流体中の2円板の連成振動*

(実験による研究)

川本 一 俊^{*1}, 新倉 和 夫^{*1}, 大嶋 勝 宏^{*1}
森 口 一 夫^{*1}, 高 木 亨 之^{*2}, 佐藤 讓之良^{*1}

Coupled Vibration of Two Discs in Fluids

(Experimental Research)

Kazutoshi KAWAMOTO, Kazuo NIKURA, Katuhiro OHSHIMA,
Kazuo MORIGUCHI, Mitiyuki TAKAGI and Johshirou SATOH

This paper presents experimental results for the coupled vibrations of two discs. The upper disc is fixed along the outer boundary while the bottom one is fixed at the inner periphery. The two discs face each other in a fluid-filled cylindrical vessel. The simple theoretical formulae which were presented in the 1st report are examined. The experimental results are in good agreement with the theoretical results, which showed that two coupled frequencies appear for each number of nodal diameters. The difference between the natural frequencies from the theoretical and experimental results is studied, and some modified formulae are presented that predict the natural frequencies of the runner of a centrifugal hydraulic machinery more accurately.

Key Words: Coupled Vibration, Natural Frequency, Coupled Frequency, Two Discs, Fluid.

1. 緒 言

動翼と静翼とを持つポンプ水車のような遠心形流体機械では、両翼の干渉により水圧脈動が発生し、これが加振源となって、動翼の固有振動数と一致したときに大きな応力振動を引き起こす。

遠心形流体機械の動翼の固有振動数の予測計算はその形状が複雑であるため容易ではなく、しかもこの動翼は上カバーと下カバーとで囲まれておりその間を満たす水を介して複雑な連成振動を行う。このため実際の中での動翼の固有振動数はそれらの影響を受けて空中の固有振動数とは大幅に異なったものになる。近年、流体機械の高落差化・可変速化に伴い、動翼の受ける応力環境がますます厳しいものになってきている。このため実際の運転条件下での動翼の固有振動数の正確な予測技術の確立が強く求められている。最近のコンピュータの高速化、大容量化の進歩と有限要素法による機械計算技術の進歩⁽¹⁾によって、この水中での動翼の固有振動数もかなりの精度で計算することが可能

になってきている。しかし設計の初期において概略の寸法検討を行っている段階では、有限要素法は時間的にも経済的にも適した方法とは言えない。

久保田ら⁽²⁾は、流体で満たされた円筒容器内に置かれた単一円板の振動方程式を導き円板により模擬した動翼の直径節振動に対する流体の付加質量効果について検討した。一方、著者らは第1報⁽³⁾において、遠心形流体機械の動翼と上カバーとの連成振動を近似的に把握するため、流体を満たした環状円筒容器内に2枚の環状円板を対向させ、円板相互の連成振動を表す振動方程式を導き次の結論を得た。(1)2円板の距離が近い場合には2円板は互いに強く影響しあいながら連成振動をする。(2)2円板の連成振動には、逆相と同相の二つのモードがある。(3)逆相振動の固有振動数の水中での低下率は大きく、一方、同相振動の固有振動数の低下率は少ない。

本報は、環状円筒容器内に、動翼を模擬した内周固定の円板と上カバーを模擬した外周固定の円板とを対向させた実験によって、第1報で得られた理論式を検証するものである。さらに、遠心形流体機械動翼の水中連成振動数をより正確に求めることができるよう本実験で得られたデータを用いて理論式を補正し、実験式を得るものである。

* 平成3年9月26日 日立地方講演会において講演、原稿受付 平成3年9月3日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所 日立工場(☎317 日立市幸町3-1-1)。

^{*2} 正員、(株)日立製作所 機械研究所(☎300 土浦市神立町502)。

2. 記号と理論式

使用する記号を以下に示す。添字 $i=1$ は動翼を, $i=2$ は上カバーを示す。

H_i : 流体領域の厚さ

h_i : 流体領域の相対厚さ H_i/r_0

S_i : 円板の厚さ

s_i : 円板の相対厚さ $= S_i/r_0$

r_0 : 円板の等価半径(単純平均)

