コラプシブルチューブの静特性に関する研究* (第2報, 定常流の安定性)

林 勲^{*1}, 本多利行^{*2}, 丹羽匡孝^{*2}

Static Characteristics of Collapsible Tubes (2nd Report, Stability of Steady Flows)

Satoru HAYASHI, Toshiyuki HONDA and Masataka TANBA

In this investigation, the authors have studied the stability of steady flows in collapsible tubes, which were theoretically calculated in the previous paper. The dynamics of the collapsible tube is approximately represented by a simplified lumped parameter model. On the basis of the model, the instability condition has been derived and the mechanism of the instability of the steady flow has been clarified. The instability region obtained theoretically is qualitatively in good agreement with the experimental results.

Key Words: Collapsible Tube, Vibration Coupled with Fluid Motion, Blood Flow, Stability, Biomechanics

1. ま え が き

コラプシブルチューブは外圧によって容易に変形するつぶれやすい管路のことであり, 管路内部流れの変化と断面形状変化とが影響しあって著しい非線形特性を示すので流れは複雑となる。生体内には静脈血管, 気管, 尿道などコラプシブルチューブと類似の性質をもつ管路系が多く, その非線形特性のため剛体管路とは異なる特異な現象が生ずることが知られている。例えば, 静特性に現れる負性抵抗, 流量飽和の現象などがあり, 動的問題としては, 人工心肺への脱血回路に生ずる振動, 血圧測定時に現れるコロトコフ音などがある。これらは生理学的に極めて興味深い問題であるため, 従来から, この管路内の流れに関して多くの研究がなされている^{(1)~(6)}。特に, 自励振動発生機構に関しては, 実験的研究⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾, 集中定数模型あるいは分布定数模型による理論的研究⁽²⁾⁽⁴⁾など種々の研究がなされているが, まだ現象を統一的に説明し得る理論はない。

著者の一人は, 前報⁽⁷⁾においてコラプシブルチューブの静特性を検討し, 特性をチューブの圧力損失 ΔP と流量 Q の関係として表現したとき現れる負性抵抗の成因を明らかにし, さらに, チューブより下流の影響を排除したという意味でのチューブ固有特性を ΔP - Q 形式で表したとき, 負性抵抗は現れないなど静特性の諸相を明らかにした。

本研究においては, 前報で得た静特性の表式を勘案しつつ, コラプシブルチューブの動的挙動を記述する方程式を集中定数近似モデルとして誘導し, そのモデルに基づいて定常流の安定性を検討すると共に発振機構の基本的性格を明らかにした。

2. 基礎方程式の誘導

コラプシブルチューブの動的挙動を記述する基礎方程式の誘導にあたって, チューブを図1に示すように三つの部分に分割して, 上流のIの部分を中心容量, IIのくびれ部を集中抵抗, IIIの部分を中心容量として近似する。

流れは圧力 P_0 の定圧槽を発生し, 剛体管路 L1 を経てチューブに流入する。その後流れは, チューブの上流容量部 I, 抵抗部 II, 下流容量部 III を経て下流剛体管路 L2 を通り, 下流端の絞り抵抗 R を介して大気中

* 平成3年1月31日 第2回バイオメカニクスカンファレンスにおいて講演, 原稿受付 平成3年10月23日。

^{*1} 正員, 東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

^{*2} 学生員, 東北大学大学院。

に流出する。上流, 下流剛体管路の直径は, 伸展圧 P_{t0}
 $=0$ のときのチューブ直径と等しいものとする。各部
 の動作を記述する方程式は以下のように導かれる。

