境界要素法による平行円板間のメニスカス不安定の非線形解析*
(第1報, 実験結果との比較)古口 日出男^{*1}, 丸山 博幸^{*2}, 矢田 敏夫^{*1}Nonlinear Meniscus Instability Analysis of Viscous Fluid Between Circular
Parallel Plates By Boundary Element Method
(1st Report, A Comparison with Experimental Results)

Hideo KOGUCHI, Hiroyuki MARUYAMA and Toshio YADA

In the present paper nonlinear evolution of disturbances at the meniscus between parallel circular plates is simulated by a boundary element method. To simulate accurately such a nonlinear phenomenon, the thickness of liquid remaining on the plates is obtained numerically against the low capillary number $Ca < 1.0$, which is defined by the viscosity, velocity and surface tension. An integral equation for the boundary element analysis is newly proposed by taking into account the thickness of liquid remaining on the plates. The results in the simulation for the curvature, velocity and the tip position of disturbances growing at the fastest speed were compared with the experimental ones from various points of view, and it was shown that both agreed fairly well.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Viscous Flow, Capillary Number, Disturbance.

1. 緒言

二枚の板の間の狭いすき間に粘性流体を満たし、その板を引き離すと空気がすき間に入り込む。このとき引き離す速度や板のすき間の厚さ、流体の粘度がある値より大きくなると液体の自由界面に乱れが生じ(図1参照)、板面上に液体が樹枝状パターンを呈して残る。この自由界面が乱れる現象はメニスカス不安定⁽¹⁾と呼ばれ、接着テープを接着面からはがす場合⁽²⁾、ジャーナル軸受け内の油膜が破断する場合^{(3),(4),(5)}などに起こる。また粘性流体に限らず、デンドライト結晶成長⁽⁶⁾などの移動する自由界面や高温における金属材料の亀裂成長^{(6),(7)}および非晶質金属の破断におけるき裂先端でも起こると思われる。

これまで、実験と理論の両面からメニスカス不安定現象は研究されてきた⁽¹⁾⁻⁽²⁶⁾。しかし、その現象を数値

的にシミュレートして、実験と比較することはほとんど行われていない。この理由として移動自由界面における圧力の境界条件がよくわかっていなかったことや、さらに従来までの領域型の計算手法では時間とともに進展し非常に複雑な形状を呈するようになる自由界面を高精度に離散化することに多くの困難があったことなどが挙げられる。ところで、近年境界要素法が様々な問題に用いられるようになり、この種の問題にも適用されるようになってきた。

図1 実験で観察されるメニスカス自由界面

* 原稿受付 平成3年4月17日。

^{*1} 正員, 長岡技術科学大学工学部(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。^{*2} 准員, 長岡技術科学大学大学院。

本研究は、分離する面に形成されるパターンを解析することから、粘度の高い流体の物性値（粘度、表面張力）や粘性の固体材料の破面形成に必要なエネルギー等を推定するための基礎研究であり、特に本報は本研究で示した樹枝状パターン形成の数値シミュレーションの妥当性を検討しようとするものである。ここでは、特にこの種の移動自由界面の数値解析に適した方法と考えられる境界要素法を用いて、平行円板間にある粘性流体の自由界面に発生する乱れの成長の様子をシミュレートし、これまで得られた実験結果と比較検討する。

前報⁽²⁴⁾では2枚の平行円板間に粘性流体を入れて、その板を引き離したときに観察されるメニスカス不安定現象をシミュレートするための境界積分方程式を定式化し、シミュレーションを行った。その結果を実験結果と比較すると自由界面の移動速度が小さく、板面上に残留する液膜を考慮する必要があることが推察された。しかし、この問題に対する残留液膜の厚さは求められていないため、本報告ではまず最初にこの問題における残留液膜の厚さをすき間に対する比として数値的に求める。その後、残留液膜の厚さを考慮して、メニスカス不安定のシミュレーションを行うことにする。

