一様等方性乱流の直接数値計算*

(パッシブスカラ変動の減衰)

宮内 敏雄^{*1}, 石津 貴史^{*2}

Direct Numerical Simulation of Homogeneous Turbulence (Decay of Passive Scalar Fluctuation)

Toshio MIYAUCHI and Takashi ISHIZU

Direct numerical simulations of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence with temperature diffusion were performed by using a spectral method with 64^3 Fourier modes. Temperature fluctuation was not so large, so we assumed that temperature is a passive scalar. We simulated two cases with Prandtl numbers of 0.71 and 0.20. During the decaying period, the turbulent kinetic energy dissipation rate decayed exponentially with time and the microscale Reynolds number changed from 30 to 17. Spectral distribution of the passive scalar fluctuation spread more widely than that of velocity fluctuation in the case of a Prandtl number of 0.71. In the case of a Prandtl number of 0.20, spectral distribution did not spread as widely, but two-point autocorrelation of the temperature fluctuation showed a negative value at large distance, which shows predominancy of the low wave number components.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Turbulent Mixing, Homogeneous Isotropic Turbulence, Spectral Method

1. 結 言

工学上の問題として現れる大部分の流れは乱流状態にあり、乱流の重要な作用の一つに乱流混合がある。乱流混合は流れ場が乱流状態になることにより熱伝達、物質伝達が促進される現象であり、熱機関や化学プラントなどにおいて重要な役割を果たしている。乱流混合の実験的解明や、数値計算による解析が試みられているが、乱流混合に関して不明な点が多く残されている。

温度場を扱う場合、温度変動に伴う密度変動を考慮にいれ、流体を圧縮性として取扱う必要がある。しかし温度変動が小さく密度変動を無視できる場合には流体を非圧縮性と仮定できる。このとき温度変動は速度場に対して影響は与えない。このようなスカラはパッシブスカラと呼ばれる。パッシブスカラ変動のスペクトル分布に対する理論が Batchelor⁽¹⁾ によって提唱されているが、この理論は流体の動粘性係数とスカラの拡散係数の比が零と無限大の極限の場合についてのもの

のであり、現実的なものではない。

このようなことから本研究では一様等方性乱流の減衰挙動と一様等方性乱流中のパッシブスカラとみなせる温度変動の減衰挙動を Pr 数が 0.20 と 0.71 の場合についてスペクトル法を用いた直接数値計算により求め、速度場と温度場の減衰挙動の相違を明らかにすることを目的としている。

2. 記 号

E : 空間平均乱流運動エネルギー

E_t : 温度変動エネルギーのスペクトル分布

E_u : 乱流運動エネルギーのスペクトル分布

E_{tp} : 波数 $k=1$ の温度変動エネルギーの割合

E_{up} : 波数 $k=1$ の乱流運動エネルギーの割合

F : 速度 u_1 のフラットネス

F_d : 速度 u_1 の x 方向一階微分のフラットネス

k : 波数ベクトル

k_i : 波数の i 成分 ($i=1, 2, 3$ は x, y, z に対応)

k : 波数ベクトルの絶対値

k_d : コルモゴロフ波数

u : 無次元速度

Pr : プラントル数

R_u : 温度の x 方向 2 点自己相関係数

* 平成 3 年 3 月 19 日 関西支部第 66 期定時総会講演会において講演。原稿受付 平成 3 年 3 月 25 日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 学生員、東京工業大学工学部。

R_{uu} : 速度 u_1 の x 方向 2 点自己相関係数

Re : レイノルズ数

Re_λ : マイクロスケールレイノルズ数

S : 速度 u_1 のスキュウネス

F : 速度 u_1 の x 方向一階微分のスキュウネス

T : 温度

Δt : 差分時間間隔

u_i : 速度の i 成分

x_i : 位置ベクトルの i 成分

ε : エネルギー散逸率

λ_d : コルモゴロフスケールに基づく波長

λ_t : 温度変動のマイクロスケール

λ_u : 速度変動のマイクロスケール

ν : 動粘性係数

θ : 無次元温度

τ : 無次元時間

ξ : x 方向の隔たり

ω : 渦度ベクトル

$\langle f \rangle$: 変数 f の空間平均

f^* : 変数 f の共役複素数

f' : 変数 f の平均値からの変動

$\hat{f}$: 変数 f のフーリエ係数

3. 基礎方程式および計算方法

本研究では温度変動をパッシブスカラとして取扱う。したがって基礎方程式は以下のような連続の式、非圧縮非定常三次元ナビエ・ストークス方程式とエネルギー保存式となる。ここで、これらの式は初期の二乗平均速度、計算領域の一边の長さ、平均温度によって無次元化されている。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

$$P = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Re \cdot Pr} \Delta \theta \quad (4)$$