上流管路内流体柱の運動方程式は,

$$L_1 dQ_1/dt = P_s - P_1 - r|Q_1|Q_1 \dots\dots\dots (1)$$

チューブの上流域 I における容量特性は,

$$C_1 dP_1/dt = Q_1 - Q \dots\dots\dots (2)$$

チューブくびれ部 II の抵抗特性はチューブの静特性の
 表式⁽⁷⁾ によって次式のように表されるものとする。

$$\Delta P = P_1 - P_2 = F(Q, P_{t0}) \dots\dots\dots (3)$$

下流域 III の容量特性は,

$$C_2 dP_2/dt = Q - Q_2 \dots\dots\dots (4)$$

下流管路内流体柱の運動方程式は,

$$L_2 dQ_2/dt = P_2 - R|Q_2|Q_2 \dots\dots\dots (5)$$

ここに, $L_1 (= \rho l_1/A_0)$, $L_2 (= \rho l_2/A_0)$ はそれぞれ長さ
 l_1, l_2 の上流管路, 下流管路のイナータンス, A_0 は管
 路の断面積, Q_1, Q, Q_2 はそれぞれ上流管路, くびれ
 部, 下流管路の流量, C_1 はチューブ上流域 I, C_2 は
 チューブの下流域 III における等価キャパシタンス, P_1 ,
 P_2 はそれぞれチューブの上流圧, 下流圧, ΔP はチ
 ューブ損失, $P_{t0} (= P_2 - P_e)$ はチューブ下流端の伸展
 圧, P_e はチューブの外圧, r は上流剛体管路抵抗, R
 は下流剛体管路抵抗と下流端の絞り抵抗を加えた値で
 ある。

式(3)の $F(Q, P_{t0})$ は前報⁽⁷⁾ で導いたコラプシブル
 チューブの固有特性関数 (下流抵抗 $R=0$ の場合に対
 応する) であり, チューブ内の定常流を記述する基礎
 方程式 (分布定数次元モデル) から数値的に得たも
 のを図2に示す。図2は外圧 P_e をパラメータとして
 示してある。

また, 図3は, 流量 Q 一定, 下流抵抗 $R=0$ におけ
 る外圧 P_e の変化とチューブ損失 ΔP の関係を示す。

これらの特性曲線の計算にあたって, チューブ長は
 $L=10$ cm, チューブの流動抵抗係数は $F_r=0.0355$,
 チューブ剛さは $K_p=1.05 \times 10^2$ Pa, $K_e=4.2 \times 10^4$ Pa,
 張力は $T=2.61 \times 10^2$ kg/m とした。なお, 係数の意味
 については前報⁽⁷⁾ を参照されたい。

図1 コラプシブルチューブ模式図

3. 動作点の安定性

安定性の検討に先だってまず動作点を求め, その後
 動作点周りの微小変動による線形化式から特性方程式
 を導く。外圧を一定, 定常流量を $Q_0 (>0)$, 定常値に添
 字0を付して表すと,

$$Q_{10} = Q_{20} = Q_0, \quad P_{10} = P_s - rQ_0^2, \quad P_{20} = RQ_0^2 \dots\dots\dots (6)$$

動作点からの微小じょう乱をそれぞれ, $\Delta Q_1, \Delta P_1$,
 $\Delta P_2, \Delta Q_2$ として方程式(1)~(5)を線形化すると,

図2 コラプシブルチューブ静特性 (ΔP - Q 曲線)

図3 コラプシブルチューブ静特性 (ΔP - P_e 曲線)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{Q}_1 &= -(2rQ_0/L_1)\Delta Q_1 - (1/L_1)\Delta P_1 \\ \Delta \dot{P}_1 &= (1/C_1)\Delta Q_1 - (1/C_1 F_Q)\Delta P_1 \\ &\quad + \{(1+F_P)/C_1 F_Q\}\Delta P_2 \\ \Delta \dot{P}_2 &= (1/C_2 F_Q)\Delta P_1 - \{(1+F_P)/C_2 F_Q\}\Delta P_2 \\ &\quad - (1/C_2)\Delta Q_2 \\ \Delta \dot{Q}_2 &= (1/L_2)\Delta P_2 - (2RQ_0/L_2)\Delta Q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

上式における F_Q, F_P はチューブの静特性関数の微係数

$$F_Q = \partial F / \partial Q, \quad F_P = \partial F / \partial P_{i0} \dots\dots\dots (8)$$

である。 F_Q は下流端伸展圧一定の下での流量増加に伴うチューブ損失増加であり、常に正の値を取る。一方、 F_P は流量一定の下での下流端伸展圧 P_{i0} の増加に伴

さて、式(7)の特性方程式は

$$\begin{vmatrix} s+2rQ_0/L_1 & 1/L_1 & 0 & 0 \\ -1/C_1 & s+1/C_1 F_Q & -(1+F_P)/C_1 F_Q & 0 \\ 0 & -1/C_2 F_Q & s+(1+F_P)/C_2 F_Q & 1/C_2 \\ 0 & 0 & -1/L_2 & s+2RQ_0/L_2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

