軸流圧縮機の特性曲線簡易計算法*

池 澤 一 昭^{*1}Simple Calculation Method for the Off-Design Performance
of Axial-Flow Compressors

Kazuaki IKESAWA

Horlock proposed the rapid calculation of the off-design performance of turbo machines, but the method gives inadequately accurate solution for the axial compressor. In this paper, the method is improved by introducing the representative characteristic curve and Mach-number of the compressor, and gives good agreement with the experimental data near the design point. The method may be of use in preliminary design studies of multi-stage compressors.

Key Words: Subsonic Flow, Axial Compressor, Performance Curve, Pressure Ratio, Temperature Raise

1. 結 言

軸流圧縮機の部分負荷特性を近似的に推定する方法は数多く発表されているが、最も簡便な方法の一つとして Horlock⁽¹⁾法がある。この方法はタービンにも圧縮機にも適用可能でかつ簡単であるが実機の性能を代表しているとは言い難い。そこで基本的な考え方を踏襲して、これに軸流圧縮機の代表的段落特性と代表マッハ数を導入して実機の性能を表現できるように改良した。この方法の特徴は詳細空力計算を行うことなしに概略の圧縮機特性曲線を描き得る点にある。しかし他方、速度レベルが上って遷音速レベルになると実性能との偏差が生じることや、静翼取付角変更や抽気運転などには対応できないという短所もある。

2. 圧 縮 機 モ デ ル

多段軸流圧縮機の一つの段落に注目すると、その段落の理論ヘッド上昇 H は次式で与えられる。

$$H = (u_2 C_{\theta 2} - u_1 C_{\theta 1}) / g \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに u , C_θ は周速および接線方向速度, g は重力の加速度であり、添字 1 は動翼入口, 2 は出口断面を表

す。流線は円筒面上にあり、かつ動翼入口の軸流速度は動翼出口のそれと等しいと仮定すると、式(1)は次のように書き換えられる。

$$g \cdot H = u(u - C_a \tan \beta_2) - u C_a \tan \alpha_1 \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに C_a は軸流速度, β は動翼から見た気流角度, α は静翼から見た気流角度(軸方向より測った角度)とする。流量係数 ϕ , 圧力係数 ψ を導入すると次式を得る。

$$\psi = 1 - \phi(\tan \alpha_1 + \tan \beta_2) \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに

$$\phi = C_a / u \quad \psi = g \cdot H / u^2 \quad \cdots \cdots (4)$$

設計点の値に添字 d 付けて区別すると

$$\psi_d = 1 - \phi_d(\tan \alpha_{1d} + \tan \beta_{2d}) \quad \cdots \cdots (5)$$

ここで設計点近傍では次式が成立するものと仮定する

$$\tan \alpha_1 + \tan \beta_2 = \tan \alpha_{1d} + \tan \beta_{2d} \quad \cdots \cdots (6)$$

式(3), (5), (6)より次式を得る。

$$\psi / \psi_d = 1 / \phi_d - (1 - \psi_d) / \phi_d \cdot \phi / \phi_d \quad \cdots \cdots (7)$$

Horlock は最後まで式(7)を用いているが実機における $\phi \sim \psi$ 特性は式(7)のごとく直線的ではなく放物線に近い形をしている。また本論文の目的は厳密解を得ることではなく近似解を得ることにあるので式(7)の代わりに下式を用いるものとする。

$$\psi / \psi_d = a - b(\phi / \phi_d - c)^2 \quad \cdots \cdots (8)$$

* 原稿受付 平成3年5月22日。

^{*1} 正員、川崎重工(株) (〒650 神戸市中央区東川崎町3)。

ここに a, b, c , は与えられた定数とする。

さてここで圧縮機段落を一つのモデルで置換することを考える。すなわち段落としての特性を保持した微小段落の集合体で代表させようというのである。微小段落 m 個が直列に連結しているものとする。微小段落の全温度上昇 $\Delta T'$ は m 個集まって実機の段落温度上昇 ΔT と同じであるためには、 $\Delta T' = \Delta T/m$ でなければならない。しかも圧力係数 ϕ も実段落と同じであるためにはモデルの周速 u' は実段落の周速 u に対し $u' = u/\sqrt{m}$ となっていなければならない。このとき、流量係数 ϕ' も同じとすればモデルの軸流速度 C_a' についても $C_a' = C_a/\sqrt{m}$ となっているはずであり流量が不足することになる。そこで微小段落を $\sqrt{m}$ 個並列に並べることが必要となる。このようにすれば ϕ も ϕ も実機と同じで微小段落の集合体に置換することができる。圧力係数の定義から $\phi \propto \Delta T/u^2$ であるが $m \rightarrow \infty$ とすると次式を得る。

$$\phi/\psi_a = (u_a/u)^2 dT/dT_a \dots\dots\dots (9)$$

3. 圧縮機特性曲線計算式

3・1 全温度上昇の計算式 圧縮機の環状断面積を通過する重量流量 G に注目すると次式を得る。

$$G/G_d = (\phi/\phi_a) \cdot (u/u_a) \cdot (\rho_{st}/\rho_{std}) \dots\dots\dots (10)$$

