後ろ向きステップ流解析における有限要素法の計算条件の影響*

渡辺 崇^{*1}, 中村 育雄^{*2}, 遠藤 和広^{*3}Effects of Boundary Conditions and Discretization on FEM Analysis
of Flow Past a Backward-Facing Step

Takashi WATANABE, Ikuo NAKAMURA and Kazuhiro ENDO

The numerical analysis is performed for the flow past a backward-facing step. While the Reynolds number and the expansion ratio are the characteristic parameters which physically define the flow field, boundary conditions and mesh discretizations are numerical conditions which influence the analyzed results. The difference in these numerical conditions makes it ambiguous to compare numerical results obtained by various kinds of formulations. The purpose of this study is to estimate the effects of numerical conditions. The two-dimensional, steady Navier-Stokes equations are formulated by the Galerkin finite-element method and calculated for the Reynolds number $Re=100$ and 333 and the expansion ratio 1.5. Numerical conditions in this study are upstream and downstream regions of calculation, Dirichlet and Neumann boundary conditions for inflow and outflow and the size of finite elements. Quantitative comparison between L_2 norms is shown and the new numerical criterion of fully developed flow is presented.

Key Words: Boundary Condition, Separation, Computational Fluid Dynamics, Finite-Element Method, Discretization, Backward-Facing Step.

1. はじめに

後ろ向きステップを過ぎる流れは、はく離流れの典型であるとともに、図1に示すように比較的単純な計算領域を持つ二次元流れ数値計算の対象である。そして、最初に谷ら⁽¹⁾がこの流れの一つである境界層のステップはく離と再付着を実験的研究として取り上げ、可視化、熱線などによって調べてから以降、定点(角部)からはく離する流れの代表となってきた。この流れは急拡大ディフューザにも関係し、実用上の重要性和計算領域の簡便さがあいまって、キャビティ流れとともに、数値流体力学のベンチマークテストと考えられている。

これまでも22種類の計算結果を集めたワークショップ⁽²⁾などで層流の場合の各種の計算結果と実験の報告が行われ、関心を集めている。しかしこの比較を見ても、一見速度分布や流線はよく似ているようであるが、圧力や壁面せん断応力の分布には大きな差が生じ、各定式化の欠点について評価が必要であるとの

結論になっている。またこの流れは、上流側、下流側に無限に広がった境界を持つ流れであり、具体的計算における境界条件の設定方法に問題がある。このため特に下流側境界条件は、文献(2)のワークショップではその設定方法は明確に規定されず、投稿者の選択にまかされており、また文献(3)に報告、アナウンスがあるように、Swansea大学、Stanford大学におけるOpen Boundary Conditionについてのミニシンポジウムの対象にもなっている。

この流れの解析は、これまで主にレイノルズ数やチャネル拡大率およびプラントル数などの物理的流れ場に直接影響を与えるパラメータが注目され、系統的な定常、非定常計算により整理されてきている^{(4)~(7)}。しかし数値的に解析を行う場合には、流れの物理的パラメータのほかに、方程式の離散化法や初期条件、境界

図1 座標系

* 原稿受付 平成3年8月26日。

^{*1} 正員, 名古屋大学教養部, 工学部兼担 (〒464-01 名古屋市千種区不老町1)。^{*2} 正員, 名古屋大学工学部。^{*3} (株)日立製作所 機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。

条件の設定方法などに任意性が残されており、いくつかの計算結果に対して、一概に簡単な比較を行うことはできない。この微妙に異なる計算条件に基づいた結果の比較を可能にするためには、計算条件の違いが全体的な結果にどの程度影響を及ぼすかを正確に見積もっておく必要がある。本研究では、これまで明確に定量化して示されてきていない、入口側、出口側境界条件の設定位置とその種類および計算メッシュの粗密が解析結果に及ぼす影響について見積もるための参考データを提供することを目的とする。特に、基本的な影響を明らかにするために、レイノルズ数は中程度である 100 および 333、チャンネルの拡大率は 1.5 とし、二次元非圧縮ナビヤ・ストークス方程式を一般的な有限要素法により定式化し、数値解を積分偏差値を用いて評価した結果について述べる。

