一様流に流される渦の流出境界条件の検討*

戴 毅^{*1}, 小林 敏 雄^{*2}Numerical Analysis on Outflow Boundary Condition
of Vortex Convection with Uniform Mean Flow

Yi DAI and Toshio KOBAYASHI

In order to investigate the fundamental rule for obtaining the adequate outflow velocity boundary condition of spatially developing unsteady flow, numerical simulation was performed for a simple model problem—a vortex convected with uniform mean flow by means of the pseudospectral matrix element (PSME) method. The results show that for the high Re number flows, the convective for mulation can be an accurate and a stable outflow velocity boundary condition if it is used together with the pressure solver enable to ensure divergence free on boundary.

Key Words: Numerical Analysis, Boundary Condition, Vortex, Viscous Flow, Unsteady Flow, Spatially Developing Flow, Spectral Method, Divergence Free

1. 結 言

空間発達流を数値計算する際に計算領域をある場所で切断する必要がある。これは本来の物理境界ではないが、数値解を得るために作られた‘境界’で、速度の流出境界条件を与えなければならない。適切な流出境界条件について、基本的に要求されることは以下に示される。流出境界条件による数値誤差は境界の上流側にじょう乱を与えず、安定に計算を行うことができる。その流出境界条件によって計算した物理量の上流側分布は各瞬時に定性的および定量的に適当に真の分布と一致する。これらの要求を満足できる流出境界条件を見つけるためにはどのような原則に基づくべきであるかについては、明らかでないように思われる。本論文には、後述するような高精度で境界条件を課すことができるスペクトル法を用いて、二次元一様流中で流される一つの渦が流出境界を通過するというもっとも単純な流れ場の数値シミュレーションをし、その適切な流出境界条件を検討することによって、流出境界

条件に関する考え方を示す。

非定常空間発達の流れの数値計算では計算機の記憶容量により制限される格子数で現象に要求される寸法の計算領域を取扱わなければならないので、できるだけ高い解像能を持つ三次元非周期境界問題を取扱うことができるスペクトル空間離散法が望ましい。最近、Ku⁽¹⁾によって Pseudospectral Matrix Element (PSME) 法が提案されたが、これは計算空間を NE 個の要素に分け、各要素内の物理量の分布を Chebyshev 関数で離散化する Collocation 法の一つである。本論文にはさらに離散化精度と計算の安定性を改善するため、Chebyshev 関数の代わりに Legendre 関数を採用した。

非圧縮流では圧力は非常に特殊な役割を持っており、瞬時速度場の発散なしを保証しなければならない。しばしば用いられる標準陽解法は圧力境界条件を運動方程式の境界に垂直な成分より導くため、境界で発散なしを保証しない。Ku⁽²⁾は Chebyshev-Collocation 法で、境界上でも連続の式を満たす三次元非周期問題の陽的な解法を提案した。

本論文では、速度の流出境界条件について対流速度境界条件の有効性を数値実験によって検証した。この数値実験の際に計算の全ては圧力解法としては連続の

* 原稿受付 平成3年6月24日。

^{*1} 正員、東京大学大学院。

^{*2} 正員、東京大学生産技術研究所(●106 東京都港区六本木7-22-1)。

式を全領域で満たす Ku の手法を用いた。この圧力解法の問題についても本論で検討を行い、その他のいく種類かの圧力解法による数値実験も行った。この実験により境界上で連続の式を満足しない圧力解法と流出境界条件との連結によって発生する誤差が数値計算の安定性に与える影響を明らかにした。

2. 空間離散法

計算空間を NE 個の要素に分け、各要素内に $N+1$ 個 Collocation 点を置く。本論文には各要素内にこの離散点として Legendre Gauss Lobatto 点: $[r_1=1, r_{N+1}=-1, r_j(j=2, 3, \dots, N)$ は L_N の零点] を採用する。ただし、 L_N は N 次 Legendre 関数の一階微分である。ここで、 $k=j-1$ で、 k 次 Legendre 関数は次の式で定義される。

$$L_k(r) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^l (2k-2l)!}{2^k l! (k-l)! (k-2l)!} r^{k-2l} \quad \dots (1)$$

