渦度・流れ関数表示法による複数物体を過ぎる 流れの数値計算*

徳 永 宏^{*1}, 田 中 照 憲^{*2}, 里 深 信 行^{*1}

Numerical Simulation of Viscous Flows along Multiple Bodies by Modified Vorticity-Stream Function Formulation

Hiroshi TOKUNAGA, Terunori TANAKA and Nobuyuki SATOFUKA

The vorticity-stream function formulation is extended and the velocity potential is introduced for calculating viscous flows along multiple bodies. The governing equations are, therefore, composed of the vorticity transport equation, the Laplace equation for the velocity potential and the Poisson equation for the stream function. The computational method is composed of the method of lines. The spatial discretization is carried out by the centered difference, and the time integration is dealt with by the rational Runge-Kutta method. The domain decomposition method is used for calculating flows along multiple bodies. It is shown that the inlet flow in a plane channel and the flows past a bank of cylinders as well as along a pair of cylinders are successfully calculated by the present method. Results shows an excellent agreement with calculations using the MAC method and the finite element method.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Grid Generation, Flow Visualization, Boundary Condition, Viscous flow

1. 緒 言

非圧縮性粘性流の数値計算において、渦度・流れ関数表示法は、速度場に課せられる連続の式を自動的に満足することから、一般曲線座標系への拡張には、困難は伴わず、この観点からよく使用されている^{(1)~(4)}。しかしながら、この方法を複数物体を過ぎる流れのような工学上重要な一般的な流れに適用する場合、物体面における境界条件の設定は、それほど容易ではなく、このことは、以前から指摘されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

したがって、現在においては、非圧縮性粘性流の数値計算には、MAC法⁽⁷⁾が多用され、この方法の一般座標系への拡張⁽⁸⁾が研究されている。

本研究では、新たに速度ポテンシャルを用いて、渦度・流れ関数表示法における境界条件の設定方法を容易にする方法を提案する⁽⁹⁾。そして、従来その困難性のゆえに、取扱われていなかった複数物体を過ぎる流れの数値計算に、本方法を適用する。

本論文においては、まずこの方法を平行平板入口流

れに適用し、MAC法を用いたときの結果と比較しその信頼性を検討する。次に、本方法の複数物体を過ぎる流れへの適用性を検討するために、Tezduyarら⁽¹⁰⁾の行っている円柱列を過ぎる流れの数値計算を実行する。そして、2円柱を過ぎる流れに本方法を適用し、円柱間の距離を変えたときの流れの変化について考察し、本方法の有用性を吟味する。

2. 基礎方程式および境界条件

2.1 基礎方程式 二次元非圧縮性粘性流の運動は、速度を $\mathbf{u}=(u, v)$ 、圧力を p とするとき、次の無次元化されたナビエ・ストークス方程式と連続の式で支配される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

ここで、代表長さを L 、代表速度を U とし、動粘性係数を ν とすると、レイノルズ数は $Re = UL/\nu$ で定義される。ナビエ・ストークス方程式(1)の回転をとると、渦度に対する次の基礎方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad \cdots \cdots (3)$$

ここで、渦度は

* 平成3年3月19日 関西支部第66期定時総会講演会において講演、原稿受付 平成3年6月1日。

^{*1} 正員、京都工業繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 京都工業繊維大学大学院。

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。次に、本方法においては、速度場は渦なし流れと渦流れに分離され、前者は速度ポテンシャル ϕ で後者は流れ関数 ψ により表現される。つまり、流れのうちで流量を持つ部分を速度ポテンシャルで、それ以外の部分を流れ関数で与える。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (5)$$

