二次元後方ステップ流れの数値計算*

一之瀬 健一^{*1}, 徳 永 宏^{*2}, 里 深信 行^{*2}Numerical Simulation of Two-dimensional
Backward-Facing Step Flows

Kenichi ICHINOSE, Hiroshi TOKUNAGA and Nobuyuki SATOFUKA

A new numerical scheme based on the method of lines is presented for two-dimensional backward-facing step flows. The formulation is based on the vorticity-stream function representation. The spatial discretizations are carried out by the modified differential quadrature (MDQ) method which is of arbitrary orders of spatial accuracy. For the time integration scheme, the fourth-order Runge-Kutta-Gill (RKG) method is used. The Poisson equation is solved by the point Jacobi method for adaptability to vector computers. Additionally, the multi-grid method is used in order to accelerate the convergence. In the first place, laminar flow calculations are carried out to verify the accuracy of the present method. The computed reattachment length shows excellent agreement with other results. The influence of the grid number and the order of spatial accuracy on the numerical solution is also investigated, and the present method is proved to be sufficiently accurate. Next, the turbulent simulation is carried out. It is found that the recirculating vortex splits into several vortices in the reattachment zone, and the chaotic flow which forms the irregular vortex streets occurs behind the reattachment zone.

Key Words: Unsteady Flow, Turbulent Flow, Transition, Finite Difference Method, Computational Fluid Dynamics

1. 緒 言

乱流モデルはこれまで境界層乱流に対する知見に基づいて開発されてきた⁽¹⁾。このため、現在の乱流モデルは境界層乱流に近い形態の流れ場に対しては信頼できる結果を与えるが、大きな離れをとる一般的な流れ場に対してはモデルの根拠はあいまいであり信頼性は乏しい。乱流モデルをより一般的な流れ場に対して適用できるよう改良するためには、一般的な乱流に対する知見に基づいてモデルを構築しなければならない⁽²⁾。流れ場に大きな離れ領域をとる後方ステップ流れは、境界層乱流よりも一般性が高く、この乱流の知見に基づいてモデルを改良していくことは乱流モデルの大きな進歩につながるものと期待される。そこで乱流に対する知見をいかにして得るのかが重要な課題となるが、最近の計算機の性能向上にともない、直接シミュレーション⁽³⁾やLES⁽⁴⁾などの数値力学的手法によりこれを行うことが可能になりつつある。その際、信頼性の高い乱流の計算手法が必要となるが、この要請に対してはスペクトル法や擬スペクトル法が

有力である。しかし、これらの方法は基本的に周期境界条件でなければ適用が難しく、チェビシェフ多項式級数展開を用いたとしても平板間内流れなどの簡単な幾何学的形状の流れ場に適用が制限されてしまう。そこで、本研究では渦度-流れ関数表示法に基づき、空間微分項の離散化に修正微分求積法、時間積分法に四次精度のルンゲ・クッタ・ギル法を組合せた乱流計算手法を開発した。修正微分求積法は差分法の一つであり、境界条件に対する制約は少なく、また必要に応じて任意の精度を得ることができるという特徴を有している。本論文では、二次元後方ステップ流れを取り上げ、流れの様子がよく知られている層流問題に対して本計算手法の信頼性を示すとともに、それを踏まえて行われた乱流計算について報告する。

2. 基礎方程式

本研究では変数表示法として、連続の条件を自動的に満足する渦度-流れ関数表示法⁽⁵⁾を用いた。この場合基礎方程式となる渦度輸送方程式は二次元非圧縮性流れにおいて

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) + \nu \Delta \omega \dots \dots \dots (1)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ は速度ベクトル、 ω

* 原稿受付 平成3年4月15日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学大学院(〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。^{*2} 正員、京都工芸繊維大学工学部。

は渦度であり

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (2)$$

と定義されている。次に流れ関数 ψ を導入すると、速度と流れ関数の関係は、

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \quad (3)$$

と表される。式(3)を式(2)に代入すると ψ と ω に関するポアソン方程式

$$\Delta \psi = -\omega \quad (4)$$

を得る。したがって、解くべき方程式は渦度輸送方程式と ψ と ω に関するポアソン方程式となる。

3. 計 算 方 法

3.1 渦度輸送方程式の解法 渦度輸送方程式の解法として、空間微分項の離散化と時間積分とを別個に取扱う線的方法を用いる。渦度輸送方程式の空間微分項は修正微分求積 (MDQ) 法⁽⁶⁾ により離散化する。 ω の微分を例に挙げて説明すると、直交格子の場合、1階および2階微分項はMDQ法により