ここで、 $\left[\frac{k}{2}\right]$ は $\frac{k}{2}$ の整数部分である。要素 e の各点の座標は次の式で換算される。

$$x_j = a^e + (b^e - a^e) \frac{1-r_j}{2} \quad \dots (2)$$

ここで、 a^e と b^e は要素の始点と終点座標である。要素 e 内の関数 f_j^e の微分は次の式によって離散化される。

$$f_x^e(x_i) = \frac{1}{L^e} \sum_{m=1}^{N+1} \hat{G} \hat{X}_{i,m}^{(1)} f_m^e \quad \dots (3)$$

$$f_{xx}^e(x_i) = \frac{1}{(L^e)^2} \sum_{m=1}^{N+1} \hat{G} \hat{X}_{i,m}^{(2)} f_m^e \quad i=1, 2, \dots, N+1 \quad \dots (4)$$

ここで L^e は要素 e の領域 $[a^e, b^e]$ の長さ、 $\hat{G} \hat{X}^{(1)}$ 、 $\hat{G} \hat{X}^{(2)}$ は領域 $[1, -1]$ に定義される局所的な微分マトリックスである。

$$\hat{G} \hat{X}_{i,m}^{(1)} = \begin{cases} \frac{L_{N+1}(x_i)}{L_{N+1}(x_m)} \frac{1}{x_i - x_m} & i \neq m \\ \frac{(N+1)N}{4} & i = m=1 \\ -\frac{(N+1)N}{4} & i = m=N+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots (5)$$

$$\hat{G} \hat{X}^{(2)} = \hat{G} \hat{X}^{(1)} \hat{G} \hat{X}^{(1)} \quad \dots (6)$$

境界点の微分は隣接する各要素で求まる微分の重み付き和で近似することによって、Global-Type 微分マトリックス $\mathbf{G} \mathbf{X}^{(1)}$ と $\mathbf{G} \mathbf{X}^{(2)}$ は局所マトリックス $\hat{G} \hat{X}^{(1)}$ と $\hat{G} \hat{X}^{(2)}$ から構成できる⁽¹⁾。

3. 時間離散法

3.1 基礎方程式 基礎方程式は粘性非圧縮性流れの満たす Navier-Stokes 運動方程式と連続の式である。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + N(\mathbf{u}) + \frac{1}{Re} L(\mathbf{u}) \quad \dots (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \dots (8)$$

L と N はそれぞれ線形と非線形 Operator である。その定義式は以下のとおりである。

$$L(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad \dots (9)$$

$$N(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})] \quad \dots (10)$$

ここで非線形項 N はエイリアシング誤差による影響を減少するために Skew-Symmetric Form⁽³⁾ を用いている。

3.2 時間離散法 Chorin⁽⁴⁾ の Splitting 手法を用いるために運動方程式を次のように表す。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{F} \quad \dots (11)$$

$$\mathbf{F} = N(\mathbf{u}) + \frac{1}{Re} L(\mathbf{u}) \quad \dots (12)$$

第1ステップは

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n = \Delta t \mathbf{F}^n \quad \text{in } \Omega \quad \dots (13)$$

第2ステップは

$$\mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla p \quad \text{in } \Omega \quad \dots (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots (15)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_{\text{given}} \quad \text{on } \partial \Omega \quad \dots (16)$$