記号

主な記号を以下に示す(図 1)。これらはすべてステップ上流側の平均流速 U_{in} 、ステップ高さ h 、流体密度 ρ 、動粘度 ν に基づく無次元量とする。

h : ステップ高さ (=1)

h_{down} : ステップ上流側チャンネル高さ (=3)

h_{in} : ステップ下流側チャンネル高さ (=2)

L_1 : ステップから上流側境界条件設定位置までの距離

L_2 : ステップから下流側境界条件設定位置までの距離

L_R : 再付着距離

p : 圧力 (ρU_{in}^2 で無次元化)

p_w : 壁面圧力

Re : レイノルズ数 $= U_{in} h / \nu$

u : x 方向速度成分

u_p : 考えている x 断面で仮定される放物形完全発達速度成分

v : y 方向速度成分

x : ステップ側上流壁面に沿い、ステップ凸点を原点とした座標

y : チャンネル壁面に垂直で、ステップ凸点を原点とした座標

y_{max} : 考えている x 断面での y の最大値

y_{min} : 考えている x 断面での y の最小値

τ_w : 壁面せん断応力 ($\rho U_{in}^2 / 2$ で動圧で無次元化)

添字

∂_x, ∂_y : それぞれ x, y についての偏微分

2. 定式化および計算条件

速度、圧力のプリミティブ変数で表された二次元定常非圧縮ナビヤ・ストークス方程式、連続式に対して、速度については二次、圧力については一次の内挿関数を仮定した三角形要素の有限要素定式化を行う⁽⁸⁾。数値粘性効果による不安定性の抑制は、各種の計算条件の影響も抑えてしまうものと思われるため、本解析では風上法は適用しない。

上流側境界条件については完全発達解析解や実験値が考えられ、比較的取扱いやすい。一方で下流側の境界条件は、完全発達や自由放出などを初めとした展望もなされているが⁽⁹⁾、1章でも述べたように最終的な結果は得られていない。本研究では、上流側、下流側境界条件の設定位置および基本的な下流側境界条件の種類が及ぼす影響を見積もるために、図 1 の領域に対して以下の境界条件を設定する。

上流側境界条件 ($x = -L_1$)

u = 放物形完全発達速度分布, $v = 0$

壁面境界条件

$u = 0, v = 0$

下流側境界条件 ($x = L_2$)

(a) $u_x = v_x = p = 0 \quad -1 \leq y \leq 2$

(a') $u_x = v_x = 0 \quad -1 \leq y \leq 2$

$p = 0 \quad y = -1$

(b) $u_x = v = p = 0 \quad -1 \leq y \leq 2$

(b') $u_x = v = 0 \quad -1 \leq y \leq 2$

$p = 0 \quad y = -1$

(c) u = 放物形完全発達速度分布

$v = p = 0 \quad -1 \leq y \leq 2$

有限要素法では、発散定理を適用する項の形により、異なった自然境界条件を導出することができるが、ここではしばしば他の計算でも用いられ、また物理的にも受け入れやすい形式を採用する。完全発達の仮定のもとでは、5 種類の下流側境界条件はすべて等価である。5 種すべての場合について調べたが、以下では特に断らない場合は、(a) の下流側境界条件を用いた場合について述べる。

以後、ステップ側とは反対側の壁面をステップ反対側壁面と呼ぶことにしよう。計算メッシュは、 $Re = 333$ において、このステップ反対側壁面上ではく離泡を得た Durst ら⁽¹⁰⁾ の用いたメッシュを参考に、 x 方向、 y 方向それぞれ次のような分割を組合せる。

x 方向 (3 種類)

