水平同軸二重円筒内自然対流の有限要素解析*

加藤 保真^{*1}, 棚橋 隆彦^{*2}, 太田 勝矢^{*3}Finite-Element Analysis of Natural Convection
in Concentric Horizontal Annuli

Yasumasa KATO, Takahiko TANAHASHI and Katsuya OTA

In this paper, a simple FEM scheme is presented which simulates the natural convection of incompressible viscous flow. The Navier-Stokes equations in rotational form with the buoyancy effect is simplified by Boussinesq's approximation. The main algorithm of the GSMAC method is employed to obtain the time-dependent solutions. The equation of continuity is satisfied by the simultaneous relaxation of velocity and Bernoulli function. Natural convections in concentric horizontal annuli at various Rayleigh numbers are numerically investigated in order to validate the present method. The temperature distributions obtained here are in good agreement with the experimental results.

Key Words: Finite-Element Method, Incompressible Viscous Flow, Natural Convection, GSMAC Method, Simultaneous Relaxation, Concentric Horizontal Annulus

1. 緒言

各種機器内の流れ・伝熱現象を予測する手段として、数値計算が広く利用されるようになってきた。ここで大きな問題となるのは、実際の工業機器が有する複雑な境界形状の取り扱いである。この解決策としては、計算領域を物体適合座標系とマルチブロック法で複数の構造格子に分割した後、差分法のような効率的な手法で解く方法と、非構造格子を用いて有限要素法あるいは有限体積法で解く方法の2種類の解法が考えられる。後者は流れ場の計算効率だけ見ると不利であるが、汎用的なプリポスト処理システムを構築しやすいため、計算格子の生成から計算結果の整理までの総合的な時間では有利になる場合もある。現段階では、どの計算手法が流れ・伝熱解析システムの軸として最適かを定める事はできない。しかし非構造格子用プリポスト処理システムの開発が急速に進んでいる現状を考えると、統合的システムを構成しやすい有限要素法の利用が、これから増加していくものと予想される。

本論文では以上の背景をふまえ、工学上の自然対流問題の解析を目的とした簡単な有限要素スキーム

を提案する。基礎方程式としては浮力の効果を考慮した回転形 Navier-Stokes 方程式を用い、GSMAC 法⁽¹⁾⁽²⁾のアルゴリズムを利用して時間進行を行う。GSMAC 法は大型の行列計算を必要とせず、有限要素法の欠点であった計算効率の悪さをある程度改善した手法である。ただし連続の式を満足させる手法としては、形状の不揃いな要素分割をした場合の収束性を向上させるために、流速と Bernoulli 関数の同時緩和法⁽³⁾を用いる。検証用の流れモデルとしては内筒を加熱、外筒を冷却した水平二重円筒内の自然対流を取り上げ、広い Rayleigh 数の範囲で他者の実験および数値計算結果と比較検討を行う。

おもな記号

C_α	: 係数行列 (勾配行列)
$D_{\alpha\beta}$	: 係数行列 (拡散行列)
$E_{\alpha\beta}$	: 係数行列 (対流行列)
e	: 重力加速度方向の単位ベクトル
Gr	: Grashof 数
H	: 無次元 Bernoulli 関数 ($= p + u^2/2$)
$M_{\alpha\beta}$	: 係数行列 (質量行列)
N_α, N_β	: 双一次要素による補間関数
Nu	: Nusselt 数
n	: 単位法線ベクトル
Pr	: Prandtl 数
p	: 密度で基準化された無次元圧力

* 原稿受付 平成3年4月19日。

*¹ 正員、慶應義塾大学大学院(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 正員、慶應義塾大学理工学部。*³ 正員、鹿島建設(株)技術研究所(〒182 調布市飛田給2-19-1)。

Ra	: Rayleigh 数 ($= Gr \cdot Pr$)
R_i	: 内筒半径
R_o	: 外筒半径
r	: 座標原点からの距離
$S_\alpha, S_\alpha', S_\alpha''$	: 境界積分項
T	: 無次元温度差
t	: 無次元時間
$\mathbf{u}$	: 無次元流速ベクトル
Γ_2	: 自然境界
Δt	: 時間刻み幅
λ	: 同時緩和パラメータ
ϕ	: 修正速度ポテンシャル
ω	: 無次元渦度ベクトル ($= \nabla \times \mathbf{u}$)

