長方形断面を有する曲がり流路内流れに関する数値実験*

(ホップ分岐点以下における流れの挙動について)

山本正明^{*1}, 杉山司郎^{*1}, 西川英利^{*2}

Numerical Investigations on Flows in a Curved Duct of a Rectangular Cross Section (On Behavior of Flows Occurring below the Hopf Bifurcation)

Masaaki YAMAMOTO, Shiro SUGIYAMA and Hidetoshi NISHIKAWA

It is simulated numerically by the MAC method how a flow pattern evolves in a curved duct as the Dean number increases and then decreases. The duct has an aspect ratio of 2 and a curvature ratio of 8. Fully developed and unsteady flows are calculated by the condition that pressure gradients are made to fall and then kept constant, and by the initial condition that they were suddenly given to move fluid in a stationary state. The flows agree with them asymptotically as the pressure gradients are given to the stationary state. The flows become a pair of vortices and stabilize. The fix point which corresponds to the flow attracts orbits starting from the other points on a phase plane of velocity. No hysteresis is found near the Hopf bifurcation point. For this reason, the calculation shows that the Hopf bifurcation is supercritical.

Key Words: Fluid Mechanics, Pipe Flow, Numerical Analysis, Secondary Flow, Unsteady Flow, Fully Developed Flow, Curved Duct, Rectangular Cross Section

1. ま え が き

曲管内流れは各種の流体機械や熱交換器などの管路系においてよく見受けられる。しかしながら、曲管内流れは直管内流れと比較して定性的に大いに異なり複雑な流れを呈する。これは、主流と直角な方向に働く遠心力と曲管壁面付近で支配的な粘性力との相互作用によって主流と直角な断面において二次流れが生じることによる。この二次流れは主流方向の圧力こう配の増加とともに対称な1対の渦から種々の流れパターンに変化することが知られている。

最近、このような流れの遷移すなわち分岐現象の解明が活発に行われるようになってきた⁽¹⁾⁽²⁾。著者らもアスペクト比=2、曲率半径比=8の曲がり流路内流れにおいてLDVによる流れ場の測定実験⁽³⁾を行い、定常で対称な1対の渦いわゆる主二次流れ渦が周期的に変動することを明らかにした。また、実験で使用された曲がり流路に対し、完全に発達した流れ条件の下で静止状態に一定の圧力こう配を急激にかけ続けて得られる非定常流について数値実験⁽⁴⁾した。この数値計

算からも定常な主二次流れから周期的流れに遷移するホップ分岐現象が確認された。

本報告では、上に述べられた数値実験に引き続いて静止状態のみならず、ある状態から急激に圧力こう配をかけ続けて得られる非定常流が種々の圧力こう配について数値実験される。特に、二次流れを代表する断面内の1点を取り、そこでのホップ分岐点以下における数値解やそれに対応する流れの挙動について解明する。ホップ分岐が生じる臨界圧力こう配 C は速度位相平面上の軌道やスペクトル分布から $C=6.75 \times 10^4$ から 6.90×10^4 の範囲内に存在することがすでに指摘されている。この臨界圧力こう配を固有値やヤコビ行列式などによって数値的に求め、さらにホップ分岐点における流れやヒステリシス現象についても述べる。つづいて、臨界圧力こう配以上の流れを初期条件として圧力こう配を臨界値以下に急激に低下させて得られた流れは、低ディーン数で通常見られる主二次流れ渦に一致することを明らかにする。さらに、この流れに対応する数値解の軌道を速度位相平面上で考えることにより、数値解の一意性および安定性についても言及する。

* 原稿受付 平成3年6月12日。

^{*1} 正員, 大阪工業大学 (〒535 大阪市旭区大宮 5-16-1)。

^{*2} 准員, ノーリツ鋼機(株) (〒640 和歌山市梅原 579-1)。

2. 基礎方程式と数値計算

本報告で使用される座標系を図1で示す。基礎方程式系および数値計算の諸パラメータは急加速におけるそれら⁽⁴⁾と同じである。ただし、計算の初期条件として、静止した状態から急激に一定の圧力こう配 C をかけ続けて得られた漸近流れ ($t \gg 0$ における流れ) が用いられた。その際、急加速と急減速の場合とは、無次元化⁽⁴⁾ で用いられた代表速度に含まれる圧力こう配が異なる。したがって、本報告の初期条件は急加速で得られた流れを急減速で用いられた圧力こう配で換算して求められた。ここで、 C は無次元圧力こう配 $-1/(\rho\nu^2/a^2)\partial P/\partial\theta$ である⁽⁴⁾。

