点数、収束までの反復回数を表す。また表1のいちばん下の Square は一様な正方形格子を意味する。なお、タイプA、Bの真ん中の格子点数のものはそれぞれ図2に示したものと同一である。表1から三角形格子を使った場合と一様な正方形格子を使った場合とで反復回数や最適加速係数に特別な差異がないことがわかる。図5には格子点数が真ん中の値のそれぞれの格子による ϕ の収束値を等高線で示す。図5中の各図形で下側の辺が境界条件 $\phi=1$ の部分である。図5からどの格子を使っても唯一の解に収束することがわかる。格子点数を大きくすればタイプA、Bの等高線はさらに滑らかになる。ただし、タイプAの格子を二つの格子点の間の距離に下限値を設定しないで全く乱雑に作った場合、格子点数を大きくしていても結果の等高線がそれと同程度の格子点数から成る他のタイプの格子の結果に比べて滑らかにならないことがある。その理由は他のタイプの格子が同程度の大きさの三角形あるいは

四角形で作られているのに対して、タイプAの格子はいろいろな大きさの三角形で構成されているため場所によっては差分近似が悪くなることがあるからと考えられる。面積でいえば最大と最小の三角形は数けた異なることも出てくる。関数の値が急変するところが大小入り交じった三角形で分割されているとこのようなことになることがある。初めから関数の値が急変する場所がわかっている場合、その部分を特に細く格子分割することが有効であることは通常の四角形格子の場合と同じである。

4.2 非線形問題：キャビティ流れ 非圧縮性、粘性流体の正方キャビティ問題は次の方程式と境界条件で定義される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 ω は渦度、 ψ は流れ関数で Re はレイノルズ数を表す。流速 $\vec{v} = (v_x, v_y)$ は流れ関数から

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられ、境界条件は次のようになる。

$$(v_x, v_y) = \begin{cases} (1, 0) & \text{on } \Gamma_1 \\ (0, 0) & \text{on } \Gamma_{2,3,4} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$\Gamma_1 \sim \Gamma_4$ は図6に示す領域の境界である。また、各境界の一辺の長さは1とする。

時間の離散化に関するきざみ幅を Δt とし、空間部分の離散化については式(4)、(5)および式(10)を使うと式(15)、(16)は次のようになる。

$$\omega_i \leftarrow \omega_i + \frac{\Delta t}{4\Omega_i^2} \left\{ \left(\sum_j \lambda_{ij} \tilde{I}_{ij}^x \psi_j \right) \left(\sum_j \lambda_{ij} \tilde{I}_{ij}^y \omega_j \right) \right.$$

(a) タイプA

(b) タイプB

(c) Square

図5 ϕ の収束値の等高線表示

表1 収束までの反復回数と最適加速係数

	#Sites	#Iters.	A_{opt}
Type A	96	14	1.47
	396	34	1.73
	896	50	1.82
Type B	100	14	1.51
	400	29	1.73
	900	43	1.81
Square	100	15	1.50
	400	30	1.73
	900	43	1.81

$$-\left(\sum_j \lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^x \psi_{ij}\right) \left(\sum_j \lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^y \omega_{ij}\right) \Big\} \\ + \frac{\Delta t}{Re} \frac{1}{\Omega_i} \sum_j \lambda_{ij} \omega_{ij} \dots\dots\dots (19)$$

$$\psi_i \leftarrow \frac{1}{\sum_j \lambda_{ij}} \left(\sum_j \lambda_{ij} \psi_j + \omega_i \Omega_i \right) \dots\dots\dots (20)$$

ここで次のような記号を使った。

$$\psi_{ij} \equiv \psi_j - \psi_i, \quad \omega_{ij} \equiv \omega_j - \omega_i$$

式(19), (20)で矢印は時間が Δt だけ進むことを意味する。新しい時刻の ω は式(19)の代入だけで計算をするが、 ψ については式(20)のポアソン方程式を解いて新しい時刻のものを求める。

