曲がり管内脈動流におけるビンガム流体の流動特性* (べき乗則モデルを用いた近似解析)

多 田 茂^{*1}, 大 島 修 造^{*2}, 山根 隆一郎^{*2}

Characteristics of a Pulsating Bingham Plastic Fluid Flow in a Curved Pipe (Analysis Using Power-Law Model)

Shigeru TADA, Shuzo OSHIMA and Ryuichiro YAMANE

Pulsating laminar flows of a purely viscous non-Newtonian fluid in a curved pipe of circular cross section in the high Dean number region were investigated analytically by using boundary layer approximations. The governing equations were formulated for a Power-Law fluid. The momentum integral approach and Pohlhausen's approximate method were used to analyze the flow in some detail, and the governing equations were solved by the successive approximation. In the case of steady flow, the present theory was in good agreement with previous experimental data, and the friction factor becomes greater as the pseudoplasticity index n decreases. In the case of Pulsatile flow, the phase lag of the mean sectional velocity from the wave of pressure gradient, Γ , and the amplitude of the friction factor, $\bar{\lambda}_{ac}$, diminishes with increasing Dean number, and Γ diminishes with increasing n . The phase lag Γ and the amplitude of the friction factor $\bar{\lambda}_{ac}$ derived in this work are in qualitative agreement with available experimental data.

Key Words: Internal Flow, Non-Newtonian Fluid, Curved Pipe, Pulsating Flow, Pipe Flow

1. 緒 言

曲がり管を対象とした研究は従来から数多くなされてきており、その有用性については論を待たない。近年では特に生体流体力学的観点からの議論が活発に行われている。

さきに著者らは血液の持つビンガム性に着目し、ビンガム粘性と曲がり管の二次流れの効果とが重畳する際に生じる現象について、ビンガム流体の定常流を対象とした実験および数値解析を行い、管摩擦係数や二次流れの強さと溶液濃度などとの関係についての基礎的な知見を得、さらにビンガム流体ではニュートン流体の場合に比べ拡散作用が促進されるということを明らかにした⁽¹⁾⁽²⁾。

ところで、ディーン数などの流体パラメータと管摩擦係数などの積分量との関係を調べるのが研究の主な目的となる場合、実験と同様に多くのデータポイントを必要とする数値解析よりもむしろ、精度はやや劣るものの流れ場の大域的な評価が容易な近似解析のほうが研究の手段としては有効である。しかしながら、

ビンガム流体ではよく知られているように、解析的扱いが非常に困難である。例えば、ヘンキーモデルを用いての解析的研究は、最も基本的な定常流の場合でさえ摂動法を用いた報告が一例見られる程度であり⁽³⁾、ストークス流体の非定常流を対象とした研究に至ってはべき乗則モデルを用いたものでさえ解析が非常に困難になるため、まだ見受けられない。

一方、弱い脈動流のようにずり速度が比較的限られた範囲で変動する場合では、ヘンキーモデルの局所的な近似として解析的特異点が生じないべき乗則モデルが有効である。本報では、このようにべき乗則モデルがパラメータの値を適当に設定することによりヘンキーモデルに近似できることを利用し、ビンガム流体の曲がり管内脈動流の近似解析を森ら⁽⁴⁾がニュートン流体の解析に用いた手法をべき乗則流体に適用して行った。解析では定常流についての関係式をまず初めに導き、弱い振動流を得られた定常流の解に重ね合わせることで擬定常の脈動流の管摩擦係数の振幅、および流量変動に対する圧力こう配変動の位相遅れを求め、実験値との比較を行った。

主 な 記 号

a : 円管半径

* 原稿受付 平成3年8月2日。

^{*1} 正員、東京工業大学大学院 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

^{*2} 正員、東京工業大学工学部。

e^{ij} : 変形速度テンソル
 De : ディーン数 $\equiv Re\sqrt{\delta}$
 K : 擬塑性粘度
 n : 構造粘度指数
 P : 圧力
 R : 円管の曲率半径
 Re : レイノルズ数 $\equiv (2a)^n \rho (w_m^*)^{2-n} / K$
 t : 時間
 β : 脈動の流量比 (主流/振動流)
 Wo : ウォマースリー数 $\equiv 2^{n-4} \sqrt{K \Omega^{n-2} / \rho a^2}$
 w : 円管軸方向流速
 δ : 半径比 ($\equiv a/R$)
 λ : 管摩擦係数
 ρ : 密度
 σ^{ij} : 応力テンソル
 φ : 境界層厚さ
 Ω : 断面平均流速の角振動数
 $II_A: A^{ij}$ の第 2 不変量 $= \frac{1}{2} \{ (A^{ij} g_{ij})^2 - A^{ij} A_{ij} \}$