次に、固有値およびヤコビ行列式の計算式を導く。曲管内流れに対するナビエ・ストークス方程式と連続式とを連立させると、2 従属変数を含む基礎式

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{f} \quad \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{u}$ は速度ベクトル (u, w)、 $\mathbf{f}$ は $\mathbf{f} = (f_1, f_3)$ であり x および θ 方向のフォース項をそれぞれ表す⁽⁴⁾。この方程式系を $\mathbf{f}(\mathbf{u}, w) = 0$ となる定常な数値解 $\bar{\mathbf{u}}$ について線形化すると、

$$\partial \xi / \partial t = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\xi \quad \dots\dots\dots (2)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \xi$ 、 $D\mathbf{f}$ は行列 $[\partial f_i / \partial u_j] (i, j = 1, 2)$ である。定常解 $\bar{\mathbf{u}}$ 近傍における数値解の非線形挙動は $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})$ の固有値による線形的な挙動によって近似でき⁽⁵⁾、その近傍における数値解の安定性および周期性などが明らかにされる。また、固有値と関連して、行列式 $\partial(f_1, f_3) / \partial(u, w)$ いわゆるヤコビ行列式の非零点が分岐しないための一つの条件であることが知られている⁽⁶⁾。そこで、ホップ分岐点付近でのヤコビ行列式の挙動も調べる。

3. 数値計算結果

ホップ分岐点以下の流れのうち、まず断面内の1点 $x=0.25, y=0.5$ におけるホップ分岐点付近の流れを

図1 座標系

取扱う。この位置が選ばれたのは、同じ流路形状で行われた実験⁽³⁾ や数値計算⁽⁴⁾ によって二次流れ場の特徴がよく把握できると考えられたことによる。この位置においてホップ分岐が生じる臨界圧力こう配は速度位相平面上の数値解の軌道から推定するいわゆる‘視察法’によってすでに予想されている⁽⁴⁾。そこで、臨界圧力こう配を固有値やヤコビ行列式から確認し、さらにホップ分岐付近の流れを調べた。

まず、静止状態に圧力こう配を急激にかけ続けて得られた数値解の固有値を図2(a)~(c)で示す。これらの図はある圧力こう配に対し各時間ステップにおける固有値を複素平面上でプロットしたものである。図2(a)は、 $C=6.840 \times 10^4$ に対する分布であり、この圧力こう配では実固有値しか表れなかった。最初に虚数部が表れた圧力こう配は $C=6.849 \times 10^4$ で、それを図2(b)で示す。また、図2(c)は $C=6.860 \times 10^4$ の

(a) $C=6.840 \times 10^4$

(b) $C=6.849 \times 10^4$

(c) $C=6.860 \times 10^4$

図2 複素平面上の固有値

分布を示し、複素固有値の分布は円形となった。圧力こう配の増大とともにその円の半径は減少した。図2(b)および図2(c)で示される固有値は、時間ステップにつれて複素固有値と実固有値が交互に現れた。

図3は各圧力こう配について得られたヤコビ行列式

図3 各圧力こう配に対するヤコビ行列式

(a) $C = 6.820 \times 10^4$

(b) $C = 6.849 \times 10^4$

図4 ホップ分岐における速度位相平面上的軌道

の最大値、最小値および平均値(図3中で黒丸)を示す。図3からわかるようにヤコビ行列式の最大値が最初に零を超える圧力こう配は $C = 6.840 \times 10^4$ であった。その圧力こう配より上では、ヤコビ行列式の最大値と最小値との差の絶対値は指数的に増大した。