ただし、 Δt は時間刻みである。式(14)と式(15)によって、作られた Poisson 方程式は次のように離散化される。

$$\sum_{m=1}^{NX_1} B X_{i,m} p_{m,j} + \sum_{l=1}^{NY_1} B Y_{j,l} p_{i,l} = \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{m=2}^{NX} G X_{i,m}^{(1)} \bar{u}_{m,j}^{n+1} + \sum_{l=2}^{NY} G Y_{j,l}^{(1)} \bar{v}_{i,l}^{n+1} + G X_{i,1}^{(1)} u_{1,j}^{n+1} + G X_{i,NX_1}^{(1)} u_{NX_1,j}^{n+1} + G Y_{j,1}^{(1)} v_{i,1}^{n+1} + G Y_{j,NY_1}^{(1)} v_{i,NY_1}^{n+1} \right] \quad \dots (17)$$

$$B X_{i,m} = \sum_{n=2}^{NX} G X_{i,n}^{(1)} G X_{n,m}^{(1)} \quad \dots (18)$$

$$B Y_{j,l} = \sum_{k=2}^{NY} G Y_{j,k}^{(1)} G Y_{k,l}^{(1)} \quad \dots (19)$$

ここで、圧力境界条件は MAC 法で用いられるように境界に垂直な方向の運動方程式から導くのではなく、境界上で連続の式を満たすという条件を直接用いる。ただし、 $NX_1 = NX+1$ 、 $NY_1 = NY+1$ は両境界格子点を含む x 方向と y 方向格子点数である。 $i=1, i=NX_1$ の境界で、 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ を表す以下の離散式を用いる。

$$\sum_{m=1}^{NX_1} BX_{i,m} p_{m,j} = \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{m=2}^{NX} GX_{i,m}^{(1)} \bar{u}_{m,j}^{n+1} + GX_{i,1}^{(1)} u_{1,j}^{n+1} + GX_{i,NX}^{(1)} u_{NX,1}^{n+1} + \sum_{l=1}^{NY_1} GY_{j,l}^{(1)} v_{l,i}^{n+1} \right] \dots\dots\dots (20)$$

$j=1, j=NX_1$ の境界でも, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ を同様に扱う.

$$\sum_{l=1}^{NY_1} BY_{j,l} p_{i,l} = \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{l=2}^{NY} GY_{j,l}^{(1)} \bar{v}_{l,i}^{n+1} + GY_{j,1}^{(1)} v_{1,i}^{n+1} + GY_{j,NY}^{(1)} v_{l,NY}^{n+1} + \sum_{m=1}^{NX_1} GX_{i,m}^{(1)} u_{m,j}^{n+1} \right] \dots\dots\dots (21)$$

各瞬間で速度境界条件(16)を与えると式(17), (20)と式(21)により圧力 p が求まる.

4. 計算モデルと速度境界条件

4.1 計算モデル 計算モデルは一つの渦が一様流により, 下流に流される流れ場である. 初期速度場中の渦は二次元, 非粘性, 定常運動方程式と非圧縮性の連続の式を満たす定常渦であり, 流れ関数 ψ を使って以下のように表される.

$$\psi = C \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2R_c^2} \right] \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

ここで, (x_0, y_0) は渦の中心, C は初期渦の強度, R_c は渦の半径を表している. u'_0 と v'_0 は渦の速度である.

4.2 速度境界条件 計算領域は流れ方向には XL の長さ, 垂直な方向には YL の幅を持つ長方形である. 流入境界条件と上下境界条件は簡単のため Dirichlet 形の境界条件で与える.

$$u=U, v=0 \quad \text{at} \quad x=0 \dots\dots\dots (24)$$

$$u=U, v=0 \quad \text{at} \quad y=0 \dots\dots\dots (25)$$

$$u=U, v=0 \quad \text{at} \quad y=YL \dots\dots\dots (26)$$

ここで, 瞬時速度を $u=U+u', v=v'$ のように表す. ただし, U は平均主流速度であり, u', v' は速度の変動成分である.

速度の流出境界条件は以下の分析によって与えられる. 領域切断によって出現した数値的な流出境界は本来の物理境界ではないため, 物理境界値は壁境界と流入境界のようにあらかじめ直接に与えられない. したがって, 物理的意味がある流出境界条件としては, 数値境界での流れが内部の流れと類似な基礎方程式を満たすことが望ましい.