添 字

a : 振幅
 c : 曲がり管
 m : 断面平均値
 s : 直管
 $-$: 時間平均値
 $\sim$: 脈動流
 $*$: ついた場合は有次元量を表す

なお、特に断らない限りテンソル表記式の英数字の上付き添字は反変量を、下付き添字は共変量を意味する。

2. 基 礎 式

非圧縮性流体に対する連続の式、運動方程式、および構成方程式はそれぞれ

$$v_{,j}^{*j} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{v}^{*i} + v^{*j} v_{,j}^{*i} = \frac{1}{\rho} \sigma_{,j}^{*ij} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma^{*ij} = -P^* g^{ij} + \tau^{*ij} \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。ただし、セミコロン';'は共変微分を、コンマ', 'は偏微分を表し、上下にある同じ添字は総和規約に従うものとする。偏差応力テンソル τ^{ij} は、べき乗則モデルでは

$$\tau^{*ij} = 2K \varepsilon^{*ij} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし

$$\varepsilon^* = (4|II_e^*|)^{(n-1)/2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。

本報では振動成分が小さい擬定常の脈動流を解析対象とする。そのため、まず定常流に対する管摩擦係数などの関係式を導き、それらの結果を脈動流の場合について適用するという手順をとる。

2.1 境界層近似 座標には計量テンソル g_{ij} が

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{22} &= (r^*)^2 \\ g_{33} &= (R + r^* \cos \psi)^2 \\ g_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で表される円環体座標を用い、位置ベクトルと速度ベクトルの成分の記号を次のようにおのおの対応づける⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^* &= (r^{*1}, r^{*2}, r^{*3}) = \mathbf{r}^*(r^*, \psi, \theta) \\ \mathbf{v}^* &= (v^{*1}, v^{*2}, v^{*3}) = \mathbf{v}^*(u^*, v^*, w^*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

基礎式(1)～(4)に対し境界層近似を行い、解を境界層外部の領域(非粘性領域)と境界層内部の領域(境界層領域)とに分け、境界層外縁部で両者を接続する。

2.1.1 境界層内部解 無次元量を

$$\begin{aligned} P &= \frac{n-2}{\sqrt{a^{2n} \rho^n}} P^*, \quad r = \frac{r^*}{a} \\ v &= \frac{n-2}{\sqrt{a^n \rho}} v^*, \quad \Xi = \left(\frac{K}{a^2 \rho} \right)^{(n-1)/(n-2)} \Xi^* \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

と定義する。

速度成分と偏導関数の大きさを見積もれば、それぞれ

$$\begin{aligned} u &\sim O(\varphi), \quad v, w \sim O(1) \\ \partial/\partial r &\sim O(\varphi^{-1}), \quad \partial/\partial \psi, \partial/\partial \theta \sim O(1) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

また、式(5)より $\Xi \sim (e^{ij})^{n-1}$ なので Ξ の中のいちばん大きな項に着目すれば、 Ξ の大きさの程度は

$$\Xi \sim O(\varphi^{1-n}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

と見積もることができる。次に、断面平均流速を w_m として

$$u \in \varepsilon \varphi w_m, \quad v \in \varepsilon w_m, \quad w \sim w_m \quad \dots\dots\dots (11)$$

とし ($0 < \varepsilon \ll 1$)⁽⁵⁾、式(3)を代入した式(2)に式(11)を代入して両辺の各項の大きさを評価すると

$$\begin{aligned} &\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial r}}_{\varepsilon^2} + \underbrace{\frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi}}_{\varepsilon^2} + \underbrace{\frac{\partial \sin \psi}{1 + \delta r \cos \psi} w^2}_{\delta} \\ &= -\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi}}_{\delta} + \underbrace{\frac{\partial \Xi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r}}_{\frac{\varepsilon}{\varphi^2} \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{n-1} w_m^{n-2}} + \underbrace{\Xi \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}}_{\delta} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

となる。両辺は同程度の大きさなので

$$\varepsilon \sim \sqrt{\delta}, \quad \varphi \sim De^{-1/(n+1)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