さらに、速度位相平面上における数値解の軌道から見た詳細な結果を図4で示す。まず、静止状態から急激に圧力こう配 $C = 6.820 \times 10^4$ をかけ続けて得られた数値解の軌道を図4(a)で示す。この圧力こう配付近を境として軌道は渦状の一点収束から極限閉軌道収束に遷移し、この圧力こう配で閉軌道はもっともよく収束した。すなわち、漸近的な軌道は小さな円となり、その円の大きさは、 $u = 6.01 \pm 0.02$, $v = 16.66 \pm 0.01$ であった。この圧力こう配以上ではその軌道の半径は漸次大きくなり、一例として、複素固有値が生じた $C = 6.849 \times 10^4$ に対する軌道を図4(b)で示す。

つづいて、ホップ分岐点下の流れについて計算した結果を示す。図5は圧力こう配 C を臨界圧力こう配以下へ急激に低下させた場合におけるディーン数(以下、 De 数と呼ぶ)の時間的变化を示す。ここで、初期条件として $C = 6.930 \times 10^4$ における対称な1対の渦、非対称な四つの渦および対称な2対の渦の状態⁽⁴⁾ が用いられた。これらの初期条件で得られた De 数の変化を破線、点線および実線でそれぞれ示す。ここで、 De 数は平均主流速度および水力学平均直径によって定義された⁽⁴⁾。この定義で流路寸法や粘性係数は一定であるので、結局 De 数の変化は断面について平均化された主流の変化を表し、この主流の変化は断面で平均化された二次流れのマクロな変化を示唆する。図5で示さ

図5 各圧力こう配に対するディーン数の変化

れるようにいずれの場合にも De 数は同じ一定値に漸近的に収束し、これらの漸近値は静止状態から急激に圧力こう配をかけ続けて得られた値に一致した。 $C=6.000 \times 10^4$ および 4.000×10^4 において対称な 2 対の渦を初期条件とする De 数は漸近的な収束値より一度下がったのち下から近づくこと、すなわち流れ方向の管摩擦抵抗が一時的に増大することがわかった。

図 6 はホップ分岐点以上の種々の漸近流れを初期条件⁽⁴⁾として $C=6.000 \times 10^4$ に圧力こう配を低下させた場合における De 数の時間的変化を示す。 De 数が一時的にもっとも低下しているのは、 $C=6.930 \times 10^4$ における対称な 2 対の渦を初期条件としたものであるが、いずれの初期条件に対しても De 数は漸的に一定値に収束した。

つづいて、断面内の流れ場を見るために、 $C=6.000 \times 10^4$ での流れを取り上げる。まず、静止状態にその圧力こう配を急激にかけた場合における流線図を図 7 (a)、急激に低下させた場合の流線図を図 7 (b)で表す。両者の流線はほとんど一致し、いずれの計算も主二次流れ渦を表す。これらのストークスの流線関数の差異は相対誤差で最大 0.24% 程度であった。

4. 考 察

ホップ分岐が生じる原因として、基礎式自体がそのような性質を内包しているのか、あるいは数値計算に含まれる種々の誤差が微小かく乱として作用し分岐点で不安定となった定常解から安定な周期解へ遷移させ

られるものと思われる。いずれにしても遷移が生じるのは非線形性による効果であることは明らかである。

数値計算の誤差としては、差分近似による打ち切り誤差、計算機のハードウェアによる丸め誤差、さらに掃出し法による誤差や反復計算の収束誤差などが考えられる。本数値実験で MAC 法を用いたのは、この計算法がよく用いられすでに確立されているものと考えたからである。打ち切り誤差に関連するメッシュ間隔、丸め誤差に関連する単精度計算は計算機的能力や処理速度を考慮して決められた。いくつかの圧力こう配に対して、メッシュ間隔を小さくしたり、倍精度で計算したが、流れは本質的には変化しないように思われた。また、計算機の記憶容量を考慮して圧力の反復計算における掃出し法として逐次置換法⁽⁷⁾を用いた。この方法は同時置換法とは異なって渦対の対称性を破るような微小かく乱を生じる。