添字

Γ^e	: 要素 e の要素境界積分
Ω^e	: 要素 e の要素内積分
$[]^n$	: 時間ステップ
$[]^{(k)}$	: 同時緩和ステップ

2. 数値解析手法

2・1 基礎方程式 基礎方程式は対流項を回転形表示した Navier-Stokes 方程式, 連続の式およびエネルギー方程式である。無次元化された基礎方程式系を以下に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{u} \times \omega + \frac{1}{Gr} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Gr} T \mathbf{e} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} T) + \frac{1}{Ra} \nabla^2 T \quad (3)$$

ここでは以下の仮定により, 方程式系を簡単にしている。

- 1) Boussinesq 近似が適用できる。
- 2) 浮力の項の密度以外の物性値の温度依存性を無視できる。
- 3) エネルギー方程式において粘性散逸関数の影響は無視できる。

また自然対流の代表流速は, 浮力と粘性力のつり合いから定めている。

2・2 時間進行法 式(1)を流速について陽的に, Bernoulli 関数について陰的に離散化する。時刻 $(n+1)\Delta t$ での流体の非圧縮性を考慮した同時緩和法を適用すれば, 以下に示す時間前進のアルゴリズムが得られる。
・予測値ステップ ($\mathbf{u}^n, H^n, T^n$ が既知)

$$\omega^n = \nabla \times \mathbf{u}^n \quad (4)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n + \mathbf{u}^n \times \omega^n + \frac{1}{Gr} (\nabla^2 \mathbf{u}^n + T^n \mathbf{e}) \quad (5)$$

・同時緩和反復 ($\tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}, H^{(0)} = H^n$ を初期値とする)

$$\nabla^2 \phi^{(k)} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (6)$$

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \phi^{(k)} / \Delta t \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} - \nabla \phi^{(k)} \quad (8)$$

・エネルギー方程式

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} T)^n + \frac{1}{Ra} \nabla^2 T^n \quad (9)$$

時間前進のアルゴリズムを以下に示す。

step 1) 式(4)(5)から流速の予測値 $\tilde{\mathbf{u}}$ を陽的に求める。

step 2) 流速の予測値から膨張速度 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ を求める。

step 3) 式(6)から修正速度ポテンシャル ϕ を求める。

step 4) 式(7)(8)で Bernoulli 関数と流速を補正する。

step 5) 膨張速度が判定基準を満たすまで step 2 から step 4 を反復する。同時緩和反復が収束したら, $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{(k+1)}, H^{n+1} = H^{(k+1)}$ とする。

step 6) 式(9)から T^{n+1} を陽的に求め時間前進する。

2・3 空間の離散化 速度変数および温度に双一次補間を, その他の変数に要素内一定の補間をそれぞれ用い, 式(4)から式(9)を Galerkin 法により定式化する。ここでエネルギー方程式(9)の対流項については, グループ補間⁽⁴⁾して係数行列の階数を一つ下げ, 計算容量を低減させている。また Poisson 方程式(6)には反復法を用いずに, 簡単な代数計算式から修正速度ポテンシャル ϕ の近似値を求める。離散化の結果を以下に示す。

$$\omega_e^n = \frac{1}{V_e} \mathbf{C}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha^n \quad (10)$$

$$\overline{M_{\alpha\beta}} \tilde{\mathbf{u}}_\beta = \overline{M_{\alpha\beta}} \mathbf{u}_\beta^n + \Delta t [\mathbf{C}_\alpha H_e^n + M_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\beta^n \times \omega_e^n) - \frac{1}{Gr} (D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n - M_{\alpha\beta} T_\beta^n \mathbf{e}) - \mathbf{S}_\alpha] \quad (11)$$

$$\phi_e^{(k)} = -\lambda \mathbf{C}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{(k)} \quad (12)$$

$$H_e^{(k+1)} = H_e^{(k)} + \phi_e^{(k)} / \Delta t \quad (13)$$

$$\overline{M_{\alpha\beta}} \tilde{\mathbf{u}}_\beta^{(k+1)} = \overline{M_{\alpha\beta}} \tilde{\mathbf{u}}_\beta^{(k)} + \mathbf{C}_\alpha \phi_e^{(k)} - \mathbf{S}_\alpha \quad (14)$$

$$\overline{M_{\alpha\beta}} T_\beta^{n+1} = \overline{M_{\alpha\beta}} T_\beta^n + \Delta t [-\mathbf{E}_{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{u} T)_\beta^n - \frac{1}{Ra} (D_{\alpha\beta} T_\beta^n - S'_\alpha)] \quad (15)$$