ここに ρ は密度を表し、添字 st は静的状態量を示す。マッハ数 M を導入すると

$$\rho/\rho_{st} = \{1 + (\kappa - 1)/2 \cdot M^2\}^{1/(\kappa - 1)} \dots\dots\dots (11)$$

ここに κ は断熱指数である。ポリトロプ効率 η_p およびポリトロプ指数 n を導入する。

$$n/(n - 1) = \eta_p \kappa / (\kappa - 1) \dots\dots\dots (12)$$

$$\rho/\rho_a = (T/T_a)^{1/(n - 1)} \dots\dots\dots (13)$$

式(11)を書き直すと下式を得る。

$$\rho_{st}/\rho_{std} = \left\{ \frac{1 + (\kappa - 1)/2 \cdot M_a^2}{1 + (\kappa - 1)/2 \cdot M^2} \right\}^{1/(\kappa - 1)} \cdot (T/T_a)^{1/(n - 1)} \dots\dots\dots (14)$$

ここで次の無次元量を導入する。ここに N は回転数を表す。

$$N/N_d = 1/\lambda \quad G/G_d = \xi \dots\dots\dots (15)$$

式(10)に式(14), (15)を代入する。

$$\frac{\phi}{\phi_a} = \lambda \cdot \xi \left(\frac{T_a}{T} \right)^{1/(n - 1)} \left\{ \frac{1 + (\kappa - 1)/2 \cdot M_a^2}{1 + (\kappa - 1)/2 \cdot M^2} \right\}^{1/(\kappa - 1)}$$

亜音速軸流圧縮機の各段入口のマッハ数はあまり高くなく、かつ後段になる程低下するのが普通である。そこで上式においてマッハ数の四次以上の項を省略すれば下式を得る。

$$\frac{\phi}{\phi_a} = \lambda \cdot \xi \left(\frac{T_a}{T} \right)^{1/(n - 1)} \{1 + (M^2 - M_a^2)/2\} \dots\dots\dots (16)$$

さらにマッハ数は $G/\sqrt{T}$ に近似的に比例するものと仮定すると $(M/M_a)^2 \approx \xi^2 \cdot (T_a/T)$ となるので式(16)は次のようになる。

$$\frac{\phi}{\phi_a} = \lambda \cdot \xi \left(\frac{T_a}{T} \right)^{1/(n - 1)} \{1 + M_a^2/2(\xi^2 T_a/T - 1)\} \dots\dots\dots (17)$$

式(8), (9)より ϕ/ψ_a を消去し、式(17)を代入して次式を得る。

$$\lambda^2 \frac{dT}{dT_a} = a - b \left[\lambda \xi \left(\frac{T_a}{T} \right)^{1/(n - 1)} \cdot \left\{ 1 + M_a^2/2 \times \left(\xi^2 \frac{T_a}{T} - 1 \right) \right\} - c \right]^2 \dots\dots\dots (18)$$

設計点の近傍を考えると T/T_a は 1 に近い値である。そこで次のごとく置換する。

$$T/T_a = 1 + \varepsilon \dots\dots\dots (19)$$

圧縮機入口では $\varepsilon = 0$ であり、圧縮機出口では次のごとくとする。

$$T_{II}/T_{IIa} = 1 + \varepsilon_{II} \dots\dots\dots (20)$$

ここに添字 II は圧縮機出口を示す。この場合 ε は小さい量と考えて ε の三次以上の項を省略すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_a}{T_a} &= \frac{d\varepsilon}{A + B\varepsilon + C\varepsilon^2} \\ d &= \lambda \xi \{ (1 - M_a^2/2) + M_a^2 \cdot \xi^2/2 \} - C \\ e &= \lambda \xi \{ (1 - M_a^2/2) + n M_a^2 \xi^2/2 \} \\ f &= \lambda \xi \{ (1 - M_a^2/2) + (2n - 1) M_a^2 \xi^2/2 \} \\ A &= a/\lambda^2 - b d^2/\lambda^2 - 1 \\ B &= 2 b d e / \{ (n - 1) \lambda^2 \} - 1 \\ C &= - b (e^2 + n d f) / \{ (n - 1)^2 \cdot \lambda^2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式(21)を圧縮機入口より出口まで積分すれば圧縮機出口における ε_{II} すなわち T_{II} が得られることになる。式(21)の右辺分母の判別式 $D = B^2 - 4AC$ の正・負によって積分形は次のようになる。ここに添字 I は圧縮機入口を示す。