したがって $\delta \ll 1$ を考慮すれば、式(9)、(10)より Ξ

は

$$\begin{aligned}\Xi &\simeq \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2} \\ &\simeq \left(-\frac{\partial w}{\partial r} \right)^{n-1} \dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

となる。さらに $r \sim 1$ を考慮すれば式(1)～(4)は、式(7)～(9)、(13)を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$-v^2 - \delta w^2 \cos \phi = -\frac{\partial P}{\partial r} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned}u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial \phi} + \delta w^2 \sin \phi \\ = -\frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} \left(-\frac{\partial w}{\partial r} \right)^{n-1} \right\} \dots\dots\dots (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial \phi} = -\delta \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(-\frac{\partial w}{\partial r} \right)^n \right\} \\ \dots\dots\dots (18)\end{aligned}$$

と表せる。ただし、定常流を扱っているため、式(2)の非定常項は省略してある。次に独立変数 r を

$$r = 1 - \xi \dots\dots\dots (19)$$

と変数変換し、式(17)、(18)の両辺を ξ について零(壁面)から φ (境界層外縁)まで積分し、境界層運動量積分方程式を導出すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^\varphi v^2 d\xi - v|_{\xi=\varphi} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^\varphi v d\xi \\ + \delta \sin \phi \int_0^\varphi w^2 d\xi \\ = - \int_0^\varphi \frac{\partial P}{\partial \phi} d\xi - \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^{n-1} \right\} \Big|_{\xi=0} \dots\dots\dots (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^\varphi v w d\xi - w|_{\xi=\varphi} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^\varphi v d\xi \\ = -\delta \int_0^\varphi \frac{\partial P}{\partial \theta} d\xi + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^n \Big|_{\xi=\varphi} - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^n \Big|_{\xi=0} \\ \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

となる。ただし、変形の過程で式(15)、(16)を用いている。

2・1・2 境界層外部解 $\delta \ll 1$ かつ、非粘性の近似を施せば、速度成分の大きさの程度は

$$u, v \sim O(\delta), w \sim O(1) \dots\dots\dots (22)$$

なので、基礎式(1)～(4)は δ の高次項を省略すると

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{r} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$\delta w^2 \cos \phi = \frac{\partial P}{\partial r} \dots\dots\dots (24)$$

$$\delta w^2 \sin \phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} \dots\dots\dots (25)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} = -\delta \frac{\partial P}{\partial \theta} \dots\dots\dots (26)$$

となる。ただし、式(2)の非定常項は省略。ここで半径および周方向の速度分布を

$$u_E = C_1 \cos \phi, v_E = -C_1 \sin \phi \dots\dots\dots (27)$$

と仮定すると、軸方向流速 w_E は式(26)、(27)を用いて

$$w_E = -\frac{\delta}{C_1} \frac{\partial P}{\partial \theta} r \cos \phi + C_2 \dots\dots\dots (28)$$

と求めることができる。

2・2 速度分布 境界層の内部、外部二つの解を接続するための境界条件について考える。まず、円管断面内における流量バランスについては

$$\int_0^\varphi v d\xi = C_1(1-\varphi) \sin \phi \dots\dots\dots (29)$$

境界層外縁部では

$$\left. \begin{aligned}v &= -C_1 \sin \phi \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0 \\ w &= -\frac{\delta}{C_1} \frac{\partial P}{\partial \theta} (1-\varphi) \cos \phi + C_2 \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{\delta}{C_1} \frac{\partial P}{\partial \theta} \cos \phi\end{aligned} \right\} (\xi = \varphi) \dots\dots\dots (30)$$

また、 v, w が満たすべき条件として、壁面上で

$$v = w = 0 (\xi = 0) \dots\dots\dots (31)$$

式(29)～(31)を満足する境界層内部の流速 v_i, w_i として次のような形の解を仮定する。

$$\begin{aligned}v_i &= \frac{2(2n+1)(3n+1)}{4n^2-3n+1} \\ &\left\{ \left\{ \frac{1}{\varphi} - \frac{(2n^2+1)(n+1)}{(2n+1)(3n+1)} \right\} \left(\frac{\xi}{\varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{n+1}{n\varphi} - \frac{4n^4+8n^2+5n+1}{2n(2n+1)(3n+1)} \right\} \left(\frac{\xi}{\varphi} \right)^{(n+1)/n} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{n\varphi} - \frac{n+1}{2n(2n+1)} \right\} \left(\frac{\xi}{\varphi} \right)^{(2n+1)/n} \right\} C_1 \sin \phi \\ &\dots\dots\dots (32)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_i &= C_2 \left\{ (n+1) \left(\frac{\xi}{\varphi} \right) - n \left(\frac{\xi}{\varphi} \right)^{(n+1)/n} \right\} \\ &\quad - \frac{\delta}{C_1} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left\{ (n+1-\varphi) \left(\frac{\xi}{\varphi} \right) - n \left(\frac{\xi}{\varphi} \right)^{(n+1)/n} \right\} \cos \phi \\ &\dots\dots\dots (33)\end{aligned}$$