2. 板に残留する液膜の厚さ

残留液膜のすき間に対する比は本研究のようにすき間が時間と共に増加する場合には求められていないが、二次元多孔質媒体中の流れをモデル化したHele-Shawセルの研究においては、実験および理論から式(1)で定義されるキャピラリ数の関数として求められている。

$$Ca = \frac{\mu(\vec{U} \cdot \vec{n})}{T} \quad (1)$$

ここで、 $\vec{U}, \vec{n}$ は自由界面の移動速度ベクトルと方向余弦、 μ は粘性係数、 T は表面張力である。

しかし、本研究の圧力の基礎式はポアソン方程式である⁽²⁶⁾のに対し、Hele-Shawセルではラプラス方程式であり、支配方程式が異なっている。圧力の支配方程式

図2 自由表面を有する流れの二次元モデル

このような違いが、残留液膜の厚さに及ぼす影響を調べる必要がある。そこで、乱れが生じてない自由界面について、幅方向に無限に長い二次元流れを考えた。本研究の流れは基本的には遅い流れであるのでStokes近似で表すことができると考え、Stokes流れに関する二次元の基本解を用いて境界要素法により残留液膜を求めることにする。そして、Hele-Shawセルで求められている残留液膜とすき間の関係と以下に述べる方法で求めた関係を比較する。

二次元の流速の遅い粘性流(Stokes流れ)の境界積分方程式と基本解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q)u_j(Q)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q)t_j(Q)d\Gamma \\ U_{ij}(P, Q) = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \delta_{ij} + R_{ij}R_{j\ell} \right\} \\ T_{ij}(P, Q) = -\frac{R_{ij}R_{j\ell}}{\pi R} \frac{\partial R}{\partial n} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカのデルタ、 R はソース点 P と観測点 Q との距離、 R_{ij} は距離の方向微分、 u_j は速度、 t_j は粘性応力である。

式(2)を用いることにより境界要素法で二次元のStokes流れを解析することができる。しかし、長さ方向(x 軸方向)に比べてすき間方向(z 軸方向)が著しく狭いような問題に境界要素法解析を適用すると解が不安定になり、精度が低下することが知られている(本研究の円板の場合、すき間に対する円板半径の比はおおよそ60~200であるため精度が低下する)。このため図2に示すように、自由界面先端からある距離 Δx だけ離れたところの断面上の流速を以下に述べる方法で近似的に求め、それを数値解析の境界条件にする。その理論式について以下に示す。

図2に示すように長さ方向に x 軸を、液膜の厚さ方向に z 軸をとり、座標の原点をすき間の中央にとる。初期の板のすき間 h_0 と板の長さ B_0 の大きさ $h_0 \ll B_0$ を考慮すると、慣性力を考慮しない場合の圧力の基礎式は式(3)となる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{12\mu V_s}{h^3} \quad (3)$$

ここで、 p は圧力、 μ は粘性係数、 V_s は板を引き離す速度、 h はすき間である。

式(3)を次の圧力の境界条件の下で解く。この式(4)は、Hele-Shawセルの研究においてParkとHomsy⁽¹⁰⁾及びReinelt⁽¹²⁾により導かれたものを二次元の自由界面に対するものに修正したものである。

$$p = p_a - \frac{2T}{h} \quad (4)$$

ここで、 p_a は大気圧である。

その結果、圧力は次式のように求められる。

$$p = \frac{6\mu V_z}{h^3}(x^2 - \bar{x}^2) + p_a - \frac{2T}{h} \quad (5)$$

ここで、 $\bar{x}$ は自由界面先端の位置である。 u_x は、式(5)を x で微分して圧力勾配を導出することで求めることができ、さらに、 u_x は u_x を連続の式に代入し $u_z=0$ ($z=0$)の境界条件を用いることにより次式のように求められる。

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{3V_z x}{2h^3}(4z^2 - h^2) \\ u_z &= \frac{V_z z}{2h^3}(3h^2 - 4z^2) \end{aligned} \quad (6)$$