このとき、速度ポテンシャルにたいしてはラプラス方程式

$$\Delta \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

そして流れ関数に関してはポワソン方程式

$$\Delta \psi = -\omega \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。速度ポテンシャルは、渦度と無関係であるため計算の最初の段階に一度だけラプラスの方程式(6)を解いて与えられる。そして、以後は渦度と流れ関数に対してのみ計算が進められる。また、圧力 p に関しては、元のナビエ・ストークスの方程式と連続の式から次のようなポワソン方程式

$$\Delta p = -2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

が導かれ、必要とされる任意の時刻でこの方程式を解くことにより、圧力が決定される。

2.2 一般座標変換 本研究では、複数物体を過ぎる流れ計算を容易にするため物体に沿った格子を数値的に形成して計算を行う。このため直交座標系から一般曲線座標系への座標変換 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ を行う。このとき、空間微分は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

また、ラプラス演算子は次のように変換される。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D + (Dx) \frac{\partial}{\partial x} + (Dy) \frac{\partial}{\partial y} \quad \dots\dots (10)$$

ここで、計量およびヤコビアンは次の式から計算される。

$$\begin{aligned} D &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \alpha &= \frac{1}{J^2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \\ \beta &= -\frac{1}{J^2} \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\} \\ \gamma &= \frac{1}{J^2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \\ J &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

2.3 境界条件 速度、速度ポテンシャルおよび

渦度の境界条件は次のように設定した。

(1) 流入条件 速度と速度ポテンシャルは一樣流で与える。また、渦度は零とし、流れ関数には流量が伴わないので、零で固定する。

(2) 流出条件 各量を領域内から線形外挿する。

(3) 物体面条件 滑りなしの条件から、速度と流れ関数を零で固定する。速度ポテンシャルは法線方向微分を零とする。渦度は定義式より計算する。

なお、圧力は全境界でナビエ・ストークスと合致するように圧力こう配を与えて決定する。

2.4 計算格子 各物体周りを領域分割してO型格子を形成し、周囲に直交格子を結合する。この方法により複数の同一物体を扱う場合に容易に格子形成ができる。

3. 数値計算方法

3.1 渦度輸送方程式に対する数値計算方法 渦度輸送方程式を解くために、陽的線の方法を採用する。この方法においては、空間微分項の離散化と時間積分を分離して実行する。本論文においては、例えば、 ω の ξ 方向の微分は下記のように実行される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \Big|_{ij} = \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \Big|_{ij} = \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\omega_{i,j}$ は $(\xi, \eta) = (i\Delta \xi, j\Delta \eta)$ における値を示し、また、 $\Delta \xi$, $\Delta \eta$ は、 ξ , η 方向の格子間隔を表すものとする。これらの離散化により、渦度輸送方程式は次のような時間に関する連立常微分方程式に帰着される。

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{F}(\vec{\omega}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\vec{\omega} = (\omega_{2,2}, \omega_{3,2}, \dots, \omega_{i_{\max}-1, j_{\max}-1})^T. \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式において、 $i_{\max}$, $j_{\max}$ は、それぞれ ξ , η 方向の格子点数を表すものとする。連立常微分方程式の解法として、ここでは安定条件の緩やかな陽的方法である有理ルンゲ・クッタ法を用いる。この方法は、次のように2段階に分けて計算が行われる。

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{(1)} &= \vec{\omega}^{(n)} + c_2 \vec{g}_1, \quad \vec{g}_1 = \Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(n)}) \\ \vec{\omega}^{(n+1)} &= \vec{\omega}^{(n)} + \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1, \vec{g}_3) - \vec{g}_3(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_3, \vec{g}_3)} \\ \vec{g}_2 &= \Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(1)}), \quad \vec{g}_3 = b_1 \vec{g}_1 + b_2 \vec{g}_2 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで $(\vec{d}, \vec{e})$ はベクトル $\vec{d}$ と $\vec{e}$ のスカラー積を表す。数値係数 b_1 , b_2 と c_2 は適切に選択され、 $b_2 c_2 = -1/2$ のとき、二次精度が確保される。