2・3 圧力分布 境界層内の点 (ξ_0, ϕ) における圧力は、式(19)を用いて式(16)を ξ について ξ_0 から φ まで積分することにより

$$P|_{\xi=\xi_0} = \int_{\xi_0}^\varphi (v_i^2 + \delta w_i^2 \cos \phi) d\xi + P|_{\xi=\varphi} \dots\dots\dots (34)$$

と得ることができる。ただし、円管断面内の圧力の基準点は管の中心にとった。境界層外縁部の圧力 $P|_{\xi=\varphi}$ は、式(24)を r について零から $1-\varphi$ まで積分し

$$P|_{r=1-\varphi} = \delta \cos \phi \int_0^{1-\varphi} w_E^2 dr \dots\dots\dots (35)$$

よって圧力 $P|_{\xi=\xi_0}$ は

$$P|_{\xi=\xi_0} = \delta \cos \psi \int_0^{1-\varphi} w_{\xi}^2 dr + \int_{\xi_0}^{\varphi} (v_i^2 + \delta w_i^2 \cos \psi) d\xi \dots (36)$$

となる。

一方 軸方向圧力こう配は、壁面せん断力を用いて表せば

$$-\delta \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}|_{\xi=0} d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_{\theta}}{\partial \xi} \right)^n \Big|_{\xi=0} d\psi \dots (37)$$

であるが、 φ の ψ による変化が小さいのでこれを省略

し、 φ を平均値 φ_m で置き換えると近似的に

$$-\delta \frac{\partial P}{\partial \theta} = 2 \left\{ \frac{C_2(n+1)}{\varphi_m} \right\}^n \dots (38)$$

と表すことができる。

2・4 管摩擦係数 式(21)に式(32)、(33)および式(37)を代入して壁面速度こう配について整理し、これと他のもう一つの壁面速度こう配の関係式(38)とを等置する。双方の $\cos \psi$ の一次の項に依存しない項が φ の小さい値の範囲で比較的良好一致を示すので、この項については特に議論はせずそのままにし、残りの $\cos \psi$ の一次の項に依存する項を等置すると

$$\frac{2}{C_1^2} = \frac{\varphi_m^{2n}}{3C_2^{2n-2}(3n+2)(4n+1)(4n^2-3n+1)(n+1)^{2n-1}} \frac{1}{n+1-\varphi_m} \times \left\{ 13n^3 + 28n^2 + 17n + 2 - \frac{208n^6 + 287n^5 + 149n^4 + 155n^3 + 119n^2 + 38n + 4}{2(2n+1)(3n+1)} \varphi_m \right\} \dots (39)$$

という関係式が得られる。同様の手続きを式(20)に対しても行う。すなわち、式(20)に式(32)、(33)および式(36)を代入し、 $\sin \psi$ の係数を等置すれば

$$\delta C_2^2 \varphi_m^3 \frac{(5n+2)(n+1)}{3(3n+1)(3n+2)} \left\{ 1 - \frac{3(171n^4 + 315n^3 + 209n^2 + 59n + 6)}{4(n+1)(4n+1)(4n+2)(5n+2)} \varphi_m \right\} = \frac{(2n+1)(3n+1)}{4n^2-3n+1} \left\{ 1 - \frac{(2n^2+1)(n+1)}{(2n+1)(3n+1)} \varphi_m \right\} \frac{C_1 C_2^{n-1}}{\varphi_m^{n-1}} (n+1)^{n-1} \dots (40)$$

となる。未知数 C_1 , C_2 , φ に対する三つめの関係式は、断面平均流速についての式

$$2^{n/(n-2)} Re^{1/(2-n)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\varphi} w_{\theta} r dr d\psi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} w_{\theta} (1-\xi) d\xi d\psi \right\} \dots (41)$$