境界上の ω の値は式(18)および式(20)から決まる。 Γ_1 上では式(18)から

$$\psi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \dots\dots\dots (21)$$

$$\sum_{j(\text{out})} \lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^x \psi_j = 2\Omega_i - \sum_{j(\text{in})} \lambda_{ij} \tilde{l}_{ij}^x \psi_j \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここで、 $\sum_{j(\text{out})}$, $\sum_{j(\text{in})}$ は図7に示すようにそれぞれ Γ_1 の外側および内側にある格子点に関する和を表す。なお、格子を生成するときに必要であった仮想点がここでは重要な役割を果たす。さて、ここで仮想点と Γ_1 の間の距離 l_{ij}^x を一定、さらに、仮想点に関し $k_{ij}^x = 0$ (図4)と仮定する。すなわち

$$l_{ij}^x \equiv l_{r_1} = \text{const.} \quad (j = v. \text{pts.}) \dots\dots\dots (23)$$

$$k_{ij}^x = 0 \quad (j = v. \text{pts.}) \dots\dots\dots (24)$$

とする。式(23)の仮定はタイプA, Bの格子で成り立つようにできる。式(24)の仮定は両タイプとも格子の四隅のところの一部でのみ破れているが、その程度も微少ゆえほぼ成り立っているとする。そうすると式(20)および式(22)から Γ_1 上の ω を与える式

$$\omega_i = \frac{1}{\Omega_i} \left\{ -\frac{2\Omega_i}{l_{r_1}} + \sum_{j(\text{in})} \left(\frac{\tilde{l}_{ij}^x}{l_{r_1}} - 1 \right) \lambda_{ij} \psi_j \right\} \quad \text{on } \Gamma_1 \dots\dots\dots (25)$$

が得られる。 $\Gamma_2 \sim \Gamma_4$ の上でも同様に ω が決まり次のようになる。

$$\omega_i = \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j(\text{in})} \left(\frac{\tilde{l}_{ij}^x}{l_{r_{2,4}}} - 1 \right) \lambda_{ij} \psi_j \quad \text{on } \Gamma_{2,4} \dots\dots\dots (26)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j(\text{in})} \left(\frac{\tilde{l}_{ij}^y}{l_{r_3}} - 1 \right) \lambda_{ij} \psi_j \quad \text{on } \Gamma_3 \dots\dots\dots (27)$$

図6 正方キャビティの境界

今度の例題でも4・1節の場合と同様に二つのタイプの三角形格子による結果を正方形一様格子による結果と比較する。収束判定は式(14)で ψ, ω 共に $\epsilon = 10^{-4}$ とした。式(20)のポアソン方程式はSOR法で解きその収束判定も式(14)で $\epsilon = 10^{-4}$ とした。 ϵ を $\epsilon = 10^{-5}$ とした場合も試みたが結果に大きな違いは見られなかった。また相対誤差による収束判定では不安定で収束しないことがあったがこれは関数の値が数値的に零になることがあり、したがって判定法が不適のためと考えられる。格子サイズとしてはタイプAで1596格子点、タイプBと正方形格子で1600格子点のものをを用いた。格子サイズは大きければ大きいほど、単純には差分近似が良くなりその解は元の微分方程式の解に近づくと考えられる。また、一般に流体の問題ではレイノルズ数が大きい場合には十分に細いメッシュの格子が必要となる。しかし、本論文ではレイノルズ数が比較的小さな領域を対象としており、格子点数1600程度の格子でそのサイズは充分と考えられる。時間きざみの幅 Δt は正方形格子の場合、 h をメッシュ幅とすると離散化方程式の形から $\Delta t \sim h^2$ なる目安が出る。これに対して、三角形格子の場合には式(19)から $\Delta t \sim \Omega_i$ となり、したがって格子点 i に依存する。しかし三角形格子と正方形格子で格子点数が等しいとき Ω_i の平均値と h^2 はほぼ等しくなることから三角形格子の場合の Δt を正方形格子のものと同じ値で $\Delta t = 0.005$ とした。この値は h^2 に比べてかなり大きい。この値による結果とより小さな Δt による結果との間に系統的な差異が見られなかったため $\Delta t = 0.005$ は妥当な値と考えられる。レイノルズ数 Re は100から100ずつ1000程度まで増加して計算した。 $Re = 100$ では ψ と ω の値は境界上の特別な点を除いて初期値零として出発した。その他の Re の値では ψ と ω の初期値としてその前の Re の最終状態のものを使った。

図8に用いた格子の例を示す。図9には $Re = 100, 500$ での ψ の等高線を示す。収束までの反復回数は $Re = 100$ ではタイプAで1039回、タイプBで1374回、正方形格子で1098回であった。タイプA, Bの格

図7 Γ_1 上およびその内(外)側の格子点

子は作り方によって少しずつ異なった格子となるがこの反復回数もそれによって少しずつ変化する。このことを考慮に入れても反復回数に関して格子のタイプによる特別の差異は見られなかった。他の Re の値でも同様であった。図 9 から、各結果を比べてみると ψ の等高線の形は完全には一致していないものの、二次渦の発生位置など大まかには一致していることがわかる。