本研究において速度場と温度場を以下のようにフーリエ級数を用いて展開し、スペクトル法による直接数値計算を行う。空間微分はフーリエ空間で行い、非線形項の計算は padding 法⁽²⁾を用いて aliasing 誤差を除去し物理空間において行った。

$$u_j(\mathbf{x}, t)$$

$$= \sum_{-N/2 \leq k_1 \leq N/2-1} \sum_{-N/2 \leq k_2 \leq N/2-1} \sum_{-N/2 \leq k_3 \leq N/2-1}$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{k}, t) e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} \dots \quad (5)$$

$$T(\mathbf{x}, t)$$

$$= \sum_{-N/2 \leq k_1 \leq N/2-1} \sum_{-N/2 \leq k_2 \leq N/2-1} \sum_{-N/2 \leq k_3 \leq N/2-1} \hat{T}(\mathbf{k}, t) e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} \dots \quad (6)$$

速度場の初期条件を決定するために、波数空間において乱数を用いてベクトルポテンシャルを与え、その回転を取り、等方条件、実速度条件、エネルギースペクトル分布⁽³⁾を満たすようにした。連続の式はベクトルポテンシャルの回転を取ることで自動的に満足される。乱数としてはベクトルポテンシャルの振幅に対して正規乱数を、位相に対して零から 2π の一様乱数を用いた。また初期のエネルギースペクトル分布としては減衰終期の近似形 $E_u(k) = Ak^4 \exp(-Bk^2)$ を用いた (図 6 参照)。ここで A, B は定数であり $A = 0.038 \text{ cm}^7/\text{s}^2$, $B = 0.140 \text{ cm}^2$ とした。

温度場の初期条件は次に示す実温度条件と変動エネルギースペクトル分布を満たすように与えた。

実温度条件

$$\hat{T}(-\mathbf{k}) = \hat{T}(\mathbf{k})^* \quad (7)$$

変動エネルギースペクトル

$$E_t(k) = 2\pi |\mathbf{k}|^2 \hat{T}(\mathbf{k}) \hat{T}(\mathbf{k})^* \quad (8)$$

$$T' = T - \langle T \rangle \quad (9)$$

初期温度変動スペクトル分布としては O'Brien ら⁽⁴⁾が用いた $E_t(k) = Ck^2 \exp(-Dk^2)$ を用いた (図 12, 13 参照)。ここで $C = 0.40 \text{ K}^2 \text{ cm}^3$, $D = 0.10 \text{ cm}^2$ とした。

計算領域としては $2\pi \text{ cm} \times 2\pi \text{ cm} \times 2\pi \text{ cm}$ の立方体を対象とし、計算格子は $64 \times 64 \times 64$ の等間隔格子を用い、境界条件としては x, y, z 方向に周期的境界条件を用いた。時間前進には対流項にアダムス・バッシュフォース法、圧力項に後退オイラー法、粘性項と拡散項にクランク・ニコルソン法を用い、差分時間間隔は実時間で $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ とした。なお計算結果は差分時間間隔 Δt で無次元化された時間 τ を用いて表している。本研究では代表長さを $2\pi \text{ cm}$ 、代表速度を初期変動速度の二乗平均 0.494 cm/s としたときの Re 数が 309, Pr 数が 0.20 と 0.71 の場合について計算を行った。初期速度場と温度場の積分長はそれぞれ 0.77 cm と 0.76 cm 、テイラー・マイクロスケールはそれぞれ 0.58 cm と 0.53 cm であり、マイクロスケール・レイノルズ数は 29.1 である。

4. 計算結果および考察

4.1 速度場 速度 u_1 の 2 点相関係数を図 1 に示す。 $\xi = \pi$ 付近における相関値はほぼ零であり、図 1 から速度場に関して十分な計算領域が確保されていることが確認できる。 $\xi = \pi$ 付近における相関値は時間とともに徐々に負の値を取るようになるが、これは変

動エネルギーに低波数成分が現れるためである。 Re_λ は図2に示すように初期に急激に減衰し、その後漸近的に減衰している。図3に空間平均乱流運動エネルギーを示す。図3から明らかなように乱流運動エネルギーは時間に対して指数関数的に減衰する。エネルギー散逸率も図4に示すように $\tau > 300$ で時間に関して指数関数的な減衰挙動を示している。図5にエネルギー散逸率から次式を用いて計算されるコロモゴロフ波数を示す。

$$k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4} \dots\dots\dots (10)$$

図5からコロモゴロフ波数は $\tau > 300$ で時間に対して線形的に減衰することがわかる。図6にエネルギースペクトル分布の時間変化を示す。時間とともに高波数にエネルギーが移動し、無次元時間 $\tau = 200$ 以降はス