ここで下添字 α, β は要素内局所節点番号を表し、本論文で用いた四辺形双一次要素では1から4の値をとる。また下添字 e は要素内一定を意味する。式(12)の λ は正の値をとる同時緩和パラメータであり、その値は各要素の形状に依存する⁽³⁾。高 Rayleigh 数自然対流では温度境界層が非常に薄くなるため、壁面近傍で細かい要素分割が必要となる。一般に形状が不揃いな要素分割の場合、同時緩和計算の収束性は悪化する。本論文では要素形状に応じて計算されたパラメータ λ を用いる事により、同時緩和反復を速く収束させて計算時間を短縮させている。

式(12)から式(15)の各係数行列と境界積分項 $S_\alpha, S_\alpha^*, S_\alpha'$ は、それぞれ次式で計算される。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_\alpha N_\beta d\Omega$$

$$C_\alpha = \int_{\Omega^e} \nabla N_\alpha d\Omega$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} \nabla N_\alpha \cdot \nabla N_\beta d\Omega$$

$$E_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega$$

$$S_\alpha = \int_{\Gamma_2^e} N_\alpha \left(H^n \mathbf{n} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n} \right) d\Gamma_2$$

$$S_\alpha^* = \int_{\Gamma_2^e} N_\alpha \phi^{(k)} \mathbf{n} d\Gamma_2$$

$$S_\alpha' = \int_{\Gamma_2^e} N_\alpha \frac{\partial T^n}{\partial n} d\Gamma_2$$

ただし、 $\overline{M}_{\alpha\beta}$ は対角化された集中質量行列を意味する。時間進行型の有限要素スキームでは、これらの係数行列の取り扱い方が計算効率に大きな影響を与える。最近では一点求積法と hourglass 抑制項を組み合わせる拡散行列の計算容量を節約する研究も数多く行われているが⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾、長方形あるいは直方体要素以外ではその精度に不明な点が残されているため本研究では用いていない。計算機の容量に制約がある場合は、時間進行時に Mizukami⁽⁸⁾による積分公式などを利用すれば、計算速度と精度をそれほど下げずに容量を節約できる。ただし本研究では計算容量よりも計算速度を優先し、計算の前段階で Gauss-Legendre の9点積分で求めた係数行列を時間進行の際に用いている。

3. 計算モデル

本論文では内筒を加熱、外筒を冷却した水平同軸二重円筒内の自然対流問題を、スキームの検証用モデルとする(図1参照)。この問題は熱交換器、地下ケーブル、高温ガス炉の高温配管系などをモデル化したもので、

1931年の Beckmann⁽⁹⁾の実験以来これまでに数多くの実験および数値計算結果の蓄積があるため⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾、計算結果の比較検討には適している。また流入流出や特異な角部がないため、境界条件の扱いも容易である。ここで代表長さ L の選び方としては、内筒と外筒のギャップ幅を使う方法($L = R_o - R_i$)、内筒あるいは外筒の直径や半径を使う方法および Itoh ら⁽¹⁴⁾による方法($L = \sqrt{R_i R_o} \cdot \ln(R_o/R_i)$)がある。本研究では他者の結果との比較検討に重点をおいているため、最も一般的なギャップ幅を代表長さとする方法を採用している。

4. 計算結果

4・1 計算条件 静止している円筒間の流体が、突然内筒により加熱されて対流が生じる場合を考える。境界条件としては、流速については壁面上ですべり無し、温度については内筒で高温、外筒で低温の温度一定条件を与えている。初期条件としては、流速および Bernoulli 関数は0とし、計算開始時の流体の温度は低温の外筒温度に設定している。その他の計算条件については表1に示す。要素分割の際には、壁面近傍の格子点を密にしている。なお計算はすべて倍精度変数で行っている。