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Big|_{i,j} = \sum_{n=-N}^N a_{i,n} \omega_{i+n,j} + O(\Delta x_1^{2N}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \Big|_{i,j} = \sum_{n=-N}^N b_{i,n} \omega_{i+n,j} + O(\Delta x_1^{2N}) \quad (6)$$

と離散化される。係数 $a_{i,n}$ および $b_{i,n}$ はラグランジュ補間法より、次のように求められる。

$$a_{i,n} = \begin{cases} \frac{\Pi'(x_{1i})}{(x_{1i} - x_{1i+n})\Pi'(x_{1i+n})} & n \neq 0 \\ \frac{\Pi''(x_{1i})}{2\Pi'(x_{1i})} & n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$b_{i,n} = \sum_{m=-N}^N a_{i,m} a_{i+m,n} \quad (8)$$

$$\Pi(x_{1i}) = (x_{1i} - x_{1i-N})(x_{1i} - x_{1i-N+1}) \cdots (x_{1i} - x_{1i+N}) \quad (9)$$

ここで、「'」および「''」は1階および2階微分を表す。一般にMDQ法の精度を M とすると $M=2N$ となり、 $N=1$ の場合は二次精度、 $N=2$ の場合は四次精度となる。

渦度輸送方程式(1)の空間微分項を前述のMDQ法で離散化すると式(1)は時間に関する常微分方程式に帰着し、形式的に

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{F}(\vec{u}, \vec{\omega}) \quad (10)$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (u_{2,2} u_{3,2} \cdots u_{i \max-1, j \max-1})^T \\ \vec{\omega} = (\omega_{2,2} \omega_{3,2} \cdots \omega_{i \max-1, j \max-1})^T \end{cases} \quad (11)$$

と表される。ここで、 $i \max, j \max$ はそれぞれ x_1, x_2

方向の格子点数を表す。式(10)の時間積分法には4段階四次精度のルンゲ・クッタ・ギル (RKG) 法を用いる。

3.2 ポアソン方程式の解法 ポアソン方程式の解法として、渦度輸送方程式の場合と同様に空間微分項をMDQ法で離散化し、再帰性がないアルゴリズムでありベクトル計算機に適合したポイント・ヤコビ反復法で解く方法を用いた。また、非定常流においてはポアソン解法に要する計算時間は全計算時間の大半を占めることから、多重格子法⁽⁷⁾ を用いて反復解の収束加速を行い計算時間の短縮を図っている。

渦度輸送方程式(1)ならびにポアソン方程式(2)の個別の解法は前述したとおりであるが、全体的な計算手順を示すと図1のようになる。渦度輸送方程式の空間微分項を離散化した式(10)の時間積分を行うと新しい時間段階の ω が求まるが、このままでは新しい時間段階の u の未知であるので次の時間積分を行うことはできない。そこでポアソン方程式(4)を解くことにより ψ を求め、式(3)より新しい時間段階の u を求める。RKG法は4段階の方法であるので、1時間段階を進めるのにこのような手順を4回繰り返す。

4. 二次元後方ステップ流れ

本論文で取り上げる解析対象は、図2に示すような二次元後方ステップ流れである。座標の取り方は流れ方向を x_1 、それに垂直な方向を x_2 とする。また、ステップの角を原点としている。ここで、 H_1 は入口幅、 H_2 はステップ高さ、 L_1 はステップ角から出口境界までの長さ、 L_2 は入口境界からステップ角までの長さであり、丸付き数字は境界を表している。

図1 計算手順

5. 計算結果

5.1 層流計算 まず始めに本計算手法の信頼性を確かめるため層流計算を行った。計算領域は $H_1 = H_2 = 1, L_1 = 16 \sim 18, L_2 = 4$ とした。境界条件は表 1 に示したとおりであり、壁面境界では粘着条件とし速度を零としている。また渦度は渦度の定義式より定めている。流れ関数の境界条件は、上壁面境界では Ψ_H 、下壁面境界では Ψ_L と与えた。ただし、 Ψ_H と Ψ_L の差が断面での流量になるように定める。入口境界条件はポアズイユ流れとし、 $U_{IN}, \Psi_{IN}, \Omega_{IN}$ は入口でのポアズイユ流れを表している。出口境界条件は流れが十分発達して x_1 方向に変化しなくなることを仮定している。また、計算条件は表 2 に示したとおりである。