$D > 0$

$$\ln \left(\frac{T_{IIa}}{T_I} \right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \frac{1 + 2C/(B - \sqrt{D}) \cdot \varepsilon_{II}}{1 + 2C/(B + \sqrt{D}) \cdot \varepsilon_{II}}$$

$D = 0$

$$\ln \left(\frac{T_{IIa}}{T_I} \right) = \frac{2}{B} \left(1 - \frac{1}{1 + 2C/B \cdot \varepsilon_{II}} \right)$$

$D < 0$

$$\ln \left(\frac{T_{IIa}}{T_I} \right) = \frac{2}{\sqrt{-D}} \tan^{-1} \left\{ \frac{(B + 2C \cdot \varepsilon_{II})}{\sqrt{-D}} \right\} - \frac{2}{\sqrt{-D}} \tan^{-1} (B/\sqrt{-D}) \dots\dots\dots (22)$$

ここに T_I は圧縮機入口の温度で既知である。したがって、式(22)より未知数 ε_{II} が算出されることになる。 ε_{II} が得られると式(20)により T_{II} が求められること

になる。以上の計算ではポリトロプ指数 n を定数として取扱ってきたが後に示すごとく T_{11} の計算には大きな誤差はないようである。

3・2 全圧力比の計算 3・1節で計算された全温度上昇より全圧力比を求める計算式はポリトロプ効率 η_p を用いると次のように表される。

$$P_{11}/P_1 = (T_{11}/T_1)^{\kappa \cdot \eta_p / (\kappa - 1)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

全温度計算では、 η_p を定数として扱ったが、これでは精度が出ないので η_p は運転条件によって変化する量とする。すなわち各作動点のポリトロプ効率と設計点のそれとの比 η_p/η_{pd} は流量係数比 ϕ/ϕ_d および回転数比 $N/N_d = 1/\lambda$ の函数として恒常的に与えられるものとする。ただし流量係数は圧縮機の入口 ϕ_1 と圧縮機出口 ϕ_{11} の値は同じではない。そこで圧縮機の代表流量係数 $\bar{\phi}$ を定義してこれを用いるものとする。

η_p/η_{pd} の値は圧縮機の設計法、使用翼形などによっても異なるはずのものでありそれぞれの圧縮機に適した関係式を用いるべきである。著者の経験では次式で代表してもほぼ満足する解が得られるようである。

$$\eta_p/\eta_{pd} = \{1 + a_1(1 - \bar{\phi}/\bar{\phi}_d) + a_2(1 - \bar{\phi}/\bar{\phi}_d)^2\} \times \{1 - a^3(1/\lambda - 1)^2\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに a_1, a_2, a_3 は定数であり、類似圧縮機の特異より導出されるものとする。また $\bar{\phi}/\bar{\phi}_d$ は次式で与えるのがよい。

$$\bar{\phi}/\bar{\phi}_d = (1 - \lambda/2)\phi_1/\phi_{1d} + \lambda/2 \cdot \phi_{11}/\phi_{11d} \quad \dots\dots\dots (25)$$

3・1節の結果を用いると

$$\left. \begin{aligned} \phi_1/\phi_{1d} &= \lambda \cdot \xi \{1 + M_d^2(\xi^2 - 1)/2\} \\ \phi_{11}/\phi_{11d} &= \lambda \cdot \xi / (T_{11}/T_{11d})^{1/(n-1)} \\ &\times [1 \times M_d^2/2 \cdot \{\xi^2 / (T_{11}/T_{11d}) - 1\}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

式(24)～(26)の結果を用いて式(23)により全圧力比 P_{11}/P_{1d} を算出することができる。

4. 実機への適用例

著者の所属するグループで設計した高圧力比軸流圧縮機（以下 A 圧縮機と称す）および手元にあった 2 種の軸流圧縮機（以下 B および C 圧縮機と称す）に本簡易推定法を適用して実測値との差違を見ることにする。

A 圧縮機の場合は高圧機なので比熱の比 κ は定数ではなく温度の関数として扱っているが、本推定法を適用するに際しては $\kappa = 1.4$ 一定として計算することになる。このため設計点の温度比と圧力比を用いると効率は見掛け上過大評価することになるが、それには目をつぶって見掛けの効率を用いて処理した。B および C 圧縮機は実測値を整理した性能曲線の形でしかデータがなく、実測データの処理方法も不明であり、