二次元非粘性非圧縮性定常渦が一様な速度 U の主流に流されるとき $N-S$ 方程式は次のように書き換

えることができる.

$$\underbrace{\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x}}_{\text{Part 1}} + \underbrace{u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y}}_{\text{Part 2}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{Re} \nabla^2 u'}_{\text{Part 3}} \dots\dots\dots (27)$$

$$\underbrace{\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x}}_{\text{Part 1}} + \underbrace{u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y}}_{\text{Part 2}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\frac{1}{Re} \nabla^2 v'}_{\text{Part 3}} \dots\dots\dots (28)$$

式(27)と式(28)はそれぞれ三つの部分に分けられる. 粘性項 (part 3) がない場合には, part 2 は初期渦が満たす非粘性運動方程式であり, 独立に成り立つ. 本計算モデルのような場合, 観察者が主流と一緒に運動するときに見た u', v' 分布は時間にしたがって, 不変であり, つまり, part 1 が零になるべきである.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

この式は一様主流に運ばれる二次元, 非粘性, 非圧縮性定常渦の流れに対して, 運動方程式を厳密に満たしている. また, この式は双曲型の性質⁽⁵⁾を持ち, 下流速度の予測式として使える. しかし, 今回の数値実験を行う対象である粘性流に対しては, 粘性項 (part 3) が零でなく, part 1 と part 2 は粘性項の part 3 によって結びつけられ, 式(29)は厳密に言えば成り立たなくなる. だが, 対流効果が強い場合, 境界だけに限り, 短い計算時間刻みの間に速度分布が一時固定されるまま, 境界外に伝えていくことを表す式(29)は, やはり物理境界値の挙動を本質的に反映できる近似的な境界条件として使えると考えられる. この仮定の正当性を定量的に評価するために以上述べた渦の計算モデルを用いて数値実験を行った.

5. 計算結果

境界条件の影響を評価するために, 渦対流の各ケース (表1) の計算を図1のような短域 ($XL=8, YL=12$) と長域 ($XL=14, YL=12$) で同時に行った. 表1中で Re は代表速度 U と代表長さ R_c によるものであり, U と R_c は値1とした.

$\bar{\Omega}$ を観察領域とする. 各瞬間に観察領域 $\bar{\Omega}$ 内の圧力分布と渦度分布の相関係数を次式によって計算する.

$$C_p(t) = \frac{\iint_{\bar{\Omega}} p_s(x, y, t) \cdot p_L(x, y, t) dx dy}{\iint_{\bar{\Omega}} p_L^2(x, y, t) dx dy} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$C_\omega(t) = \frac{\iint_{\bar{\Omega}} \omega_s(x, y, t) \cdot \omega_L(x, y, t) dx dy}{\iint_{\bar{\Omega}} \omega_L^2(x, y, t) dx dy} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 s, L はそれぞれ短域と長域の結果であることを意味する。

5・1 速度境界条件の比較 流出境界で以下の2種類の速度境界条件を採用する。

●対流境界条件-式(29)

●二階微分零- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

計算パラメータは表1に示す。

表1 計算条件

Case No.	Velocity B.C	$\frac{C}{UR}$	Re	Δt
Case 1	$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	0.2	500	5×10^{-3}
Case 2	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	0.2	500	5×10^{-3}
Case 3	$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	0.2	50	5×10^{-3}
Case 4	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	0.2	50	5×10^{-3}
Case 5	$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	2.2	500	1×10^{-3}
Case 6	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	2.2	500	1×10^{-3}

(a) 短域内渦度分布

(b) 長域内渦度分布

図1 計算領域と初期渦度分布

図2と図3にはそれぞれCase1とCase2において、観察領域 $\bar{\Omega}$ 内の $y=0$ 線上の初期最大圧力差と渦度差で正規化される各瞬間の最大差 $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$ の時間変動を示す。破線は短域の値、実線は長域の値を示している。後述するように長域においては、境界の影響は無視できるほど小さいとみなせる。

対流境界条件を用いた場合、図2に示すような短域と長域の間での差が極めて小さい。また、初期渦が $x=4$ に設定されたので、 $t=4$ のとき、渦の中心は流出境界上 $x=8$ に達するが、 $0 \leq t \leq 4$ の間で渦度と圧力の最大値がほとんど一定であることは本論文の離散化法では数値粘性が十分小さいことを示している。しかし、二階微分零の条件の場合に、図3に示すように渦が流出境界を通過する際の短域の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$ の時間変動値が長域の結果と顕著にずれている。