層流の後方ステップ流れは、ステップ後方に再循環渦をとともなう定常流となり、再付着点はレイノルズ数により変化することが知られている。ここで層流の場合のレイノルズ数の定義は以下に示したとおりであり、 U_0 は入口での平均流速を表す。

$$Re = \frac{(H_1 + H_2) U_0}{\nu} \dots\dots\dots (12)$$

計算は表 2 に示したおのこのレイノルズ数に対して定常解が得られるまで行った。定常解になったかどうかは $\partial\omega/\partial t$ の全格子点での二乗平均値が、 H_2/U_0 に

図 2 二次元後方ステップ流れ

表 1 境界条件

	ϕ	$\mathbf{u}$	ω
①	$\phi = \Psi_{IN}$	$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{IN}$	$\omega = \Omega_{IN}$
⑥	$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_2 = 0$	$\omega = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$
②	$\phi = \Psi_L$	$\mathbf{u} = 0$	$\omega = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$
③	$\phi = \Psi_H$	$\mathbf{u} = 0$	$\omega = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$
④	$\phi = \Psi_L$	$\mathbf{u} = 0$	$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$

基づく無次元時間 t の進行に対して変化しなくなることで判断した。

図 3 (a) に $Re=100$ の場合の流れ関数、図 3 (b) に渦度の分布をそれぞれ示す。流れ関数の分布を見ると、このレイノルズ数ではステップ後方の再循環渦以外に渦は認められない。壁面渦度が零となる所を再付着点と定めると、渦度の分布より、再付着点距離 x_{1r} は $x_{1r}=2.9$ であることがわかる。図 4 (a) に $Re=600$ の流れ関数、図 4 (b) に渦度の分布をそれぞれ示す。流れ関数の分布を見るとステップ後方に生じる大きな再循環渦に加えて、二次再循環渦の発生が認められる。この二次再循環渦の発生はレイノルズ数が $Re >$

表 2 計算条件

grid points	time step	spatial accuracy	U_0
16X32 : 72X32 step 72X32 total 5120	0.01	2nd order	1
Re: 100, 222, 267, 400, 450, 500, 600

(a) 流れ関数の分布

(b) 渦度の分布

図 3 $Re=100$ の流れ場の様子

450 で認められた。また渦度の分布より再付着点距離は $x_{1r}=10.3$ であることがわかる。

次におおののレイノルズ数に対する再付着点距離を表3に示すとともに、Kim-Moin⁽⁸⁾、Armaly⁽⁹⁾による結果との比較を図5に示す。レイノルズ数が450未満ではいずれの研究結果もほぼ一致しているが、それ以降のレイノルズ数では結果の差異が大きくなる。これは、レイノルズ数が高くなると二次再循環渦が発生するなど流れ場が複雑になり、計算領域や計算格子点数などの計算条件の影響が顕著になること、また実験において流れの三次元性が現れることによるものだと考えられる。しかし、本研究結果は他者の結果の範囲内にあり、妥当なものであるといえる。

計算結果の信頼性を確かめるために、 $Re=600$ の場合について、格子点数、空間精度の違いによる表4に示した四つのケースで計算を行い、計算結果の格子点数ならびに空間精度依存性について調べた。図6は速度 u_1 の分布を各ケースで比較したものである。格子点数が少なく空間精度が二次精度である case 1 の結果は他と比較して差が大きく、case 1 の計算精度では

不十分であることがわかる〔図6(a)〕。四次精度の case 2 と case 4 の結果では u_1 の分布はほとんど一致しており、四次精度の解法を用いれば case 2 のような少ない格子点数でも十分信頼性のある結果を与えることがわかる〔図6(b)〕。また、二次精度の case 3 と四次精度の case 4 でも u_1 の分布は細部を除いて一致しており、この程度の計算格子点数を用いれば二次精度でも十分であることがわかる〔図6(c)〕。以上のことから、本計算結果は十分信頼のおけるものであり、本計算手法の有効性が確認される。

5.2 乱流計算 層流問題に対する本計算手法の有効性を踏まえて、乱流問題に本手法を適用した。入口境界では、層流の場合と同様にポアズユ流れとしかく乱を与えておらず、じょう乱渦の自然発生をシミュレートした。出口境界条件は、出口近くの下流領域でじょう乱渦が一定間隔 $2\pi/\alpha$ で流出するものとして

表3 レイノルズ数と再付着点距離の関係

Re	100	222	267	400	450	500	600
x_{1r}	2.9	5.4	6.1	8.2	8.8	9.4	10.3

表4 各ケースの計算条件

	spatial accuracy	grid points
case1	2nd order	16X16 72X16
case2	4th order	step 72X16
case3	2nd order	16X32 72X32
case4	4th order	step 72X32