図1 計算モデル（水平同軸二重円筒）

表1 計算条件

	Pr	Ra	R_o/R_i	Number of elements
Case 1	0.706	4.70×10^4	2.6	7200
Case 2	6.19	2.33×10^5	2.6	6720
Case 3	5.66	6.67×10^7	3.0	18000

(a) $Ra = 4.70 \times 10^4$, $R_o/R_i = 2.6$

(b) $Ra = 2.33 \times 10^5$, $R_o/R_i = 2.6$

図2 温度分布図の比較 (左半円: 本計算結果, 右半円: 可視化実験結果⁽¹¹⁾)

図3 半径方向温度分布図 ($Ra = 4.70 \times 10^4$, $R_o/R_i = 2.6$)

4・2 低 Rayleigh 数流れの計算結果 低 Rayleigh 数流れの計算である Case 1 ($Ra = 4.70 \times 10^4$) と Case 2 ($Ra = 2.33 \times 10^5$) は、本スキームの妥当性を検証するために Kuehn-Goldstein⁽¹¹⁾の実験に合わせて計算条件を設定している。図2に、定常状態における等温線図を、Kuehn らのマッハツェンダ干渉法による可視化写真とあわせて示す。Case 1, Case 2とも大局的な温度分布については、本計算結果は可視化実験結果と良く一致している。さらに詳細な比較を行うために、Case 1の定常状態における半径方向温度分布を、Kuehn らの計測値とあわせて図3に示す。横軸の R はギャップ幅で無次元化された内管からの距離を表し、 $R = (r - R_i)/(R_o - R_i)$ で定義される。実験結果では角度 $\theta = 30^\circ \sim 120^\circ$ の温度分布線で、高温の内筒から低温の外筒へ向かう間でいったん温度が下がる現象が見

図4 平均 Nusselt 数の時間変化 ($Ra = 4.70 \times 10^4$, $R_o/R_i = 2.6$)

図5 温度分布の時間変化 ($Ra = 6.67 \times 10^7$, $R_o/R_i = 3.0$)

左半円: 可視化実験結果 ($time = 5 \text{ min}$), 右半円: 数値計算結果 ($t = 1.0 \times 10^5$)

図6 数値計算結果と画像処理された可視化実験結果⁽¹⁷⁾の比較 ($Ra = 6.67 \times 10^7$, $R_o/R_i = 3.0$)

られる。この温度場の逆転現象を含めて、本計算結果は実験結果を良好に再現している。Case 1における内筒と外筒での平均 Nusselt 数の時間変化を、図 4 に示す。平均 Nusselt 数 $\overline{Nu}$ は次式で定義され、下添字 i と o はそれぞれ内筒と外筒における値を意味する。

$$\overline{Nu}_{i,o} = -\frac{\ln(R_o/R_i)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=R_i,R_o} d\theta \quad (16)$$

本計算では、 $|(\overline{Nu}_i - \overline{Nu}_o)/[(\overline{Nu}_i + \overline{Nu}_o)/2]| \leq 1.0 \times 10^{-2}$ を定常の目安としている。図 4 を見ると計算の初期で、内筒と外筒の平均 Nusselt 数がオーバーシュートしている事がわかる。この現象は Tsui-Tremblay⁽¹²⁾ の計算でも報告されているが、その原因については明確にされていない。本計算では Tsui らの 20 倍以上の計算格子点数を使用している事から、オーバーシュートの原因は数値的誤差よりも高温サーマルブルーム発達初期の物理現象にあるように思われる。また Tsui らは、定常状態で内筒と外筒の平均 Nusselt 数が一致していない例をいくつか示している。これについては、Tsui らが半径方向 16、円周方向 21 という少ない格子点数を用いたためと思われる。離散点の温度情報から式(16)を計算する場合、温度境界層内に十分な格子点数を確保していないと平均 Nusselt 数の誤差は大きくなる。Case 1, 2 については、要素数を約 3 分の 1 にした計算格子依存性のテストでも、約 2% の誤差の範囲内で同じ温度場が得られた事を付記しておく。