急激に圧力こう配をかけた場合、ホップ分岐が生じる臨界圧力こう配は $6.75 \times 10^4 < C < 6.90 \times 10^4$ の範囲に存在することが著者ら⁽⁴⁾によって予想されていた。この結果は速度位相平面上における数値解の軌道の挙動およびスペクトル分布における基本周波数の存在などから推測された。また、圧力こう配の与え方の条件は異なるが、周期流れの存在は同じ流路を用いた実験⁽³⁾でも確認された。ここで、ホップ分岐の定義⁽⁵⁾はある定常解の分枝上において式(2)の $Df(\bar{u})$ に対する複素固有値の実数部が負から正数になることである。このことは、定常な流れが不安定となる点、言い換えると安定な周期流れが生じる点でもある。

ホップ分岐点の考察に入る前に、説明の都合上まず

図 6 各初期条件に対するディーン数の変化

(a) 静止状態に圧力こう配をかけた場合 (b) 圧力こう配を急低下させた場合

図 7 流線図 ($C=6.000 \times 10^4$, $t=5$)

流路断面の1点 $x=0.25, y=0.5$ における分岐図を図8で示す。図8は各圧力こう配に対して速度成分 u の最大および最小値をプロットしたものであり、原点から伸びる1本の曲線(最大値と最小値が一致する)は主二次流れ渦、二つに分かれたそれぞれの実線は周期解の分枝に対応する。また、破線は不安定になった主二次流れ渦の分枝を推測して描かれている。ただし、図8の分岐図で主二次流れ渦の分枝が $C=6.75 \times 10^4$ 付近ですでに分岐しているように見えるのは、その圧力こう配で見られる過渡的な減衰周期流れ⁽⁴⁾の影響が現れているからである。

まず、固有値から見たホップ分岐点の考察に入る。図2(a)および図2(b)から明らかなように $C=6.849 \times 10^4$ において正の実部を伴った複素固有値が最初に現れた。複素固有値の実数部が正であることは、上で述べられたような微小かく乱が発達して定常な主二次流れ渦の性質を変えることを意味する。一方、虚数部が存在することは、流れが周期的になることを示す⁽⁵⁾。これにより、実固有値に対応する主二次流れから複素固有値に対応する周期流れに遷移したことがわかる。このことを分岐図8で示すと、原点から伸びる実線に対応する主二次流れ渦は $C=6.849 \times 10^4$ において破線で示されるような不安定な分枝に変化する。この破線の分枝上で主二次流れ渦は微小かく乱に対して不安定であり、実線で示される安定な周期解の分枝に跳躍するように思われる。

次に、速度位相平面上における数値解の軌道を見ると、図4(a)で示されるようにホップ分岐点は $C=6.820 \times 10^4$ で生じているように思われる。ちなみに複素固有値が生じる圧力こう配 $C=6.849 \times 10^4$ における軌道は図4(b)で示され、図4(b)から判断するかぎり軌道はすでに極限閉軌道に遷移しているように思わ

れる。

上に述べられた固有値および数値解の軌道からホップ分岐点を推測する。まず、固有値の計算は特に分岐点付近で数値的な誤差に敏感に依存すると思われる。もちろん、速度位相平面上の軌道から分岐点を推測する視察法もその分岐点を厳密に求めることは困難である。例えば、複素固有値が生じる $C=6.849 \times 10^4$ における軌道[図4(b)参照]は収束の途中であって、無限時間ステップの数値計算が許されるとすれば、その軌道は1点に収束する可能性もあり得る。したがって、数値的な誤差が不可避である数値実験からホップ分岐点を厳密に求めることは難しい。ゆえに、ホップ分岐が生じる臨界圧力こう配は $6.820 \times 10^4 < C < 6.849 \times 10^4$ の範囲内に存在すると考える。これらの圧力こう配の範囲を De 数のそれらに換算すると、 $161.2 < De < 161.7$ になる。

ヤコビ行列式について考察する。ヤコビ行列式の零点は、二つの実固有値のどちらかの固有値が零となるような定常解から定常解への分岐点である可能性がある。その値が零となる臨界圧力こう配は図3より $C=6.840 \times 10^4$ であった。この値はホップ分岐の臨界圧力こう配の範囲内であり、本数値実験からは定常解への分岐は認められなかった。たとえ定常解への分岐が存在したとしても、その種の分岐はきわめて限られたデイン数の範囲で生じるように思われる。