これまでの研究から、自由表面からある程度流体内部に入った位置の速度分布に対するメニスカスの存在の影響はほとんど無視できる⁽¹³⁾と考えられるため、この解を $x=\bar{x}-\Delta x$ における断面の速度とする。しかし、この解は残留液膜を考慮していない場合の近似解であり、これから得られる結果の有効性については検討する必要がある。

ところで、この問題では自由界面上で圧力は既知であり、速度が未知である。自由表面における圧力は表面張力および表面の曲率半径を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{t}_x &= \frac{T}{\mathcal{R}} n_x \\ \bar{t}_z &= \frac{T}{\mathcal{R}} n_z \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\mathcal{R}$ は自由表面の曲率半径、 n_x は x 方向の、 n_z は z 方向の方向余弦である。

すなわち、境界条件をまとめると以下ようになる(記号は図2を参照)。

$$\begin{aligned} \Gamma_a: t_x &= \bar{t}_x, t_z = \bar{t}_z \\ \Gamma_b: u_x &= 0, u_z = \frac{1}{2}V_z \\ \Gamma_c: u_x &= \bar{u}_x, u_z = \bar{u}_z \\ \Gamma_d: u_x &= 0, u_z = -\frac{1}{2}V_z \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 u_x 、 u_z は式(6)から得られる Γ_c 上の値である。式(3)の基本解を用いて式(8)の境界条件の下で境界積分方程式を離散化して解くと、境界上の全ての未知量が求まる。自由界面の新しい位置は、このように得られた自由界面の速度を式(9)の差分近似式に用いることにより求められる。

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) \\ &+ \left\{ \theta(\bar{u} \cdot \bar{n})^{(n)} + (1 - \theta)(\bar{u} \cdot \bar{n})^{(n+\Delta n)} \right\} n_x^{(n)} \Delta t \\ z(t + \Delta t) &= z(t) \\ &+ \left\{ \theta(\bar{u} \cdot \bar{n})^{(n)} + (1 - \theta)(\bar{u} \cdot \bar{n})^{(n+\Delta n)} \right\} n_z^{(n)} \Delta t \end{aligned} \quad (9)$$

また、時間間隔 Δt は式(10)から決める。ただし、 θ は0~1の実数、 n_x 、 n_z は x 、 z 方向の方向余弦、 Δt は微小時

間である。この Δt は次式から求めた。

$$\kappa = \frac{\Delta t}{L} (\bar{U} \cdot \bar{n})_{\max} \quad (10)$$

ここで、 L は節点間隔、 κ は L に対する Δt 間の節点移動距離の比で、本研究では0~1の実数とした。すなわち、1回の時間ステップで最も移動する節点についても節点間隔よりは進展しないようにした。

初期の自由界面の形状が与えられると、時間に対して逐次離散化方程式を解いていき、自由界面の座標すなわち界面形状を求めることができる。その初期の自由界面の形状は以下のように与えた。まず初めに自由界面を、初期のすき間を直径とする半円で近似する。板が静止して自由界面が応力の平衡条件を満足している場合には、自由界面は移動しない。しかし、これを満足していない場合には、界面に速度が生じる。よって、半円で与えた自由界面がこの条件を満足するまでわずかに移動するようにし、このように得られた自由界面を初期の形状とした。また、図2に示す Δx としてすき間の3倍の長さとした。