である。式(28)、(33)中の φ を断面平均値 φ_m に置き換え積分を実行すれば、 C_2 についての関係式

$$C_2 = 2^{n/(n-2)} Re^{1/(2-n)} \left/ \left\{ 1 - \frac{n+1}{2n+1} \varphi_m + \frac{n+1}{3(3n+1)} \varphi_m^2 \right\} \right. \dots (42)$$

が得られる。以上得られた式(39)、(40)、(42)を用いて C_1 , C_2 を消去すると

$$\frac{16^{-n}}{54} De^4 \varphi_m^{4n+4} \left\{ 1 - \frac{n+1}{2n+1} \varphi_m + \frac{n+1}{3(3n+1)} \varphi_m^2 \right\}^{4n-8} \left\{ 1 - \frac{3(171n^4 + 315n^3 + 209n^2 + 59n + 6)}{4(n+1)(4n+1)(4n+2)(5n+2)} \varphi_m \right\}^2 \times \left\{ 13n^3 + 28n^2 + 17n + 2 - \frac{208n^6 + 287n^5 + 149n^4 + 155n^3 + 119n^2 + 38n + 4}{2(2n+1)(3n+1)} \varphi_m \right\} = \frac{n(2n+1)^2(3n+1)^4(3n+2)^3(4n+1)(n+1)^{4n-5}}{(5n+2)^2(4n^2-3n+1)} \left\{ 1 - \frac{(2n^2+1)(n+1)}{(2n+1)(3n+1)} \varphi_m \right\}^2 (n+1-\varphi_m) \dots (43)$$

となり、 φ_m が満たすべき条件式が得られる。

さまざまな De 数の値に対し、式(43)を直接解いて φ_m を厳密に求めるのはかなり煩雑で手間のかかる作業になる。したがって、ここでは φ_m を De 数で級数展開し近似解を求めることにする。 $De \gg 1$ の場合、式(13)より

$$\varphi_m \sim De^{-1/(n+1)} \dots (44)$$

なので、 φ_m を

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{mk} De^{-k/(n+1)} \dots (45)$$

の形に展開する。これを式(43)に代入して逐次近似解を第2近似まで求めると

$$\varphi_{m1} = \left\{ \frac{54D_n(E_n F_n + 1)}{16^{-n}(2A_n B_n + C_n)} \right\}^{1/(4n+4)} \varphi_{m2} = \frac{(2A_n B_n + C_n)(E_n F_n + 2)E_n - A_n(A_n B_n + 2C_n)(E_n F_n + 1)}{E_n F_n(2A_n B_n + C_n)} \varphi_{m1}^2 \dots (46)$$

ただし

$$A_n = \frac{3(171n^4 + 315n^3 + 209n^2 + 59n + 6)}{4(n+1)(4n+1)(4n+2)(5n+2)}, B_n = 13n^3 + 28n^2 + 17n + 2$$

$$C_n = \frac{208n^6 + 287n^5 + 149n^4 + 155n^3 + 119n^2 + 38n + 4}{2(2n+1)(3n+1)}$$

$$D_n = \frac{n(2n+1)^2(3n+1)^4(3n+2)^3(4n+1)(n+1)^{4n-5}}{(5n+2)^2(4n^2-3n+1)}, E_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)}{(2n+1)(3n+1)}, F_n = n+1$$

となる。

次にディーン数 De と曲がり管の管摩擦係数 λ_c との関係式を求める。管摩擦係数はダルシー・ワイズバッツハの式より

$$\lambda_c = -2^{4/(2-n)} Re^{2/(n-2)} \delta \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (47)$$

圧力こう配項を消去するために、式(38)を用いると

$$\lambda_c = 2^{(6-n)/(2-n)} Re^{2/(n-2)} (n+1)^n \varphi_m^{-n} C_2^n \quad (48)$$

最後に C_2 を式(42)を用いて消去し、さらに φ_m に式(46)を代入して高次項を省略し、整理すれば

$$\frac{\lambda_c}{\sqrt{\delta}} = 8 \left\{ \frac{2(n+1)}{\varphi_{m1}} \right\}^n De^{-1/(n+1)} \times \left(1 - n \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} De^{-1/(n+1)} \right) \quad (49)$$