次に、ホップ分岐の臨界値以上の圧力こう配をかけたのち低下させて、分岐の種類を調べた。速度位相平面上の軌道や固有値から見るかぎり、ホップ分岐点においてヒステリシス現象は認められなかった。したがって、ホップ分岐は超臨界分岐とみなせる。ただし、数値計算に伴う種々の誤差のオーダは詳しく評価されていないが、この結果は対称性を破るような微小かく乱も存在する状態で得られたものであることを付記する。

図5および図6で示されるように、種々の初期状態からホップ分岐点を経て圧力こう配を急激に低下させた場合、その得られた流れは定常で対称な1対の渦であり低 De 数域で見られる主二次流れ渦に漸近的に一致する。しかしながら De 数が一定値に収束する前の過渡期では、2対の対称渦を初期値とする流れは他の初期状態による流れと比較すると主流が減速される。したがって、二次流れ成分が一時的に増大し、流動抵抗も大きくなるように思われる。

最後に、主二次流れ渦の一意性と安定性について考察する。一般的に言って、低 De 数における数値解は安定で一意的であることが言われている⁽⁶⁾。ここで、

図8 分岐図

図 9 速度位相平面上的の数値解の軌道

定常な主二次流れ渦に対応する数値解を速度位相平面上で考えると、その数値解は平衡点すなわち点アトラクタとして考えられる。図 9 においてその点アトラクタを白抜き丸印、 $C=30.000 \times 10^4$ における各初期条件に対応する位置を黒丸で示し、これらの点から出発して点アトラクタに収束する軌道を表す。低 De 数における数値解は、図 9 において斜線で示されるような通常考えられる種々の初期条件から出発する軌道を吸引する。もちろん、点アトラクタ近傍から出発する軌道も吸引するので、この点アトラクタは大域的に安定である。また、斜線で示されるような広範囲な領域から出発する軌道を点アトラクタが吸引しており、図 9 の結果は主二次流れ渦の一意性を数値実験的に示唆しているように思われる。

5. む す び

本数値実験は断面内の 1 点 ($x=0.25, y=0.5$) におけるホップ分岐点以下の流れについて詳細に検討し

た。まず、ホップ分岐が生じる臨界圧力こう配について、固有値、ヤコビ行列式および速度位相平面上における軌道の挙動から考察した。ホップ分岐点の定義である複素固有値の実部が負から正数になる圧力こう配は $C=6.849 \times 10^4$ であった。また、ヤコビ行列式の最大値が最初に零になる圧力こう配は $C=6.840 \times 10^4$ であった。しかし、速度位相平面上の軌道から推測するかぎり、その軌道は $C=6.820 \times 10^4$ において一点収束から極限閉軌道に遷移するように思われた。これらの結果より、ホップ分岐が生じる臨界圧力こう配は $6.820 \times 10^4 < C < 6.849 \times 10^4$ の範囲内である。また、ホップ分岐点でヒステリシス現象は認められず、したがってその分岐は超臨界分岐であることがわかった。

臨界値以下に圧力こう配を急激に低下させて得られた数値解は漸近的に主二次流れ渦に収束した。また、この数値解は安定でかつ一意であることが、速度位相平面における点アトラクタの吸引域を考えることにより数値的に証明された。

文 献

- (1) Winters, K. H., *J. Fluid Mech.*, **180**(1987), 343.
- (2) Daskopoulos, P. and Lenhoff, A. M., *J. Fluid Mech.*, **203**(1989), 125.
- (3) Sugiyama, S., ほか 2 名, *Proc. 3rd Jpn.-China Joint Conf. Fluid Mach.*, (1990).
- (4) 杉山・ほか 3 名, *機論*, **57**-533, B(1991), 18.
- (5) Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Appl. Math. Sci.*, **42**(1986), 42, Springer-Verlag.
- (6) Iooss, G. and Joseph, D. D., *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, (1980), 61, Springer-Verlag.
- (7) ローチェ(高橋訳), コンピュータによる流体力学(上), (1984), 177, 構造計画研究所.
- (8) ラジゼンスカヤ(藤田訳), 数理解析とその周辺, **25**(1979), 86, 産業図書.