2.1 パラメータ κ の数値解に及ぼす影響 まず、節点間隔に対する微小時間に進む距離の比 κ の数値結果に及ぼす影響を調べる。ここでは、 $\kappa=0.6$ と 0.8 (前報⁽²⁶⁾の定義に従うと 0.3 と 0.4 に相当する)のシミュレーション結果を比較する。このときの計算条件は、初期の板のすき間 $h_0=1.0$ mm、表面張力 $T=21.2$ mN/m、板を引き離す速度 $V_z=1.0$ mm/min、板の長さ $B_0=60$ mm、粘度 $\mu=3.12$ Pasである。 $\kappa=0.6$ の場合の時間に対する自由界面の移動の様子を図3に示す。この図の横軸は板の長さ方向の座標、縦軸はすき間方向の座標である。自由界面の先端は時間と共に左に向かって移動していく。この進展速度は時間と共に減少していく。また、時間と共に板のすき間は広くなり、これにともない自由界面先端の曲率半径は大きくなっていく。残留液膜に関しては、板の端からある程度距離が離れたところから自由界面先端に向かって一様な厚さの残留液膜が形成されている。シミュレーション結果に対する κ の影響を明確にするために、自由界面の先端の移動速度と残留液膜の厚さに着目する。まず、時間に対する自由界面の先端の移動速度と残留液膜を考慮していない

図3 時間に対する自由界面の移動の様子($\kappa=0.6$)

理論から求められる平均移動速度を図4に示す。この図から移動速度に対して κ の影響はほとんどないが、 $\kappa=0.8$ の結果に若干の変動が見られることがわかる。また、先端の移動速度は平均速度より大きくなっており妥当な結果と考えられる。次に、時間に対する残留液膜の厚さの変化の様子を図5に示す。ここで、すき間方向の残留液膜の厚さは次式で計算した値である(図6参照)。

$$m_0 = \frac{h-w}{h} \quad (11)$$

すなわち、板の端と自由界面先端の中間の位置におけるすき間から空気の厚さを引いた値をすき間で割ったものである。図5では、すき間方向の残留液膜の厚さ m_0 は時間に対してほぼ直線的に減少していき、パラメータ κ による明確な違いは見あたらない。なお、 κ の数値解に及ぼす影響に関しては前報で既に報告しており、前報では $\kappa=0.8$ (本報の κ の定義によると κ の値は2倍になる)を用いたが、図4に示したように $\kappa=0.8$ の場合の自由界面先端速度の結果に変動が見られた。また、 κ の違いにより数値解析結果はほとんど同じであることが分かったため、これ以降の計算では $\kappa=0.6$ を用いることにする。

2.2 従来のHele-Shawセルにおける研究結果との比較
Hele-Shawセルの研究では、残留液膜のすき間に対する比はキャピラリ数の小さい範囲($C_a < 1.0$)では、次式のようにキャピラリ数の関数として与えられている。

$$m = m_0(C_a) + m_1(C_a) \frac{h}{2\rho} \quad (12)$$

ここで、 h はすき間、 ρ は z 軸方向に対して垂直な面内における自由界面の曲率半径であり、上式の右辺の第1項目の m_0 はすき間方向の自由界面の残留液膜への寄与を表し、第2項目の m_1 は板の幅方向の自由界面の曲率の残留液膜への影響を表している。この m_0, m_1 はReinelt⁽¹²⁾により、理論と数値計算の両面から検討されている。ここでは、流れを二次元流れとして考えているため、式(12)における m_0 だけを求めたことになる。この m_0 についてReineltの結果と比較してみる。図7に今回の数値シミュレーションの結果を記号で、Reinelt⁽¹²⁾の結果を実線で示す。この図の横軸は自由界面先端におけるキャピラリ数である。この図からこの問題に対して求めた残留液膜の厚さはほぼHele-Shawセルで求めたそれに一致していることがわかる。この理由として、残留液膜の厚さは自由界面先端での速度に依存していると考えられるが、Hele-Shawセル内の流れも本問題における流れも同じStokes流れである。この問題では時間に対してすき間が増加するが、板を引き離す速度と自由界面先端での速度を比較した場

図4 自由界面の先端速度および平均速度の時間に対する関係

図5 残留液膜のすき間に対する比の時間との関係

図6 m_0 の定義の説明

図7 キャピラリ数と m_0 の関係

合、自由界面先端の速度の方がかなり大きく、自由界面先端での速度が支配的になっていると考えられる。これらのことにより、ここで求めた自由界面先端でのキャピラリ数に対する残留液膜の比はHele-Shawセル