を得る。

3. 曲がり管内脈動流

振動流成分が主流成分に比べて小さく、 De 数を

$$De = \overline{De} \left(1 + \frac{1}{\beta} \sin Wo^2 t \right) \quad (50)$$

と表すことができる擬定常の脈動流について考える。

式(47)、(49)を用いて λ_c を消去し、さらに De に式(54)を代入して整理すると変動圧力こう配は

$$\begin{aligned} -\delta \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} &= 2^{(n-1)(n+2)/(n-2)} \delta^{n/(2n-4)} \\ &\times \left(\frac{n+1}{\varphi_{m1}} \right)^n \overline{De}^{-3n/(n-2)(n+1)} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} n \overline{De}^{-1/(n+1)} \right) \right. \\ &\left. - \left\{ 3 - 2(2n-1) \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} \overline{De}^{-1/(n+1)} \right\} \right. \\ &\left. \times \frac{n \sin Wo^2 t}{\beta(n-2)(n+1)} \right] + O(\beta^{-2}) \quad (51) \end{aligned}$$

となる。

一方、円管の軸方向についての運動方程式は、 f, g をそれぞれ対流項、粘性項とし、式(2)～(7)を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + f(u, v, w) \\ = -\frac{\delta}{1 + \delta r \cos \psi} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} + g(u, v, w) \quad (52) \end{aligned}$$

である。式(52)の両辺を円管の断面内で積分し、脈動圧力こう配について整理すると

$$-\delta \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \underbrace{\frac{\delta^2}{\pi(1-\sqrt{1-\delta^2})} \iint (f-g) dS}_I$$

$$+ \frac{\delta^2}{\pi(1-\sqrt{1-\delta^2})} \frac{\partial}{\partial t} \iint \tilde{w} dS \quad (53)$$

II

式(53)の I は近似的に式(51)に等しいとする⁽⁶⁾。II については

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint \tilde{w} dS &= \frac{\partial}{\partial t} (\pi \tilde{w}_m) \\ &\simeq 2^{n/(n-2)} \pi \delta^{1/(2n-4)} \overline{De}^{-1/(n-2)} \frac{Wo^2}{\beta(2-n)} \cos Wo^2 t \quad (54) \end{aligned}$$

と求めることができる。以上、式(53)の I に式(51)を、II に式(54)を代入し、式(50)を用いれば

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_c &= 8\sqrt{\delta} \left\{ \frac{2(n+1)}{\varphi_{m1}} \right\}^n \overline{De}^{-1/(n+1)} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} n \overline{De}^{-1/(n+1)} \right) \right. \\ &\left. - \left\{ 3 - 2(2n-1) \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} \overline{De}^{-1/(n+1)} \right\} \right. \\ &\times \frac{n \sin Wo^2 t}{\beta(n-2)(n+1)} \left. \right] \\ &- 2^{(n-4)/(n-2)} \delta^{(4n-9)/(2n-4)} \overline{De}^{-1/(n-2)} \\ &\times \frac{Wo^2 \cos Wo^2 t}{\beta(n-2)(1-\sqrt{1-\delta^2})} \quad (55) \end{aligned}$$

となり、擬定常の場合の曲がり管内脈動流の管摩擦係数の式が求められる。

4. 解析結果および考察

まず始めに、定常流の管摩擦係数の解析結果について述べる。べき乗則流体の曲がり管内定常流の近似解析は、本報以外では Mashelkar ら⁽⁷⁾ がニュートン流体の速度分布を仮定して行っており、高見ら⁽⁸⁾ が管の周方向流速にニュートン流体の速度分布を仮定し、軸方向流速にべき乗則流体の数値解析解を補間して行っている。彼らの報告を参考にしながら議論を進めてゆくことにする。

図1は De 数と曲がり管の管摩擦係数との関係を示したものである。管摩擦係数は構造粘度指数 n (以後単に n と記す) の減少に伴い小さくなってゆく。管摩擦係数は高見らの報告では、本報の $De-\lambda/\sqrt{\delta}$ の相関関係と同じ傾向を示すのに対し、Mashelkar らの報告では n の減少に伴い逆に増加してゆく。

図2は De 数と、直管の管摩擦係数

$$\lambda_s = \frac{8}{Re} \left\{ \frac{2(3n+1)}{n} \right\}^n \quad (56)$$

で正規化した曲がり管の管摩擦係数

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_s} = \left\{ \frac{n(n+1)}{(3n+1)\varphi_{m1}} \right\}^n De^{n/(n+1)} \times \left(1 - n \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} De^{-1/(n+1)} \right) \dots (57)$$

との関係を示したものである。 n の減少に伴い λ_c/λ_s の値は小さくなってきており、 n が減少するほど管の曲がりの効果が現れにくくなることがわかる。また、 λ_c/λ_s に対する n の影響は De 数の値が大きくなるほど顕著に現れてくる。