設計点についても明確でないので推定値を用いざるを得なかった。

計算に用いる各種定数は圧縮機の計算法によって異なるはずであるがここでは以下に示すごとく仮定している。

式(8)の a, b, c

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + 0.0855 \cdot \pi_{st}^3 \\ b &= 0.95 \pi_{st}^3 \\ c &= 0.7 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに π_d は設計点圧力比であり、段数を Z とすると平均段落当たり圧力比 π_{st} は次式で与えられるものとする。

$$\pi_{st} = \pi_d^{(1/Z)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(24)の a_1, a_2, a_3

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0.3 \\ a_2 &= -2 \\ a_3 &= -0.08 \pi_d^{1.5} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

M_d は各段落入口の平均径における絶対マッハ数の設計点の値であるが、全段の平均的な値（厳密である必要はない）を用いた。B, C 圧縮機については推定値である。

4・1 A 圧縮機の計算結果 計算された無次元全温度上昇値を図 1 に示す。実線が本推定法によるもので、黒丸は実測値を示す。 $N/N_d = 0.8 \sim 0.95$ の領域では実測値とよい一致を示すが、 $N/N_d = 1.0$ の場合は大きく異なっている。本圧縮機の場合は設計回転数では初段動翼相対流入マッハ数が高く、チップ付近では翼背面で局所的に超音速となり翼弦長の約 30% が 1.0 以上となることがわかっている。このため動翼入口の絶対マッハ数は亜音速であっても圧縮機特性曲線は垂直となる。このことは本推定法は遷音速域には使用できないことを示すが、逆に言えば亜音速域では非常によい近似を与えることがわかる。なお図 1 中の点線は Horlock 法をそのまま適用した結果を示すもので、回転数と流量の関係はほぼ正しいが特性曲線の形状については実態を示していないことがわかる。これは式(7)、すなわち ϕ/ϕ_d と ϕ/ϕ_d の関係を一次式としている

表 1 各圧縮機的设计点仕様

Compressor	A	B	C
κ_d	12.49	4.3	5.0
T_{1d}/T_{1d}	2.204	1.593	1.671
n	1.457	1.469	1.469
M_d	0.5	0.45	0.45
No. of Stages	12	11	12

ることによる。

図2に無次元流量と圧力比の関係を示すが、先に述べたごとく $N/N_d=1.0$ では当然のことながら近似度は悪いが、他の回転数の特性曲線の形は妥当なものと言える。図2中の点線は計算した断熱効率比 η' (設計点の効率で除したもの) を示す。効率について実測値と計算値を比較するために $\eta=0.97, 0.93, 0.85$ の3本の等効率線を抽出、重さねたものが図3である。実測値は相当のばらつきがあり等効率線が描きにくいだが、とにかく図3を見る限り傾向は似ているが両者はよい一致とは言い難い。

4.2 BおよびC圧縮機の計算結果 B圧縮機については計算した流量/圧力比特性を図4に示す。計算結果と実測値(実測性能曲線より抽出)とを比較してみると、全体的には一致しているが $N/N_d=0.962, 0.893$ では特性曲線の傾斜に差がある。またサージン

図3 A圧縮機 効率比較

図1 A圧縮機 全温度上昇

図4 B圧縮機 全圧力比

図2 A圧縮機 全圧力比

図5 C圧縮機 全圧力比

グ限界の近傍点の圧力の計算値が低いことがわかる。後者については設計点の選定（明確なデータがなかったので性能曲線上で妥当と思われる点を選んだ）に問題があったことを示すものと思われる。

C 圧縮機の計算結果を図 5 に示すが、この場合もサージング限界近傍の計算値が実測値よりも低くなっているのは B 圧縮機と同じである。また $N/N_d=1.058$ の特性格線はあたかも平行移動したかのごとくになっているが、他の特性格線との関係から見ると計算値のほうが正しいのではないと思われる。想像するに実測性能の回転数の処理に誤りがあったのではなかろうか。

いずれにしても簡単な計算であるにもかかわらず全体的にはほぼ正しい性能曲線が得られることがわかる。

5. 結 び

本簡易特性格線推定法では、圧縮機を微小圧縮機の集合体と見ることによって圧縮機特性を表す微分式を導き、これに圧縮機段落を代表する段落特性および設計点の要目を導入して圧縮機出口の温度上昇を算出、これにポリトロープ効率の関係式を入れて圧力比を求める式を導いた。本法は圧縮機内の詳細計算を行うことなしに、簡単ないくつかの設計点に關与した定数を用いることにより圧縮機特性格線の近似値を求めることができるが、他方翼面上に超音速域が出現するような高速域では使用できない欠点がある。

文 献

- (1) Horlock, J. H., *A Rapid Calculation Method for The Off-design Performance of Compressors and Turbines*, No. 40 (1952), M. I. T. Gas Turbine Lab.