上式に基づく安定性の検討は多数のパラメータ間の複雑な関係を扱わなくてはならないので必ずしも見通しは良くない。そこで次に述べる単純化によって方程式の次数を低減し、動作点の安定性に関する本質的な点を明らかにする。

系の次数低減のため、(1)上流管路のイナータンスと抵抗は無視し得る。(2)上流域 I におけるチューブのキャパシタンス効果は大きく、チューブ上流圧力は一定とみなし得ると仮定する。振動の振幅が比較的小さい場合、上流圧力の変化はほとんど現れないという付録(1)の図8に示す実験事実からもこの仮定の妥当性が裏付けられる。

この仮定の下では特性方程式は二次式となり、

$$(C_2 L_2 F_Q) s^2 + \{2RQ_0 F_Q C_2 + (1+F_P)L_2\}s + \{F_Q + 2RQ_0(1+F_P)\} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

動作点が不安定となる条件、すなわち、発振条件は、

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= F_Q + 2RQ_0(1+F_P) < 0 \\ D_2 &= 2RQ_0 F_Q C_2 + (1+F_P)L_2 < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。第1の条件は動作点が静的不安定であることを、第2の条件は動的不安定であることを表している。

式(12)のパラメータ中、 F_P のみが常に負号をとり、 $(1+F_P)$ が負となると、他の諸元の値いかんによって動作点は不安定となる。

式(12)の第1条件は、負荷損失をも含む系の全損失が流量増加に伴って減少するとき動作点は不安定になると解釈できる。

これに対して第2の条件式にはキャパシタンス C_2 、イナータンス L_2 が含まれており、発振条件には動的要因が関与していることを示唆している。

この発振条件を上流剛体管路が短く ($L_1=0, r=0$)、チューブ上流域 I のキャパシタンスを $C_1=\infty$ とした前述の仮定の下に別の角度から検討してみる。この条件の下ではチューブの動的挙動を表す方程式は、式(3)~(5)の3式となる。式(4)、(5)は P_2, Q_2, Q の3変数を含むが、式(3)を流量 Q について解き、式(4)に代入すれば P_2, Q_2 に関する2式にまとめられる。

一般にコラプシブルチューブの流量 Q は上流圧 P_1 、下流圧 P_2 、外圧 P_e によって定まるが、圧力基準を上流圧力 P_1 に取り、各圧力変数を P_1 に対する相対圧として表すとき、上流圧は零、下流圧は $P_2 - P_1$ 、外圧は $P_e - P_1$ となつて、流量は

$$Q = f(P_2 - P_1, P_1 - P_e) \dots\dots\dots (13)$$

と表される。

うチューブ損失変化を意味し、 P_{i0} の増加によってチューブの断面積が増加することを考慮すれば、損失は減少し、したがって、 F_P は常に負となる⁽⁷⁾。

図2の曲線のこう配から F_Q が、図3の曲線のこう配から F_P が求められるが、下流抵抗を $R=0$ としている今の場合、 $P_e = -P_{i0}$ であることをしんしゃくすれば、図3の曲線のこう配は $-F_P$ である。

この2係数 F_Q, F_P はチューブ特性 $\Delta P-Q$ 曲線のこう配 $d\Delta P/dQ$ と次の関係をもつ。

$$d\Delta P/dQ = F_Q + F_P(dP_{i0}/dQ) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 F_Q は $R=0$ における曲線のこう配を表し、右辺第2項 dP_{i0}/dQ は下流の負荷状態に依存して決まる。

図4に $P_1=4$ kPa の場合の Q - P_2 特性曲線の数値解をチューブ上流端伸展圧 $P_{1i}(=P_1-P_e)$ をパラメータとして示す。図4に見るとおりこの曲線はコラシブルチューブの流量飽和特性にほかならない。

$L_1=0, C_1=\infty$ の条件下では, $P_1=P_s$ —一定であり, かつ, 外圧 P_e —一定の下では式(13)は

$$Q=f(P_2) \dots\dots\dots (14)$$

となり, コラシブルチューブの運動を記述する方程式は, 式(4), (5), (14)より,

$$\left. \begin{aligned} C_2 dP_2/dt &= f(P_2) - Q_2 \\ L_2 dQ_2/dt &= P_2 - R|Q_2|Q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。

式(15)を Q_2 に関してまとめると,

$$L_2 C_2 d^2 Q_2/dt^2 + (2RC_2|Q_2|)dQ_2/dt + Q_2 - f(L_2 dQ_2/dt + R|Q_2|Q_2) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