の研究で求められたそれとほぼ等しくなったものと考えられる。逆に、本解析では数値解析のための速度の境界条件として近似解を用いていたためにキャピラリ数の大きい領域でReineltの結果と差が生じたとも考えられる。これに関しては詳細を別途報告したい。

3. 残留液膜を考慮した場合の平行円板間のメニスカス不安定性解析

3.1 残留液膜の厚さを考慮した境界積分方程式の定式化 第2章で求めたすき間方向の残留液膜の厚さを $C_a < 1.0$ の範囲で関数近似すると、次式のようになる。

$$m_0(C_a) = 0.682935 + 0.189005 \exp(-3.20016 C_a) + 0.127678 \exp(-36.4491 C_a) \quad (13)$$

現在のところ、式(12)の第2項目は求められていない。ここでは、円板半径に対してすき間がかなり狭い本研究のような問題ではすき間方向の自由界面の曲率の影響が圧力に対して支配的であると考え、式(12)の第2項目を省略し、 m として式(13)を用いることにする。

2枚の平行円板の間に粘性流体を満たして、速度 V_z で垂直に板を引き離したときの圧力の基礎式は、次のポアソン方程式で表される⁽²⁶⁾。

$$\nabla^2 p = \frac{12\mu V_z}{h^3} \quad (14)$$

残留液膜を考慮しない場合の式(14)に対する境界積分方程式の誘導は前報⁽²⁶⁾で詳細に示した。次式は、その式に残留液膜を考慮して得られた積分方程式である。

$$\begin{aligned} & \int_r \{1 - m(C_a, Q)\} C_a(Q) \ln(R) d\Gamma = \\ & \frac{\pi h^2}{48} \left\{ \int_r \frac{1}{\rho(Q)} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{\rho(P)} \int_r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} d\Gamma \right\} \\ & - \frac{\mu V_z}{4hT} \int_r R(2\ln R - 1) \frac{\partial R}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

この式の左辺にはキャピラリ数の関数である残留液膜の項があるので、式(15)を直接数値的に解くことは容易ではない。ところで、ほとんどの場合時間に対するキャピラリ数の変化は連続的で緩やかであるので、自由界面位置を求めたい時刻 t におけるキャピラリ数を微小時間 Δt 前、すなわち $t - \Delta t$ でのキャピラリ数で近似して、式(15)を次式のように表す。

$$\begin{aligned} & \int_r \{1 - m(C_a, Q, t - \Delta t)\} C_a(Q, t) \ln(R) d\Gamma = \\ & \frac{\pi h^2}{48} \left\{ \int_r \frac{1}{\rho(Q, t)} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{\rho(P, t)} \int_r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} d\Gamma \right\} \\ & - \frac{\mu V_z}{4hT} \int_r R(2\ln R - 1) \frac{\partial R}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $m(C_a, Q, t - \Delta t)$ は観測点 Q での $t - \Delta t$ における C_a から

求まる残留液膜のすき間に対する比であり、 $C_a(Q, t)$ は時刻 t におけるキャピラリ数であり、 $\rho(Q, t)$ 、 $\rho(P, t)$ はそれぞれ時刻 t における観測点 Q 、ソース点 P での曲率半径である。

この境界積分方程式(16)を離散化して自由界面上の各節点についてキャピラリ数 $C_a(Q, t)$ を求めることができる。このキャピラリ数と式(1)のキャピラリ数の定義式より各節点における速度が求まる。自由界面の新しい座標は式(9)の速度にこの値を適用することにより求めることができる。