(a) 流れ関数の分布

(b) 渦度の分布

図4 $Re=600$ の流れ場の様子

図5 再付着点距離の比較

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = -\alpha^2 \phi^* \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\alpha^2 u^* \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} = -\alpha^2 \omega^* \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

$$\phi^* = \phi - \Psi_m, u^* = u - U_m, \omega^* = \omega - \Omega_m \dots\dots\dots (14)$$

と与えた⁽¹⁰⁾。ここで、「*」はじょう乱流を表し Ψ_m, U_m, Ω_m は出口境界での平均流を表しておりポアズユ流れと仮定した。この境界条件は厳密ではないが出口境界までの距離を長くとることにより影響を軽減した。壁面での境界条件は層流の場合と全く同様である。計算領域は $H_1=2, H_2=1, L_1=48, L_2=4$ とした。また、計算条件は表5に示したとおりである。本計算は数値的散逸効果を抑えるため流れ方向に多数の計算格子点を配置させ対流項の離散化も中心差分法で行った。また、 $U_0=1, \nu=0.0005$ としており、代表長さをステップ高さ H_2 、代表速度を U_0 としたときのレイノルズ数 Re_H は $Re_H=2000$ となる。初期条件はポテンシャル流れを与えた。

図7は $\partial\omega/\partial t$ の全格子点での絶対平均値の時間的な変化を示したものである。 $\partial\omega/\partial t$ の値は無次元時間 t が10までのごく初期の段階を除いて t が約180までは増加傾向を示し、それ以後は 10^{-2} 付近でほぼ一定に推移する。このことから t が180を超えると流れ場が平衡状態になるものと考えられる。

そこで、流れ場が平衡状態に達した $t=233$ における流れ関数の分布を図8に示す。ステップ後方に生じる再循環渦の形態は層流の場合と大きく異なり、いくつかに分裂しているのが認められる。さらに、再循環渦の後方において壁に張り付いた渦列が形成され、こ

(a) case 1 と case 3 の比較

(b) case 2 と case 4 の比較

(c) case 3 と case 4 の比較

図6 速度 u_1 の比較

表5 計算条件

grid points	Δx_1 min	Δx_2 min	spatial accuracy	time step
48X64:896X64 step 896X64 total 117760	0.03	0.01	2nd order	1/400

図7 $\partial\omega/\partial t$ の時間的な変化

図 10 各サンプリング点での ω , $\partial\omega/\partial t$ の時間的挙動

図 11 サンプリング点の配置

6. 結 言

乱流問題に対する計算方法として、MDQ法とRKG法とを組合せた計算手法を開発し、本手法を二次元後方ステップ流れに適用した。まず始めに、層流問題を取扱い、本手法により再付着点距離などのパラメータを正しく計算できることを確認した。次に、層流問題に対する本手法の有効性を踏まえ、じょう乱渦が自然発生する不規則な流れ（乱流）を取扱った。その結果、先端がいくつかに分裂した再循環渦や、その後方領域において、渦列状のじょう乱渦の発生がとらえられ、それらはカオス的な振る舞いをしていること

が確認された。今後は、入口にじょう乱を与えた場合との比較や、乱流統計量を算出し流れの定量的な吟味を行う考えである。また、三次元流れに本手法を適用することも検討中である。

文 献

- (1) 谷, 流体力学の進歩, 乱流, (1980), 129, 丸善.
- (2) Nallasamy, M., *Comput. fluids*, **15**-2 (1987), 151.
- (3) Zang, T. A. and Krist, S. E., *Theoret. Comput. fluid Dyn.*, (1989), 41, springer-Verlag.
- (4) 森西・小林, 第4回数値力学シンポジウム講演論文集, (1990), 383.
- (5) Roache, P. J. (高橋訳), コンピュータによる流体力学(上巻), (1978), 17, 構造計画研究所.
- (6) Satofuka, N., *Proc. Int. Symp. Comp. Appl. Math. Inf. Sci. Kyoto Univ.*, (1982).
- (7) Brandt, A., *Math. Comput.*, **31**-138 (1977), 333.
- (8) Kim, J. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, **59**(1985), 308.
- (9) Armaly, B. F., Durst, F. and Pereira, J. C. F., *J. fluid Mech.*, **127** (1983), 473.
- (10) Tokunaga, H., Satofuka, N. and Tanimura, Y., *Proc. ISCFD-Tokyo II*, (1986), 543.
- (11) Chevray, R.・小河原・飯田, 機誌, **91**-840 (1988), 1130.