上式を動作点で線形化し, チューブ特性の線形化式を勘案すると**1

$$C_2 L_2 d^2 \Delta Q_2/dt^2 + (2RQ_0)C_2 d\Delta Q_2/dt + \Delta Q_2 + f'(P_{20})(L_2 d\Delta Q_2/dt + 2RQ_0 \Delta Q_2) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

を得る。式(17)の特性方程式は当然式(11)と一致する。

不安定要因は式(17)の左辺第4項にあり, f' , すなわち, $(1+F_P)$ が負のとき, 式(12)の第1の条件は式(17)第4項の右項 $2RQ_0 \Delta Q_2$ の寄与, すなわち, 負荷抵抗による P_2 上昇に起因する静的不安定条件であるのに対し, 式(12)の第2条件は第4項の左項 $L_2 d\Delta Q_2/dt$ の寄与, すなわち, 負荷管路流体柱の加速の反作用としての P_2 上昇に起因する, いわゆる動的な不安定現象と解される。

結局, 第1の発振条件はチューブの静特性における負性抵抗が下流抵抗を上回るとき発生することを意味し, 従来, 負性抵抗によるとされている発振の原因はこれに相当すると考えられる。

しかし, 下流抵抗が小さい場合 ΔP - Q 特性に負性抵抗は現れないが, その場合でも発振することが実験結果によって指摘されている⁽³⁾。この場合の発振現象は第2の発振条件によって説明される。例えば, 負荷抵抗 $R=0$ の場合, ΔP - Q 特性曲線のこう配は式(9)より常に $d\Delta P/dQ = F_Q + F_P dP_{10}/dQ = F_Q > 0$ 。同

時に第1の安定条件式は $D_1 = F_Q > 0$ となるが, もし, $1+F_P < 0$ であれば第2条件が $D_2 = (1+F_P)L_2 < 0$ となって動作点は不安定となる。

4. 静特性ならびに発振域

図2, 3に示す静特性 ΔP - Q 曲線, ΔP - P_e 曲線からそのこう配として係数 F_Q, F_P を求め, それぞれ図5

(a) F_Q 曲線

(b) F_P 曲線

図5 F_Q, F_P 曲線

図4 コラシブルチューブ静特性 (Q - P_2 曲線)

**1 線形化チューブ特性 $\Delta P_1 - \Delta P_2 = F_Q \Delta Q + F_P \Delta P_2$ は P_1 —一定である今の場合, $\Delta Q = -\{(1+F_P)/F_Q\} \Delta P_2$ となり, したがって, $f'(P_{20}) = dQ/dP_2 = -(1+F_P)/F_Q$ となる。

(a) $R=0 \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ (b) $R=3.0 \times 10^{11} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ (c) $R=6.35 \times 10^{11} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$

図6 定常流の安定性

(a), (b)に示す。この F_0, F_p を用い、式(12)によって与えられる安定限界を ΔP - Q 曲線上に示したのが図6(a)~(c)である。これらの図は下流抵抗がそれぞれ異なっており、図6(a)では $R=0 \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ 、図6(b)では $R=3 \times 10^{11} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ 、図6(c)では $R=6.35 \times 10^{11} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ である。図6(c)は前報に示した静特性と同じ負荷抵抗値を用いてある。また、計算においては下流剛体管路のイナータンスを $L_2=$

図7 発振限界 (実験結果)

$2.55 \times 10^6 \text{ kg}/\text{m}^4$ とし、チューブ下流の等価キャパシタンスを $C_2=5.36 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$ と見積もった。

図6中のD1曲線が $D_1=0$ を表し、この内部が $D_1 < 0$ の静的不安定領域である。一方、D2曲線は $D_2=0$ を表し、内部で $D_2 < 0$ となる。図6に見るとおり、 $D_1 < 0$ の領域はいずれの場合にも $D_2 < 0$ の領域に囲まれており、結局、曲線D2が動作点の不安定限界となる。また、 $D_1 > 0, D_2 < 0$ の領域、すなわちD1曲線とD2曲線にはさまれた領域は動的不安定領域である。

図7に負荷抵抗 $R=6.35 \times 10^{11} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ の場合の特性曲線 ΔP - Q の実測結果を示す。外圧 P_e をパラメータとしているが、これらの曲線の測定値を欠く部分が発振領域であり、この点を破線で結んだものが発振限界に相当する。図7に見るとおりこれらの発振域は図6に示した理論結果と定性的には良く一致している。