K_i^2 : 円板 i の曲げ剛性 $= E_i S_i^3 / 12(1 - \nu_i)$

E_i : 円板 i の縦弾性係数

ν_i : 円板 i のポアソン比

ρ_0 : 流体の密度

ρ_i : 円板 i の密度

n : 振動モードの直径節数

f_{ian} : 円板 i の空中固有振動数

f_n : 2円板の水中連成振動数

I_1 : f_{ian} を基準とした逆相連成振動数

J_2 : f_{2an} を基準とした同相連成振動数

第1報で導いた動翼と上カバーの連成振動式を示すと以下ようになる。

$$I_1^2 = \frac{(1+\alpha)\lambda^2 + (1+\beta)}{2\{(1+\alpha)(1+\beta) - \gamma^2\}} - \frac{\sqrt{\{(1+\alpha)\lambda^2 - (1+\beta)\}^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}{2\{(1+\alpha)(1+\beta) - \gamma^2\}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$J_2^2 = \lambda^2 \frac{(1+\alpha)\lambda^2 + (1+\beta)}{2\{(1+\alpha)(1+\beta) - \gamma^2\}} + \frac{\sqrt{\{(1+\alpha)\lambda^2 - (1+\beta)\}^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}{2\{(1+\alpha)(1+\beta) - \gamma^2\}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに,

$$\lambda = f_{2an}/f_{ian} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\alpha = \{\coth(nh_1) + \coth(nh_2)\} \rho_0 / (n \rho_1 s_1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\beta = \coth(nh_2) \rho_0 / (n \rho_2 s_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\gamma = \operatorname{cosech}(nh_2) \rho_0 / (n \sqrt{\rho_1 \rho_2 s_1 s_2}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

第1報において述べたように, α と β とはそれぞれ円板1, 2の付加質量効果を表し, γ が連成効果を表す。したがって, 付加質量効果は $\coth(nh_1)$ と $\coth(nh_2)$ で表され, 連成効果は $\operatorname{cosech}(nh_2)$ で表される。

3. 実験装置

実験装置の概略を図1に示す。剛体としてみなされる十分な肉厚を持った鋼鉄製環状円筒容器内の下側に, 動翼を模擬した内周固定の環状鋼板製円板1を置き, 上側には上カバーを模擬した外周固定の環状鋼板製円板2を置く。

2円板間(領域II)と, 円板1下部と容器底との間(領域I)は水で充たされている。内部には気泡が残留

しないよう円筒容器は横置きにして実験を行った。なお間げき部は漏水しないように柔らかいゴム板でカバーした。

2枚の円板にはおのおの12個ずつの加速度計を等間隔に取付け, 固有振動数と共に各円板の振動モードが測定できるようになっている。

円板1をインパクトハンマで打撃する加振試験によって2円板の水中連成振動数と振動モードを測定した。水中での実験に先立って, それぞれの円板の空中における固有振動数と振動モードとをあらかじめ測定しておいた。

円板1, 円板2は取替えにより板厚 $S_1 S_2$ を変更することが可能で, 間隔 H_2 も調節できる構造になっている。円板1と円板2の板厚をおのおの3段階, 2円板間の流体厚さを5段階に変えて, 表1に示すような14の組合せで実験を行った。

4. 実験結果

表1は, おのおの円板の空中固有振動数と, 各組合せでの水中連成振動数の実測値を直径節数1~5について示したものである。水中連成振動数は2円板の同相と逆相の2振動についてあるので, 逆相振動については円板1の空中固有振動数を基準とした水中低下率 I_1 同相振動については円板2の空中固有振動数に対する水中低下率 J_2 で表している。なお, 表1中の一を記した欄は明確な振動が観察されなかったモードを示している。

4・1 空中の固有振動数 円板1, 2の空中固有振動数の測定結果を表1の f_{ian} , f_{2an} の欄に示した。外周固定の円板2(上カバー)の空中固有振動数 f_{2an} は内周固定の円板1(動翼)の空中固有振動数 f_{ian} の3倍程度あり, 板の固定条件のちがいによって振動数は大幅に変化している。また, 自由円環の理論計算式の