(a) $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$

(b) $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

図2 Case1の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

図4と図5には相関係数 $C_p(t)$, $C_\omega(t)$ の変化を示した。対流境界条件の $C_p(t)$, $C_\omega(t)$ は渦が境界を通過するまで高い相関係数を持つことがわかる。渦が境界を通過し終わる段階で、 $C_p(t)$ が下がり始めるのは、 $\bar{\Omega}$ 内の圧力が零に近づき、相関係数 $C_p(t)$ が偶然誤差に支配されるためである。一方、渦度 ω の空間分布は圧力 p より広いため、高 $C_\omega(t)$ 分布の維持時間は高 $C_p(t)$ 分布の維持時間より長い。二階微分零条件の $C_p(t)$, $C_\omega(t)$ はいずれも低い相関係数を示しており、

この境界条件が計算結果の精度に大きな影響を与えることがわかる。

5.2 粘性の影響 対流境界条件の予測精度は粘性項の大きさにかかわることを4章に述べた。表1のCase3とCase4は $Re=50$ に設定され、Case1とCase2の粘性効果より10倍大きい。図6と図7にはそれぞれ対流境界条件のCase3と二階微分零のCase4の相関係数 $C_p(t)$ の変化を示している。対流境界条件を用いるCase3ではCase1と比べて $C_p(t)$ は

(a) $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$

(b) $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

図3 Case2の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

(a) 圧力相関係数

(b) 渦度相関係数

図5 Case2の相関係数

(a) 圧力相関係数

(b) 渦度相関係数

図4 Case1の相関係数

図6 Case3の圧力相関係数

図7 Case4の圧力相関係数

渦が境界を通過し始めるときから、多少減少する傾向が見られる。二階微分零条件を用いる Case 4 では $C_p(t)$ は顕著に低くなり、瞬時圧力に対する計算の信頼性は明らかに損なわれている。図 8 は Case 3 の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$ の時間変動値を示している。短域での渦が境界を通過するときの $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$ の計算値は長域の計算値よりずれることがわかる。また、 Re 数が小さいので、 $t=0$ から渦の中心が $\bar{\Omega}$ の境界を出るまで最大圧力と最大渦度は粘性の効果によって徐々に減衰される様子が見える。

5.3 渦強度の影響 表 1 の Case 5 は渦の強度 $\frac{C}{UR_c}=2.2$ を Case 1 より約 10 倍増やすことにより、圧力項も約 10 倍増加したもので、流出境界で最大は約 $0.25U$ の逆流速度が現れる。

図 9 は対流境界条件の Case 5 の相関係数 $C_p(t)$ の変化を示している。図 10 には Case 5 の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$ の時間変動値を示してある。Case 1 と同様に短域と長域の計算結果はほとんど一致する。

しかし、二階微分零の条件で渦の強度 $\frac{C}{UR_c}=2.2$ の Case 6 は渦が境界を通過するときに計算が不安定になって、計算結果は得られなかった。

6. 圧力境界条件の影響

以上示された結果によって、対流境界条件は二階微分零条件よりはるかに優れることがわかったが、同じ対流境界条件でも標準陽解法や陰的な Time-Splitting 法を用いて計算した場合、 $t=3$ での瞬時の渦度空間分布の図 11 からわかるように、入口の付近で数値振動が現れ、安定な計算はできなくなることが見られる。この数値振動が発生する原因は、標準陽解法と Time-Splitting 法では圧力境界条件として運動方程式の境界垂直成分を採用しているために境界で発散がないことを満たしていないことにある。そのときの発散値の空間分布は図 12 に示されている。陰的な Time-Splitting 法では Orszag⁽⁶⁾ と Tomboulides⁽⁷⁾ の改良圧力境界条件を使用した。これは圧力境界条件とする境界に垂直な方向 ($\mathbf{n}$) の N -S 方程式中の $\mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$ を式 (9) により分解し $\mathbf{n} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$ 項を零にしたもので