3.2 シミュレーション結果の妥当性 シミュレーションと実験の結果を比較するために、実験で自由界面が乱れ始めたときの界面形状を数値解析における初期の自由界面とした。まず、実験条件が、初期すき間 $h_0 = 0.5 \text{ mm}$ 、円板半径 $R_0 = 60 \text{ mm}$ 、引張り速度 $V_z = 2.0 \text{ mm/min}$ 、粘度 $\mu = 2.91 \text{ Pa s}$ 、表面張力 $T = 21.2 \text{ mN/m}$ の場合、およそ4秒後に乱れが発生し、図8に示すように成長した。図9はこの実験条件における乱れの成長の様子をシミュレートしたときの解析結果を時間に対して示したものである。この図から波長の長い乱れは時間と共に成長し、逆に波長の短い乱れは減衰して

図8 実験で観察された時間に対する自由界面における乱れの成長の様子

図9 時間に対する自由界面の乱れの成長の様子

いることがわかる。このように、大きい乱れに囲まれた小さい乱れが、成長せずに消滅することをシールディングと呼んでいる⁽¹⁾。そして、波長の長い乱れが次第に支配的になりフィンガを形成する。自由界面のこのような挙動は実験で観察されるものに似ている。

つぎに、時間に対するフィンガ先端と底点(板端に近い自由表面)の位置について、実験結果と比較する。図10は時間に対するフィンガ先端と底点の円板中心からの距離を示す。この図で、実験ではある時間で底点の動きは止まるが、計算ではわずかであるが移動している。フィンガ先端位置に関するシミュレーション結果は、実験結果とほぼ一致している。この理由として以下のことが考えられる。すなわち、現在のところシミュレーションでは乱れのない円形の自由界面を初期の自由界面とすることができず、実験において自由界面が乱れ始めた位置と時間を初期の自由界面としている。ところが、実際には円板の端から自由界面に乱れが生じる位置までの間の板面には液膜が残留している。しかし、シミュレーションではこれらのことを考慮していないため、円板の端から初期に与える自由界面までの残留液膜の影響の大きいフィンガ底点(円板端に近い自由表面)での位置が実験と異なってきたものと思われる。これらのことは他の実験条件をシミュレートした場合についても同様の結果が得られた。このことは逆にこの章で誘導した境界積分方程式に与える初期条件の与え方を検討することにより、実験結果をさらによくシミュレートできるようになる可能性があることを示唆しているものと考ええる。

3.3 メニスカス不安定性の数値シミュレーションと実験との比較 本節では、幾つかの実験条件の異なる場合の実験とシミュレーションの結果を定量的に比較する。計算に用いる自由界面の初期形状は、実験で観測された乱れ始めた時の界面形状を用いることにした。まず、自由界面が進展する様子をビデオカメラで撮影し、その自由界面を画像処理して、乱れの波長に対してその振幅がおおよそ1/2になった時を自由界面が

乱れ始めた時刻とした。その時の自由界面の平均半径、自由界面の乱れの波数を画像処理により求めた。計算に用いる自由界面の初期形状の平均半径が実験における平均半径になるようにした。また、計算では自由界面の初期の乱れの波数は一様乱数で与えたが、その際実験で得られた波数になるように、0.3~0.7の間の乱数に対して調整した。乱れの振幅は、その波数に対する波長に対して1/2となるように与えた。

3.4 粘性流体の粘度 μ による成長の違い 図11(a)は、数値計算と実験における時間に対するフィンガ先端の曲率半径の変化の様子を粘性流体の粘度をパラメータとして示したものである。また、このときに用いた計算条件を表1に示す。シミュレーションの結果の傾向は実験結果のそれとほぼ一致しており、粘性

表1 計算条件

Viscosity μ (Pa·s)	Time (sec)	$\bar{R}$ (mm)	Wave number k
1.03	3.00	51.3	52
3.12	2.15	52.7	104
10.5	1.80	52.5	140

(a) フィンガ先端の曲率半径の経時変化

図10 時間に対するフィンガの先端と底点位置の関係

(b) フィンガ先端の円板端からの距離の経時変化

図11 成長に対する粘度の影響

流体の粘度が大きくなるに伴い、早い時刻で曲率半径の値が大きくなり始める。これは、粘性流体の粘度が高いと自由界面がより早い時期に乱れる始めるためであることと、板面上に残る流体の液膜が厚くなるため空気の流入する速度も速くなるためと考えられる。