3.2 ポワソン解法 ポワソン方程式は逐次過緩和

和法 (SOR 法) により解かれる。本計算において加速因子は 1.5 と選択された。

4. 計算結果

4.1 平行平板入口流れ 本数値計算方法の信頼性を検証するために、平行平板の入口流れの数値計算を行う。レイノルズ数を 100 とし、図 1 の格子を用いた。図 2 に得られた収束解の等渦度線を示す。入口付近で渦度変化が見られるが、下流に行くにしたがいポアズイユ流れに発達する。圧力の等高線を図 3 に示した。本数値計算方法と MAC 法による結果は、良好に一致し、渦度流れ関数法の信頼性が確認される。次に流れ方向の速度分布を図 4 に表示した。正規化距離 $x/L/Re = 7.8125 \times 10^{-4}$ および 0.1 における両方法で得られた速度分布は非常に一致を示すことがわかる。

4.2 円柱列を過ぎる流れ 本計算法の複数物体を過ぎる流れ場への適用例として Tezduyar らの行った円柱列を過ぎる流れを解析する。計算領域を図 5 に示す。このように 2 円柱が配置されているが、上下境界ではおのおの上下方向に対する対称条件を与えるため、実質は円柱列を過ぎる流れを解析することになる。

図 6 に計算格子を示す。計算格子は、2 個の円柱に接する O 形格子と円柱前後の 4 個の長方形直交格子で形成されている。また、全領域の幅にたいする円柱の占める割合は、ソリディティと呼ばれるがこれを 0.66 とする。総格子点数は 4 662 とした。

図 1 計算格子

図 2 平行平板入口流れの等渦度線

(a) 本数値計算方法

(b) MAC 注

図 3 平行平板入口流れの等圧力線 ($\Delta p = 0.02$)

レイノルズ数を 100 とし、時間刻み幅を 1/200 とし、計算を行った。渦度の残差を以下のように定義し

$$L_2\text{-Residual} = \sqrt{\frac{(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)^2}{I \times J}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

その時間変化を図 7 に示した。時刻 $t = 25.5$ で残差は最小となるが、流れが非定常になるため、また上昇し一定のレベルを保ちながら振動する。

図 8 で本計算解と Tezduyar らの結果との比較を行った。図 8 (a) と図 8 (b) に示されているように、比較的初期の段階では、両者の間に良好な一致が見られる。また、本計算では、定常解は得られないものの、残差が最小となる時刻 $t = 25.5$ の解は Tezduyar らにより得られた定常解とよく一致することが図 8 (c) と

図 4 平行平板入口流れの速度分布

図 5 計算領域

図8(d)からわかる。また, Tezduyar らはかく乱を定常解に加えることにより非定常解をえているが, かく乱を加えて無次元時間で150後の解は, 本数値計算において残差が最小に達した後, やはり, 無次元時間150後の解とよく一致することが, 図8(e)と図8(f)からわかる。以上のことから, 本方法は複数物体を過ぎる流れの解析に対して十分な有効性を持つと言える。

4.3 並列2円柱を過ぎる流れ 次に, 2個の円柱を流れに対して直角方向に置いた場合の計算を行う。Williamson⁽¹¹⁾によれば, 流れはこの場合レイノルズ数以外に円柱間の距離 G と円柱直径 D の比 $g^* = G/D$ により支配され, $1 \leq g^* \leq 5$ のとき, 両方の円柱に等しく相互作用が働き, 規則的な渦列が形成されることが報告されている。本研究では, したがって, g^* が2と5の場合の計算を行い, 流れ場の比較を行う。

図9に g^* が5のときに用いた領域分割格子を示す。円柱表面に接する格子は円柱表面から領域境界まで $2.5D$ の距離を有するので, この格子を縦に二つ並

図6 計算格子

図7 渦度の残差の時間変化

べて設定することにより, 2個の円柱周り格子を作成する。総格子点数は9646点である。

レイノルズ数を100として計算を行った。図10に数値的に形成した流跡線を示す。流跡線は, 円柱の前方から仮想的な粒子を放出しその時間的移動をコンピュータにより可視化することにより得られた。 $g^*=5$ のとき, 2円柱により形成された2個のカルマン渦列間の相互作用は極めて小さいことがわかる。これに対して, $g^*=2$ の場合, 2円柱の内側の渦列が強められるが, 外側の渦列は弱められることがわかる。そして, このときは, もはやカルマンの渦列と呼べない。