図1 実験装置

表1 円板の固有振動数測定結果

S ₁ (mm)	H ₂ (mm)	S ₂ (mm)	5					7.5					10					
		n	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
		f _{2..}	366	602	911	1243	1712	565	929	1394	1950	2602	700	1158	1760	2452	3237	
5	5	f _{1..}	127	157	266	442	660	127	157	266	442	660	127	157	266	442	660	
		I ₁	—	.22	.31	.35	.40	—	.33	.31	.48	.59						
		J ₂	.28	.34	.38	.44	—	.28	.29	.35	.35	.36						
10	5	f _{1..}	222	284	504	837	1314	222	284	504	837	1314	222	284	504	837	1314	
		I ₁	—	.30	.35	.38	.42	—	.38	.47	.54	.53						
		J ₂	.36	.40	.48	.56	.60	.35	.38	.47	.52	.58						
	10	I ₁	.27	.36	.44	.50	.52											
		J ₂	.43	.47	.55	.63	.67											
	30	I ₁	.34	.49	.57	.64	.67											
		J ₂	.52	.62	.65	.73	.74											
	20	5	f _{1..}	370	512	991	1683	2542	370	512	991	1683	2542	370	512	991	1683	2542
			I ₁	—	.27	.27	.28	.29	.24	.38	.42	.44	.45	.27	.44	.46	.50	.53
J ₂			.56	.54	.70	.85	1.02	.45	.47	.58	.69	.77	.42	.50	.57	.65	.72	
10		I ₁	—	.34	.35	.35	.32	.27	.44	.52	.68	.64						
		J ₂	.65	.62	.78	.97	1.04	.48	.54	.65	.74	.83						
15		I ₁	—	.39	.42	.39	.39											
		J ₂	.69	.67	.82	1.03	1.15											
30		I ₁	.26	.49	.52	.49	.46											
		J ₂	.71	.70	.86	1.07	1.19											
50		I ₁	.39	.58	.57	.53	.49											
		J ₂	.75	.72	.86	1.09	1.22											

値 $f_{1n} = k_1 n^2 / (2\pi \sqrt{\rho_1 S_1} r_0^2)$ とは大幅に異なっており、特に直径節数の小さいときの差が大きい。

この空中固有振動数の値は、式(1)、(2)の水中連成振動数の式には2円板の空中固有振動数の比 λ のかたちで入っているが、以下の計算では λ の値として実測値を使用した。実際に遠心形流体機械の動翼に式(1)、(2)を適用する場合にも、空中の固有振動数は計算によっても実績によっても相当良い精度で予測できるので、この項に実測値を使用することに支障はない。

4.2 水中連成振動数 表1を見れば、「水中の2円板の連成振動では二つの固有振動数が存在し、低いほうの振動は2円板の逆相振動であり、高いほうの振動は同相振動である」とする第1報の結論は裏付けられていることがわかる。

水中連成振動数について表1の実測値と理論結果の比較を図2、3に示す。図2、3において連成振動の理論計算結果を実線で、相手の円板を剛体と考えたときの計算結果を破線で示し、実験結果は1直径節の振動を○、3直径節を△、5直径節を□で示している。

図2は、2円板間の流体厚 h_2 の影響を示したものである。 I_1 、 J_2 ともに実験値は連成振動を考えた場合の理論値と相手円板を剛体と考えた場合の中間にある。 I_1 の実験値は一般に直径節数が小さい場合連成振動の理論値よりも大きく、一方 J_2 は流体厚 h_2 が小さくなるにしたがい連成振動の理論値より小さくなる傾向にある。

図2 2円板連成振動数の理論値と実験値の比較
(2円板間距離と水中低下率の関係)

向にある。

図3は、円板2(上カバー)の板厚 s_2 の影響を示したものである。 I_1 、 J_2 の実験値はともに傾向としては相手円板を剛体とした計算結果よりも連成振動計算結

果の傾向と良く一致しており、2円板の連成効果が大きいことを表している。しかし、絶対値としては図2と同様に計算結果は実験値に対して、 I_1 は小さめに、 J_2 は大きめにしている。

理論式が付加質量効果および連成効果の影響を実際より大きめに見積もる原因の一つとしては、流体の粘性の影響を無視したことが考えられるが、さらに円板を幅の狭い自由円環と考えて円板の振動を半径方向に一樣としたことによって流体の運動を円板の実際の固定条件の場合よりも大きく評価したためと考えられる。

5. 実験式

本節では $\coth(nh_2)$ と $\operatorname{cosech}(nh_2)$ の項を実験値で補正し、式(1)、(2)を内周固定と外周固定の2円板が対向するポンプ水車のような遠心形流体機械の振動数予測に適用できる実用式に修正することを考える。

いま、 $\coth(nh_2)$ を $p(nh_2)$ 、 $\operatorname{cosech}(nh_2)$ を $q(nh_2)$ と置き換え、式(4)～(6)を次のように変形する。

$$\alpha = \{(\coth(nh_1) + p(nh_2))\rho_0 / (n\rho_1 s_1) \dots\dots\dots (7)$$

$$\beta = p(nh_2)\rho_0 / (n\rho_2 s_2) \dots\dots\dots (8)$$

$$\gamma = q(nh_2)\rho_0 / (n\sqrt{\rho_1\rho_2 s_1 s_2}) \dots\dots\dots (9)$$

図3 2円板連成振動数の理論値と実験値の比較
(上カバーの板厚と水中低下率の関係)