次に、図11(a)と同じ計算条件で求めた半径方向の乱れの成長であるフィンガ先端の円板端からの距離の時間に対する関係を図11(b)に示す。この図でフィンガ先端の円板端からの距離は、僅かであるが粘度の高い場合にはシミュレーションの方が実験と比較して小さ

(a) フィンガ先端の曲率半径の経時変化

(b) フィンガ先端の円板端からの距離の経時変化

図12 初期すき間のフィンガ成長に対する影響

表2 計算条件

Initial thickness h_0 (mm)	Time (sec)	$\bar{R}$ (mm)	Wave number k
0.3	0.80	53.3	168
0.5	1.80	52.5	140
0.75	4.70	48.9	96
1.05	11.43	43.8	52

く、粘度の低い場合では逆に大きい。しかし、全体的にはシミュレーションの結果は、実験結果とほぼ一致している。

3.5 初期すき間 h_0 による成長の違い 図12(a)は、計算と実験におけるフィンガ先端の曲率半径の時間に対する変化を初期すき間 h_0 をパラメータとして示したものである。また、このとき用いた計算条件を表2に示す。図12(a)から初期すき間が狭いほどフィンガ先端の曲率半径の時間に対する変化は大きいことがわかる。シミュレーション結果の傾向はほぼ実験結果のそれに一致している。しかし、実験結果では初期すき間の狭い場合の曲率半径の変化は時間に対して直線的に増加しているのに対して、シミュレーションでは乱れの曲率半径は一度減少し、その後実験結果の曲率半径の変化とほぼ同じ割合で増加している。これは計算に用いた初期の自由界面形状がここにプロットした実験における自由界面形状と異なっていたためと考えられる。次に、図12(a)と同じ計算条件における円板端からフィンガ先端までの距離と時間との関係を図12(b)に示す。この図から半径方向のフィンガの成長も円周方向のフィンガの成長と同様に、初期すき間が狭いほど時間に対して大きいことがわかる。シミュレーションにおける傾向は、実験結果とよく一致してい

図13 シミュレーションで求められた $\rho h_0/h$ と $\rho R_0/R_{tip}$ の関係 (実線は実験式)

表3 計算条件

R_0 (mm)	V_s (mm/min)	Time (sec)	$\bar{R}$ (mm)	Wave number k
50	1.0	7.5	41.4	96
60	0.5	20.4	51.4	76
60	5.0	1.37	53.9	144
75	0.5	15.7	64.6	92
75	5.0	1.17	67.3	208

る。

3.6 フィンガ先端の位置と曲率半径の関係 本節では、これまでの各節で検討してきたフィンガの成長の結果を総合する。すなわち、フィンガ先端位置に対するその曲率半径の比を円板半径で標準化した値との関係を調べる。その結果を図13に、計算条件を表3に示す。図中の実線は実験結果を最小二乗法で近似した実験式(17)を示したものである。

$$\frac{\rho h_0}{h} = 0.735 \left(\frac{\rho R_0}{R_{ip}} \right)^{0.678} \quad (17)$$

図13から、シミュレーションの結果と実験とはほぼ一致していることがわかる。実験式(17)は多くの実験結果をまとめたもので、この式がシミュレーションからも導くことが出来ることを示すことができた。

4. 結 論

本研究では、二枚の平行円板の間に自由界面を有する粘性流体を挟んで、その板を引き離したときに実験で観察される自由界面の不安定現象をシミュレートする方法を示した。ここでは、物体の境界だけを離散化すればよい境界要素法を用いて平行平板間の圧力の基礎式を境界積分方程式に定式化した。また、この問題では円板面に残留する液膜の厚さは知られておらず、不安定現象の実験結果と比較する上でこれを考慮する必要があると考え、境界要素法を用いて数値的に求めた。そして、新たにこの残留液膜を考慮した境界積分方程式を定式化し、自由界面の乱れの成長に関するシミュレーションを行った。これらのシミュレーション結果と実験結果を比較して次の結論を得た。