次に, 図11に圧力の等高線を示す。 $g^*=5$ の場合において, 2円柱の内側で, 外側に比べて圧力が多少強められていることが見られるものの, 流跡線で示されたように, 2円柱間の流れの相互作用は弱いことがわかる。これに対して, $g^*=2$ の場合, 円柱内側の圧力が極度に強められていることがわかる。また, 2円柱後方に形成されている渦列においても, 2円柱の内側の渦列が強く相互作用して, 強めあっているのに対して,

(a) 本数値計算方法 ($t=4.5$)

(b) Tezduyar ら ($t=5.0$)

(c) 本数値計算方法 ($t=25.5$)

(d) Tezduyar ら (Steady sol.)

(e) 本数値計算方法 ($t=22.5+150.0$)

(f) Tezduyar ら (Steady sol.) + ($t=150.0$)

図8 円柱列を過ぎる流れの等渦度線

図 9 領域分割格子

$g^* = 5$ $g^* = 2$

図 10 2円柱を過ぎる流れの流跡線

外側の渦列は極度に弱められていることがとらえられている。これらの流れの特徴は、Williamson によりなされた流れの可視化実験と一致する。

5. 結 論

渦度・流れ関数法に速度ポテンシャルを導入することにより、複数物体を過ぎる流れを計算できる方法が提案され、平行平板入口流れ、円柱列を過ぎる流れおよび2円柱を過ぎる流れが解析され、その結果次の結論が得られた。

(1) 本数値計算方法は、平行平板入口流れに関して、MAC法とよく一致する結果を与える。

(2) 円柱列を過ぎる流れに対して、本数値計算方法を適用したところ、有限要素法を用いた Tezduyarらの結果と一致する結果が得られた。

$g^* = 5$ $g^* = 2$ 図 11 2円柱を過ぎる流れの圧力等高線 ($\Delta p = 0.1$)

(3) 2円柱を過ぎる流れに、円柱間の距離を変化させて数値計算を行い、数値的に流跡線および圧力の等高線を形成して、流れ場の解析を行ったところ、2円柱間の距離が小さいとき、円柱後方に形成される渦列間の相互作用が強くなることをとらえることができた。

以上のことから、本数値計算方法の複数物体を過ぎる流れへの有効性が検証された。

文 献

- (1) Tokunaga, H., Satofuka, N. and Yoshikawa, T., *Proc. AIAA 8th CFD Conf.*, (1987), 778, AIAA Paper, 87-1175-CP.
- (2) 徳永・里深・吉川, 機論, 54-503, ABC (1988), 1588.
- (3) Tokunaga, H., Satofuka, N. and Yoshikawa, T., *Mem. Fac. Eng. Des.*, Kyoto Inst. Tech., 38 (1990), 35.
- (4) Tokunaga, H., Ichinose, K. and Satofuka, N., *Mem. Fac. Eng. Des.*, Kyoto Inst. Tech., 39 (1991), 19.
- (5) 大宮司, 機論, 44-378, (1978), 555.
- (6) 吉野・林・若, 機論, 55-512, ABC (1989), 1062.
- (7) Amsden, A. A. and Harlow, F. H., *J. Comput. Phys.*, 3

- (1968), 94.
- (8) 大宮司・申・井小萩, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1988), 15.
- (9) 田中・徳永・里深, 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1990), 467.
- (10) Tezduyar, T. E., Liou, J., Ganjoo, D. K. and Behr, M., *Int. J. Numer Methods Fluids*, **11** (1990), 515.
- (11) Williamson, C. H. K., *J. Fluid Mech.*, **150** (1985), 1.
-