式(1)、(2)に式(7)～(9)の α , β , γ を代入し、 I_1 , J_2 に実測値を代入して $p(nh_2)$, $q(nh_2)$ を未知数として求め、 nh_2 に対する p , q 変化を示すと図4、5のようになる。図4、5には、おのおの $\coth(nh_2)$, $\operatorname{cosech}(nh_2)$ の値も破線で示したが、 $p(nh_2)$ の値は $\coth(nh_2)$ と1との間にあり $\coth(nh_2)$ と似た傾向を持ち、 $q(nh_2)$ の値は $\operatorname{cosech}(nh_2)$ と零との間にあり cosech

図4 付加質量効果の理論値と実験値の比較

図5 連成効果の理論値と実験値の比較

図6 付加質量効果の実験値と理論値の比

(nh_2)と似た傾向を持っていることを示している。すなわち、理論式は付加質量効果、連成効果ともに実際の運動の傾向を良く表しているが、絶対値としては大きめに評価していることがわかる。

この p , q の値の理論値に対する比を求め、直径節数 n の関数として示すと図6, 7のようになる。この比の値は相当大きなばらつきを示すが、明らかに直径節数 n が大きいほど大きくなる傾向にある。図6, 7上に破線で示した平均線をとると次式を得る。

$$p(nh_2) = \coth(nh_2) \times (n/6)^{0.6} \dots\dots\dots (10)$$

図7 連成効果の実験値と理論値の比

図9 実験式による振動数と実験値の比較
(2円板間距離と水中低下率の関係)

図8 実験式による振動数と実験値の比較
(2円板間距離と水中低下率の関係)

図10 実験式による振動数と実験値の比較
(上カバーの肉厚と水中低下率の関係)

$$q(nh_2) = \operatorname{cosech}(nh_2) \times 0.65 \times (n/6)^{0.4} \dots\dots\dots (11)$$

なお、図6、7中の○点は、 p 、 q の値を計算するとき円板1の下の領域Ⅰの流体についても領域Ⅱと同じ運動方程式が成り立つと考えて式(7)中の $\coth(nh_1)$ も $\coth(nh_1) \times (n/6)^{0.6}$ として計算したものである。

すなわち、求める α 、 β 、 γ の実験式は次式である。

$$\alpha = \{\coth(nh_1) + \coth(nh_2)\} \rho_0 / (n\rho_1 s_1) \times (n/6)^{0.6} \dots\dots\dots (12)$$

$$\beta = \coth(nh_2) \rho_0 / (n\rho_2 s_2) \times (n/6)^{0.6} \dots\dots\dots (13)$$

$$\gamma = \operatorname{cosech}(nh_2) \rho_0 / (n\sqrt{\rho_1 \rho_2 s_1 s_2}) \times 0.65 \times (n/6)^{0.4} \dots\dots\dots (14)$$

図8～10は、この実験式(12)～(14)により計算した α 、 β 、 γ の値を式(1)、(2)に代入して求めた実験条件下の水中連成振動数の計算値を、実験値と比較して示したものである。図8は、図2と同じ条件下で流体厚 h_2 に対する水中低下率 I_1 、 J_2 の変化を示したものであるが、直径節数が小さいときの I_1 と流体厚さが小さいときの J_2 の計算値が改善されている。図9は、図8に比して円板1の板厚が薄い場合であるが、同様に良い一致を示している。図10は、図3と同じ条件下で円板2の板厚 S_2 に対する変化を表すが、前の例と同様に直径節数が小さいときの I_1 と板厚 s_2 の薄いときの J_2 の計算値が改善されている。

以上の図より、ここで導いた実験式を使用すれば対

向する内周固定円板と外周固定円板の水中での連成振動の固有振動数を精度良く計算することができることがわかる。

6. 結 論

水で満たされた環状円筒容器内で対向する内周固定と外周固定の2円板の連成振動を実験的に調べ理論結果と比較した。得られた結果を要約すると以下のようになる。

(1) 2円板の連成振動には、同相と逆相の二つのモードがあり、同相振動の固有振動数は高く、逆相振動のそれは低い。

(2) 理論式は連成振動の傾向を良く表しているが、系の振動数に及ぼす付加質量および連成効果の影響を大きめに評価する。

(4) 理論式を修正し実験条件の2円板の連成振動固有振動数を計算できる実験式を誘導した。

本研究は、東北大学 長南征二教授のご指導を受けたものであり、ここに記して深い謝意を表す。

文 献

- (1) 笠原・ほか3名、機講論、No. 910-39-808(1991)。
- (2) 久保田・ほか1名、機論、50-449, C(1984), 243。
- (3) 川本・ほか5名、機論、58-545, B(1992), 133。