図3は De 数と λ_c/λ_s の関係を代表例として $n=0.9$ の場合を選び、式(57)とMashelkarらの解析⁽⁷⁾、およびMishraらによって得られた実験式⁽⁹⁾を比較して示したものである。本報の近似解析は妥当な結果を与えていることがわかる。また、図3の De 数が小さい De

図1 ディーン数と管摩擦係数との関係

図2 ディーン数と正規化した管摩擦係数との関係

図3 ディーン数と正規化した管摩擦係数との関係

≈ 50 以下の範囲では解析解の精度が低くなっている。この理由としては De 数が小さい場合、境界層厚さを一定とする近似が現象の記述には不適切な解を与えるからであると考えられる。

次に脈動流の場合について考える。図4は $\overline{De}$ と管摩擦係数 $\bar{\lambda}_c$ の振幅 $\bar{\lambda}_{ac}$ との関係を Wo 数、流量比 β が一定の場合について示したものである。 n の減少に伴い、 $\bar{\lambda}_{ac}$ に管の曲がりの影響が現れ始める $\overline{De}$ 数の値が大きくなってきている。特に $\overline{De} \approx 50$ を境にしてニュートン流体($n=1$)と非ニュートン流体($n<1$)の $\bar{\lambda}_{ac}$ の大きさの関係が逆転する。非ニュートン流体の直管内脈動流では、非ニュートン粘性が原因で流量増加現象(Flow Enhancement)が生じることが以前から知られている⁽¹⁰⁾。本報の近似解析ではその現象に加え、非ニュートン流体の曲がり管内脈動流の場合、管の曲がりの効果による流動振幅の増加現象($\bar{\lambda}_{ac}$ の減少)も生じることがわかる。

図5は図4と同じものを今度は逆に $\overline{De}$ 数を固定し、 Wo を変化させて示したものである。 $\bar{\lambda}_{ac}$ の値は Wo 数の小さい範囲($Wo \leq 1$)ではほとんど変化しないが、 Wo 数のある値を超えると急激に増加し始める。また、ニュートン流体に比べ非ニュートン流体で

図4 時間平均ディーン数と管摩擦係数の振幅との関係

図5 ウォマースリー数と管摩擦係数の振幅との関係

は、立上りの Wo 数の値は小さい。言い換えれば、非ニュートン流体のほうが非定常流の慣性効果が現れやすい、ということがわかる。この現象に対する解釈としては、以下のことが考えられる。非ニュートン流体では流量が同じでも n の値が小さくなると境界層厚さは薄くなるので、その結果、相対的に慣性効果が強められる状態になる。さらに、流れに非定常成分が加わった場合、同じ Wo 数の場合でも境界層厚さが薄くなるので、振動流による慣性効果はニュートン流体より効率よく作用することになる。本報の近似解析ではべき乗則モデルを用いて行っているが、ビンガム流体のヘンキーモデルの場合でも同様の現象は生じると考

えられる。

図 6, 7 は流量変動に対する圧力こう配変動の位相遅れを示したものである。図 6 は Wo 数を固定し $\overline{De}$ 数を変化させて、図 7 は $\overline{De}$ 数を固定し Wo 数を変化させておのおの示してある。いずれの図でも、やはりニュートン流体に比べ非ニュートン流体のほうが慣性効果が現れやすいことが読取れる。

図 8 は図 4 の $\overline{De}$ と $\tilde{\lambda}_{ac}$ の関係を、今度は $\overline{De}$ 数と流量比 β とを同じ比率で変化させたものである。具体的な例で考えると振動流量を一定にし、定常流成分を変化させてゆく場合などに相当する。

次に実験結果との比較を行う。べき乗則流体としてのスラリーの物性値を表 1 に示す。図 9 は、図 8 と同じ場合について、近似解析結果とカオリンスラリーを

図 6 時間平均ディーン数と流量変動に対する圧力こう配変動の位相遅れとの関係

図 7 ウォマースリー数と流量変動に対する圧力こう配変動の位相遅れとの関係

図 8 時間平均ディーン数と管摩擦係数の振幅との関係

表 1 スラリーの物性値表

Conc. [wt. %]	Tmp. [°C]	n	$K [\times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n]$
0 (water)	8.8	1.00	1.36
5	8.8	0.95	1.84
15	8.8	0.84	6.84

Conc. [wt. %]	Density [$\times 10^3 \text{ kg/m}^3$]
0 (water)	1.00
5	1.03
15	1.10