図 9 Case 5 の圧力相関係数

(a) $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$

(b) $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

図 8 Case 3 の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

(a) $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$

(b) $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

図 10 Case 5 の $|\Delta p_{\max}/\Delta p_{0\max}|$ と $|\Delta \omega_{\max}/\Delta \omega_{0\max}|$

ある。この改良によって、最大発散値は標準陽解法の場合より 1 けた小さいという結果が見られ、渦度の入口じょう乱も減少している。

さらに、圧力境界条件として、入口だけでは連続の式を用いるという Ku の考え方〔式(20)〕を採用し、他のサイドでは境界に垂直な方向の $N-S$ 方程式を用いるという標準陽解法の考え方を採用した混合法による計算結果を図 13 に示した。入口の数値振動が消え、安定な計算が行われている。比較するために、全部の境界で圧力境界条件として連続の式を用いた Ku の手法

による計算結果を図 14 に示す。域内の最大発散値は計算機の丸め誤差の大きさと同じ Order である。

7. 結 論

高精度のスペクトル法を用いて、非圧縮、非粘性定常初期渦が一様流によって流される数値シミュレーションを試み、対流効果が支配的であるこの二次元粘性流に関して、対流速度境界条件がその物理境界値の瞬時挙動を反映できる流出境界条件であることが確認された。数値実験により得られた主な結果は以下のとお

(a) 標準陽解法渦度分布

(b) Time-Splitting の渦度分布

図 11 渦度分布の比較 ($t=3$)

(a) 発散値分布

(b) 渦度分布

図 13 混合法の発散値と渦度空間分布 ($t=3$)

(a) 標準陽解法の発散値

(b) Time-Splitting 法の発散値

図 12 発散値分布の比較 ($t=3$)

(a) 発散値分布

(b) 渦度分布

図 14 Ku 法の発散値と渦度空間分布 ($t=3$)

りである。

(1) 式(29)は非粘性の場合に成り立つ予測式であるが、低粘性(高 Re 数)の場合に、高精度の計算結果が得られた。さらに、 Re 数が低い場合でも、対流境界条件は定性的および定量的に適切な境界条件として使えることを示した。

(2) 対流境界条件は渦の強度によらず境界値を予測することができる。しかし、二階微分零の条件は境界値の瞬時挙動を反映できないため、上流側にじょう乱が現れ、瞬時分布は定性的にも定量的にも真の分布と顕著に異なることが示された。

(3) 渦の強度が十分高いときには逆流が現れるが、そのような場合にも、対流速度境界条件は適用できる。

(4) 圧力境界条件に関しては、境界上で、特に入口側で、速度の発散なしを保証することが計算の安定化に極めて重要である。

(5) 本論文で用いた PSME 法は数値粘性が少なく、高精度で境界条件を課すことができる空間離散化

手法である。

以上述べたことによって、複雑なせん断流(例えば、混合層、噴流など)においても、流出境界で、流れの物理現象を本質的に反映するような N - S 方程式の近似によって、数学的に適切な流出速度境界条件を導出することができると予想される。

文 献

- (1) Ku, H. C., Hirsh, R. S., Taylor T. D., and Rosenberg, A. P., *J Comput. Phys.*, **83** (1989), 260-291.
- (2) Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D., *J. Comput. Phys.*, **70** (1987), 439-462.
- (3) Zang, T. A. and Krist, S. E., *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **1** (1989), 41-46.
- (4) Chorin, A. J., *Math. Comput.*, **22** (1968) 745-762.
- (5) Chakravarthy, S. R., and Anderson, D. A., *AIAA Paper*, 80-0268 (1980)
- (6) Orszag, S. A., Israeli, M. and Deville, M. O., *J. Sci. Comput.*, **1**-(1) (1986) 75-111.
- (7) Tomboulides, A. G., Israeli, M. and Karniadakis, E. J., *Sci. Comput.*, **4**-(3) (1989) 291-308.