図 10 には主渦の中心位置とレイノルズ数の関係を示した。図 10 中の 1~10 の数字は Re の値の 10^{-2} 倍を表す。図 10(d) には三つの格子の結果を一緒に表示した。図 10 から、どの格子による主渦の位置も Re が高くなるとほぼ同じ軌跡で移動していく様子がわかる。一方では、タイプ A, B 格子による $Re=200$ の結果と正方形格子による $Re=300$ の結果がほぼ一致していることなど、三角形格子による結果が系統的にそれより高いレイノルズ数における正方形格子による結果と一致している様子が見える。ここで、タイプ A の格子ではそれをある程度均一に作らないと計算が収束しなかったり、全く別の解に収束したりすることを注意しておく。格子の乱雑さが数値的不安定性を引き起こすものと思われるが詳しい理由は今のところよくわからない。図 11 にはタイプ A, B で作り方の異なる格子による主渦の位置を異なる記号で示す。図 11 からそれぞれのタイプごとにも首尾一貫した結果が得られることがわかる。

以上の結果では各格子による ψ の等高線が完全には一致しないことや主渦の位置に関しては系統的な違いも見られたが、これらは三角形格子上での著者らの差分法を否定する結果ではない。というのは、扱った方程式がディリクレ問題等とは異なり唯一の解が存在するかどうかかわからないしそもそも高レイノルズ数では定常解が存在しないからである。むしろ、各差分法で首尾一貫した結果が得られ各結果の間に少しの系統的差異しか見られなかったことから、どの差分法も確からしい解を与えると考えることができる。

(a) タイプ A (b) タイプ B

図 8 計算に使用した格子

5. 結 言

一般に物理的現象はある微分方程式の解として記述

(a) タイプ A

(b) タイプ B

(c) Square

図 9 ψ の等高線

1 ~ 10 = Reynolds numbers $\times 10^{-2}$

図 10 主渦の位置とレイノルズ数の関係

図 11 主渦位置の格子依存性

されるがその微分方程式がある量, 例えば作用関数, を最大または最小とするような条件として与えられる場合には, 微分方程式を解く代わりにその量の極値を何らかの方法で求めることによって現象を把握することが原理的にはできる。文献(7)ではいくつかの作用関数を三角形格子上で離散化する一つの方法が示されているが, 本論文で著者らはその方法を微分方程式の離散化に応用するという形で三角形格子上の差分法を提案し, ラプラス方程式とキャビティ問題の数値解を一様正方形格子による結果と比較した。ラプラス問題の場合その数値解はどの格子を使っても同一となり, また SOR 法による収束判定条件もほぼ同一であることが確められ, したがって三角形格子上の差分法は一様正方形格子のそれと同等であると判断できた。低レイノルズ数のキャビティ流れの解析では一次および二次渦の位置, 一次渦のレイノルズ数依存性などに

ついて各格子ごとおよび各格子間で首尾一貫した結果が得られ, この場合もまた著者らの差分法は一様正方形格子のそれと同等であることを示すことができた。明らかな短所は非構造格子一般のことであるが計算機メモリと計算時間を多く必要とすることである。

本論文で扱った例題はその領域分割で必ずしも三角形分割が都合のよいものではなかったが, 今後はいろいろな問題の解析を通して著者らの差分法をチェックしその有効性を確認していくことが必要である。なお, 本論文では二次元問題に限ったがその差分法は三次元にも拡張できることを注意しておく⁽⁷⁾。

本論文の作成に当たっては卒研生の橋本, 服部, 藤田, 益子, 渡辺の名氏にいろいろと協力していただき感謝する。

文 献

- (1) 日本機械学会編, 流れの数値シミュレーション, (1988), 56, コロナ社.
- (2) 河村, 数理科学, 27-8, No. 314, (1989), 17.
- (3) Thompson, J. F., ほか 2 名, *Numerical Grid Generation*, (1985), 1, North-Holland.
- (4) 例えば, 斉藤, 数値伝熱学, (1986), 126, 養賢堂.
- (5) ザイマン, 乱れの物理学, (1982), 3, 丸善.
- (6) Friedberg, R. and Ren, H. C., *Nucl. Phys.*, B235 [FS11], (1984), 310.
- (7) Lee, T. D. (Zichichi, O., ed.), *How Far Are We From The Gauge Force*, (1985), 15, Plenum.
- (8) Ghia, U., ほか 2 名, *J. Comput. Phys.*, 48 (1982), 387.