図 9 時間平均ディーン数と管摩擦係数の振幅との関係 (実験結果との比較)

図 10 時間平均ディーン数と流量変動に対する圧力こう配変動の位相遅れとの関係 (実験結果との比較)

図 11 時間平均ディーン数と正規化した管摩擦係数の振幅との関係

図 12 ウォーマスリー数と正規化した管摩擦係数の振幅との関係

用いた実験結果⁽¹¹⁾とを対比して示したものである。両者は比較的良好な一致を示しており、管摩擦係数に関しては希薄なスラリーがべき乗則モデルを用いて整理できることがわかる。図 10 は流量変動に対する圧力こう配(管摩擦係数)変動の位相遅れについて、同じく近似解析結果と実験結果とを示したものである。実験結果に多少ばらつきは見られるものの、全体的な傾向としては良く一致している。

図 11 は $\overline{De}$ と $\tilde{\lambda}_{ac}/\tilde{\lambda}_{as}$ との関係を示したものである。 $\tilde{\lambda}_{as}$ は $\tilde{\lambda}_{ac}$ と同じ手順で求めた。 $\overline{De}$ の増加に伴い、管の曲がりの効果が大きく現れてくる。また、 n の減少に伴い、曲がりの効果が現れにくくなることもわかる。

図 12 は Wo 数と $\tilde{\lambda}_{ac}/\tilde{\lambda}_{as}$ との関係を示したものである。解が良い近似を与える $Wo \approx 10$ 以下の範囲で $\tilde{\lambda}_{ac}/\tilde{\lambda}_{as}$ の変化の様子を見ることにする。 Wo 数がだいたい $Wo \leq 0.5$ の範囲では、 $\tilde{\lambda}_{ac}/\tilde{\lambda}_{as}$ の値は定常流の値とほぼ同じであるが、 $1 \leq Wo \leq 10$ の範囲では Wo の

増加とともに急激に増大し始め、その後一定の値($\tilde{\lambda}_{ac}/\tilde{\lambda}_{as} \approx 1$)に漸近する。さらに、 Wo 数に対する $\tilde{\lambda}_{ac}/\tilde{\lambda}_{as}$ の変化は n の値が小さいほどすみやかに生じることがわかる。

5. 結 言

血液流動を模擬した、ビンガム流体の曲がり管内脈動流の近似解析をべき乗則モデルを用いて行った。以下にその主な結論を示す。

(1) 同じディーン数の場合では、定常流の管摩擦係数はニュートン流体に比べ非ニュートン流体のほうが値が小さくなる。

(2) 定常流の管摩擦係数は過去に導かれた実験式と良い一致を示す。

(3) 管の曲がりの影響は、ニュートン流体に比べ非ニュートン流体のほうが現れやすい。

(4) 曲がり管の脈動流では、管の曲がりの影響により、あるディーン数を超えるとニュートン流体と非ニュートン流体の管摩擦係数の振幅の大きさが逆転する。

(5) 非ニュートン流体では、脈動の流量変動に対する管摩擦係数の変動の位相遅れがニュートン流体よりも大きくなる。また、その差はディーン数が大きくなるほど顕著になる。

(6) 近似解析によって得られた管摩擦係数の振幅と、流量変動に対する管摩擦係数の位相遅れは、カオリンスラリーを用いた実験結果と良い一致を示す。

文 献

- (1) 多田・ほか 3 名, 機論, 57-541, B(1991), 2956.
- (2) 多田・ほか 2 名, 機論, 57-542, B(1991), 3333.
- (3) Clegg, D. B. and Power, G., *Appl. Sci. Res. Sec. A*, 12-2(1963), 199.
- (4) 森・中山, 機論, 30-216(1964), 977.
- (5) Ito, H., *Z. Angew. Math. Mech.*, 49-11(1969), 653.
- (6) 高見・ほか 2 名, 機論, 50-452, B(1984), 926.
- (7) Mashelkar, R. A. and Devarajan, G. V., *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 54-2(1976), 108.
- (8) 高見・ほか 2 名, 機論, 52-475, B(1986), 1235.
- (9) Mishra, P. and Gupta, S. N., *Ind. Eng. Chem. Process. Des. Dev.*, 18-1(1979), 130.
- (10) Phan-Thien, N., *Rheol. Acta*, 19(1980), 285.
- (11) 多田・ほか 2 名, 機論, 58-546, B(1992), 349.