4・3 高 Rayleigh 数流れの計算結果 Case 3 の計算 ($Ra = 6.67 \times 10^7$) は、高 Rayleigh 数での本スキームの安定性の確認を目的としている。ここでは過去に計算例の少ない、同軸二重円筒内の高 Rayleigh 数自然対流の発達過程を、温度分布図を用いて図 5 に示す。青色が低温を、赤色が高温をそれぞれ表している。薄い温度境界層や細いサーマルブルームが立ち上がる様子などの、高 Rayleigh 数流れの特徴がよく再現されている。二重円筒の頂上付近では複雑な温度分布が見られるが、温度場は対称性を保っている。ただし温度分布図ではわからないが、外筒に沿って高温領域が広がる部分で温度場に若干の振動が見られた。この振動の原因としては、高 Rayleigh 数流れの影響と数値的不安定の両者が考えられる。十分な計算格子点数を確保できずに数値振動が発生した場合は、時間積分の高精度化⁽¹⁵⁾や対流項の風上化⁽¹⁶⁾などが、数値振動の除去手段として有効と考えられる。無次元時間 $t = 1.0 \times 10^5$ の温度分布図を、Ota ら⁽¹⁷⁾による可視化実験結果と比較して図 6 に示す。左側が画像処理された可視化実験結果で、右側が本計算結果である。画像

処理された結果は $25.5 \sim 25.9^\circ\text{C}$ の範囲で色分けされている。これだけで詳細な議論はできないが、計算結果と実験結果は定性的に一致しており、本計算結果はある程度妥当なものといえる。このような自然対流の発達過程を解析できる手法の開発は、装置の始動・停止時の過渡特性を調べるうえで非常に重要である。

5. 結言

流速と Bernoulli 関数の同時緩和法を用いた非圧縮流体用の有限要素スキームに、エネルギー方程式を組み込み同軸二重円筒内自然対流の解析を行った。得られた結言は以下の通りである。

- (1) $Ra = 4.70 \times 10^4$ および $Ra = 2.33 \times 10^5$ の低 Rayleigh 数流れの計算では、本計算結果は温度場について Kuehn-Goldstein の実験結果と良好に一致した。
- (2) $Ra = 6.67 \times 10^7$ の過渡流れの計算でも本スキームは安定であり、定性的に妥当な結果を得る事ができた。
- (3) 二重円筒内で対流が発達する初期において、内筒と外筒の平均 Nusselt 数の時間変化にオーバーシュートが現れた。

参考文献

- (1) 棚橋・斉藤, 京都大学数理解析研究所講義録, **546** (1985), 122.
- (2) 河合・ほか 2 名, 機論, **54-507**, B (1988), 3118.
- (3) 加藤・棚橋, 機論, **57-538**, B (1991), 2640.
- (4) Fletcher, C.A.J., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **37** (1983), 225.
- (5) Flanagan, D.P. and Belytschko, T., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17** (1981), 679.
- (6) Gresho, P.M. et al., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **4** (1984), 557.
- (7) 奥田ほか 2 名, 機論, **54-498**, B (1988), 337.
- (8) Mizukami, A., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **59** (1986), 111.
- (9) Beckmann, W., *Forsch. Geb. d. Ingenieurwes.*, **2** (1931), 165.
- (10) Bishop, E.H. et al., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **11** (1968), 1741.
- (11) Kuehn, T.H. and Goldstein, R.J., *J. Fluid Mech.*, **74** (1976), 695.
- (12) Tsui, Y.T. and Tremblay, B., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **27** (1984), 103.
- (13) Rao, Y.F., ほか 4 名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **28** (1985), 705.
- (14) Itoh, M., ほか 3 名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **13** (1970), 1364.
- (15) 加藤・池川, 第 7 回流体力学における数値解析シンポジウム報文集, (1986), 125.
- (16) Patanker, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), Hemisphere.
- (17) Ota, K., ほか 4 名, *Proc. 3rd Int. Symp. on Fluid Control, Measurement, and Visualization, FLUCOME'91*, (1991), 751.