実験では流量 Q を増加させていくと ΔP - Q 曲線の頂点を過ぎた負こう配部で発振を開始し、特性曲線の屈曲点D近傍まで発振を続ける。

一方、流量を大流量側から次第に下げていくと点Dを安定な状態で通過した後点Cに至って発振する、一種の履歴特性を示す。この点に関しては定常流からの微小じょう乱に対する局所安定性を論じている今の場合、理論的説明はできない。この点を論じるため

(a) $Q=23.33 \text{ cm}^3/\text{s}$

(b) $Q=26.67 \text{ cm}^3/\text{s}$

図 8 自励振動波形

には非線形特性をも考慮した大域的挙動解析を行わなくてはならないが、この点に関しては別途に検討する。

5. む す び

コラプシブルチューブを集中定数モデルで近似表現し、下流管路との相互作用を中心に安定性の検討を行って発振条件を明らかにした。その結果、 ΔP - Q 特性が負性抵抗をもつ場合のみならず正抵抗を示す場合でも負荷イナータンスの寄与によって発振し得ることを理論的に示し、さらに発振の機構を明らかにした。

【付 録】

(1) 振動波形 (実験結果)

図8はコラプシブルチューブ長 $L=100 \text{ mm}$ 、外圧 $P_e=3 \text{ kPa}$ 、負荷抵抗 $R=7.85 \times 10^{11} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})^2$ 、下流管路長 $L_d=220 \text{ mm}$ の条件下に発生した自励振動波形を上流圧 P_1 、下流圧 P_2 について測定した結果である。振動時の圧力振幅は下流側が激しく、特に流量 Q が大きいときにはその傾向が著しい。

しかし、下流圧 P_2 の変化が比較的小さい小流量の場合には、図8(a)に見られるとおり上流圧力 P_1 はほとんど変化していない。これは、下流側の圧力変動

図 9 圧平状態のコラプシブルチューブ模式図

に伴う流量変動が、チューブ上流部のキャパシタンス効果によって吸収されてしまうためと考えられる。この事実は、動作点における微小じょう乱に対する上流圧 P_1 の変動は無視し得ることを意味している。

(2) キャパシタンス C_2 の決定法

第2の不安定条件式を変形し、安定境界条件として次式を得る。

$$C_2 = |1 + F_p| L_2 / (2 R Q_0 F_0) \dots\dots\dots (18)$$

下流管路のイナータンス L_2 、負荷抵抗 R は定数として与えられ、 F_p 、 F_0 は動作点流量 Q_0 が定まれば図5から求められる。安定境界における Q_0 の実験値から式(18)の関係を用いて求めた等価量が $C_2=5.36 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$ である。

圧平状態におけるチューブ形状を図9のように角柱で近似し、各断面におけるチューブ剛さを考慮して下流キャパシタンスを概算する。

チューブ則より圧力変化 ΔP_2 による角柱の容積変化 ΔV は

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int \Delta A dx = 2 \Delta P_2 / (3 K_p) \int A_0 (A/A_0)^{5/2} dx \\ &= (8/21) (V_0/K_p) \Delta P_2 \end{aligned}$$

ここに、 $V_0=A_0 x_0/2$ 。したがって、理論的に推定されるキャパシタンスは、 $A_0=0.785 \text{ cm}^2$ 、 $x_0=1.5 \text{ cm}$ 、 $K_p=105 \text{ Pa}$ とすると、 $C_2=8 V_0/(21 K_p)=21.4 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$ となり、実験値からえられたキャパシタンスの約4倍となるが、オーダー的にはほぼ一致している。

文 献

- (1) Conrad, W. A., *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.* BME-16 (1969), 284.
- (2) Katz, A. I., *Biophys. J.*, **9** (1969), 1261.
- (3) Ohba, K., ほか3名, *Tech. Rep.*, Kansai Univ. **25** (1984), 1.
- (4) Cancelli, C. and Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, **157** (1985), 375.
- (5) Bertram, C. D., ほか1名, *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **111** (1989), 185.
- (6) 辻・ほか7名, *人工臓器*, **7** (1978), 435.
- (7) 林・ほか2名, *機論*, **57-534, B** (1991), 397.