ペクトル分布形がほぼ相似になっている。また、エネルギー値が十分に低い値まで計算されており、図6から速度場に関して十分な分解能で計算されていることがわかる。最低波数 $k=1$ のエネルギースペクトルを各時刻における乱流運動エネルギーで正規化したものを図7に示す。図7から時間とともに低波数成分の占める割合が徐々に増大していることがわかる。図8に速度 u_1 のフラットネスとスキュウネスを示す。フラットネスは減衰期間を通してほぼ3.0、スキュウネスは零となっており、このことから速度変動の分布がほぼ正規分布であることが確認できる。また、図9に速度 u_1 の x 方向の一階微分のスキュウネスとフラットネスを示す。フラットネスは4.0近傍の値を示し、スキュウネスは-0.50近傍の値を示しており Re_λ が同

図1 2点速度相関係数

図2 Re_λ の時間変化

(a) 対数目盛

(b) 線形目盛

図3 乱流運動エネルギーの時間変化

図4 エネルギー散逸率の時間変化

図5 コロモゴロフ波数

図 6 乱流運動エネルギーのスペクトル分布

図 7 $k=1$ の乱流運動エネルギーの割合 図 8 速度 u_1 のフラットネスとスキュウネス 図 9 速度 u_1 の縦微分のフラットネスとスキュウネス

程度の実験結果⁽⁵⁾に近いものとなっている。

4.2 温度場 Pr 数が 0.71 と 0.20 の場合の 2 点相関係数を図 10, 11 に示す。 Pr 数が小さいほど $\xi = \pi$ における相関が負の大きな値を示しており、変動エネルギーのうち低波数成分が支配的になることがわかる。したがって、低 Pr 数流体を対象とする場合には広い計算領域をとる必要があることがわかる。 Pr 数が 0.71 と 0.20 の場合の温度変動のスペクトル分布

を図 12, 13 に示す。図 12, 13 から Pr 数が高いほどスペクトルが高波数まで分布していることがわかる。速度場の分布と比較すると Pr 数が 0.71 の場合、速度場よりわずかに高波数側に分布を偏っており、 Pr 数がこれより高い場合、温度場を計算する際に、速度場よりも高い分解能が必要になることがわかる。温度の変動強度の時間変化を示した図 14 から、パッシブス

カラの減衰挙動は Pr 数によって異なり Pr 数が小さいほどパッシブスカラの減衰が著しいことがわかる。温度変動のテイラー・マイクロスケール λ_t 、速度変動のテイラー・マイクロスケール λ_u 、コルモゴロフ波数に基づく波長 λ_d を図 15 に示す。 Pr 数が 0.71 の場合温度変動のマイクロスケールは速度変動のマイクロスケールよりも小さな値になっている。速度場のマイク

図 10 2点温度相関係数 ($Pr=0.71$)

図 11 2点温度相関係数 ($Pr=0.20$)

(a) $\tau=0$

(b) $\tau=200$

(c) $\tau=400$

(d) $\tau=600$

図 12 温度変動のスペクトル分布 ($Pr=0.71$)

ロススケールとコルモゴロフ波数に基づく波長は $\tau=300$ 以降からほぼ同じ値となっている。最低波数 $k=1$ における温度変動エネルギーを各時刻における温度変動エネルギーで正規化したものを図 16 に示す。時間とともに最低波数成分の占める割合が徐々に大きくなっており、特に Pr 数が 0.20 の場合に顕著であり変動エネルギーのうち低波数波数成分が支配的となることがわかる。

5. 結 論

一様等方性乱流およびパッシブスカラの減衰挙動を明らかにするためにスペクトル法を用いた直接数値計算を行い、次のような結論を得た。

- (1) エネルギー散逸率は $\tau > 300$ で時間に関して指数関数的な減衰挙動を示す。
- (2) コルモゴロフ波数は $\tau > 300$ で時間に対して

図 13 温度変動のスペクトル分布 ($Pr=0.20$)

図 14 温度変動強度の時間変化

図 15 マイクロスケールの時間変化

図 16 $k=1$ の温度変動エネルギーの割合

線形的に減少する。

(3) パッシブスカラ変動のスペクトル分布は Pr 数が 0.71 程度で速度場よりもわずかに高波数側に広がり、高 Pr 数の流体を対象とする場合、速度場より高い分解能が必要になる。

(4) Pr 数が低くなるとパッシブスカラ変動の減衰が顕著になるとともに、変動エネルギーのうち低波数成分が支配的となる。したがって、広い計算領域の確保が必要になる。

本研究は文部省科学研究費、総合研究(A) (No.

02302043) の援助を受けた。記して謝意を表する。

文 献

- (1) Batchelor, G. K., *J. Fluid Mech.*, **5** (1959), 133.
- (2) Canuto, C., ほか 3 名, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, (1987), 84, Springer-Verlag.
- (3) Shaanan, S., ほか 2 名, *Rep. Dept. Mech. Eng.*, Stanford Univ., TF-6 (1975).
- (4) O'Brien, E. E. and Francis, G. C., *J. Fluid Mech.*, **13-3** (1962), 369.
- (5) Antonia, R. A., ほか 2 名, *J. FLuid Mech.*, **119** (1982), 55.