- (1) すき間方向の残留液膜のすき間に対する比をキャピラリ数の関数として表したところ、Hele-Shawセルで求められている($Ca < 1.0$ の範囲で)ものとほぼ一致する結果が得られた。
- (2) メニスカス不安定現象のシミュレーションでは、実験で観察された乱れ始めの頃の自由界面を計算における初期の自由界面として計算し、その結果と実験結果を比較したところほぼ一致した結果が得られ、ここで定式化した境界積分方程式の妥当性を確認した。
- (3) 計算に用いる初期の自由界面の与え方について1手法を示した。さらに、この方法で数値解析の初期の自由界面を与えてシミュレーションを行い、自由界面の乱れの半径方向の成長と円周方向の成長を実験結果と定量的に比較したところほぼ一致した結果を得た。
- (4) フィンガ先端の曲率半径 ρ とその先端位置 R_{ip} との比を円板半径で標準化した値 $\rho R_0/R_{ip}$ と $\rho h_0/h$ との関係は

これまで実験で調べられている。シミュレーション結果を実験結果と比較してこの関係を確認したところほぼ一致し、この関係式がメニスカスの乱れの曲率を表す上で意味のあるものであることを確認できた。

文 献

- (1) Pearson, J.R.A., J. Fluid Mech., 7(1960), 481.
- (2) McEwan, A.D. and Taylor, G.I., J. Fluid Mech., 26 (1966), 1.
- (3) Dalmaz, G., Trans. ASME. J. Lub. Tech., 102(1980), 466.
- (4) Savage, M.D., J. Fluid Mech., 80(1977), 743.
- (5) Savage, M.D., J. Fluid Mech., 80(1977), 757.
- (6) Argon, A.S. and Salama, M., Materials Science and Engineering, 23(1976), 218.
- (7) Takayama, S. and Maddin, R., Phil. Mag., 32(1975), 457.
- (8) Unger, L.H. and Brown, R.A., Phys. Rev, B29(1984), 1367.
- (9) Nittmann, J., Daccord, G. and Stanley, H.E., Nature, 314(1985), 141.
- (10) Park, C.W. and Homsy, G.M., J. Fluid Mech., 139(1984), 291.
- (11) Park, C.W. Gorrell, S. and Homsy, G.M., J. Fluid Mech., 141(1984), 291.
- (12) Reinelt, D.A., J. Fluid. Mech., 183(1987), 219.
- (13) Reinelt, D.A., SIAM J. Sci. Stat. Comput., 6(1985), 542.
- (14) Saffman, P.G. and Taylor, G.I., Proc. R. Soc. Lond., A245(1958), 312.
- (15) Saffman, P.G., J. Fluid. Mech., 173(1986), 73.
- (16) Tabeling, P., Zocchi, G. and Libchaber, A., J. Fluid. Mech., 177(1987), 67.
- (17) Taylor, G.I., J. Fluid. Mech., 10(1961), 161.
- (18) Thome, H., Rabaud, V., and Couder, Y., Phys. Fluids, A, 1, 2(1989), 224.
- (19) Kopf-Still, A.R. and Homsy, F.M. American Inst. Phys. Fluid., 31(1988), No.2.
- (20) 晴海, 細川, 長谷川, 近野, 機論, 55-520, B(1989), 3691.
- (21) 古口, 岡田, 機論, 53-491, B(1987), 2602.
- (22) 古口, 機論, 53-491, B(1987), 2070.
- (23) 古口, 矢田, 田村, 機論, 54-497, B(1988), 101.
- (24) 古口, 矢田, 田村, 機論, 54-505, B(1988), 2446.
- (25) 古口, 矢田, 高村, 機論, 56-522, B(1990), 159.
- (26) 古口, 矢田, 丸山, 機論, 57-539, B(1991), 88.