C_x : ステップ近傍で密となる非等間隔メッシュ。

メッシュ間隔は次の分布とする。

$x \leq -6 : 2, -6 \leq x \leq -2 : 1, -2 \leq x \leq -1 : 0.5, -1 \leq x \leq 1 : 0.25, 1 \leq x \leq 2 : 0.5, 2 \leq x \leq 20 : 1, 20 \leq x \leq 40 : 2, 40 \leq x \leq 60 : 4, 60 \leq x : 8.$

$F_x : C_x$ で、ステップ近傍をさらに密にしたメッシュ。

$-0.5 \leq x \leq -0.25 : 0.125, -0.25 \leq x \leq -0.175 : 0.075, -0.175 \leq x \leq -0.125 : 0.05, -0.125 \leq x \leq 0.125 : 0.025, 0.125 \leq x \leq 0.175 : 0.05, 0.175 \leq x \leq 0.25 : 0.075, 0.25 \leq x \leq 0.5 : 0.125.$

これ以外は、 C_x に準ずる。

$G_x : \text{ステップ近傍の } -2 \leq x \leq 2 \text{ を除き, } C_x \text{ の節点中間に新たな節点を設けたもの.}$

y 方向 (4 種類)

$C_y : \text{間隔 } 0.25 \text{ の等間隔メッシュ.}$

$D_y : C_y$ と節点数は等しく、上流側の完全発達速度分布に基づき非等間隔に配置したメッシュ。節点の y 座標は次のとおりである。

$y = -1.0, -0.75, -0.5, -0.25, 0.0, 0.125, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 1.75, 1.875, 2.0.$

$E_y : \text{間隔 } 0.125 \text{ の等間隔メッシュ. これは } D_y \text{ の持つ節点はすべて含む.}$

$F_y : C_y$ で、ステップ反対側壁面近傍を中心に、さらに密にしたメッシュ。

$-1 \leq y \leq -0.25 : 0.125, -0.25 \leq y \leq -0.175, 0.075, -0.175 \leq y \leq -0.125 : 0.05, -0.125 \leq y \leq 0.125 : 0.025, 0.125 \leq y \leq 0.175 : 0.05, 0.175 \leq y \leq 0.25 : 0.075, 0.25 \leq y \leq 0.5 : 0.125, 0.5 \leq y \leq 2 : 0.25.$

図 2 に、メッシュ $C_x \times C_y, C_x \times D_y$ および $F_x \times F_y$ の一部を示す。以下において、特に明記しなければ、計算は $C_x \times C_y$ で行い、必要に応じて各種のメッシュ構成の結果を示す。

非線形計算は Newton 法で扱い、収束判定は u の相対修正量が 1×10^{-7} 未満であることとした。また計算値の初期仮定は、低いレイノルズ数の計算は Stokes 方程式の解から始め、直前のレイノルズ数における収束解に設定する。

計算は倍精度で行い、特定の点における計算値は、メッシュ節点値を三次スプライン曲線で補間し求める。

3. 解析結果と考察

3.1 境界条件設定位置の影響 完全発達流と計算結果との差異を厳密に見積もるために、次式の二乗

ノルムとしての積分偏差量を導入する。

$$\text{dev. } u = \sqrt{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (u - u_p)^2 dy}$$

$$\text{dev. } v = \sqrt{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^2 dy}$$

$$\text{dev. } p_y = \sqrt{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (p_y)^2 dy}$$

まず、下流側境界条件として (a) を用い、 $L_1=10, L_2=100$ と設定した場合の $Re=100, 333$ における積分偏差をそれぞれ図 3, 4 に示す。また、 $L_2=260$ とし、計算領域を拡張した場合の $Re=333$ の積分偏差を図 5 に示す。さらに図 6 は、図 4 の計算において、下流側境界条件を (c) とした場合の結果である。図 3~5 のいずれの結果でも十分下流側では偏差量は逐次減少し、図 3, 5 では、完全発達流を予測した解の数値誤差とみなすことができるある定常値以下に達している。一方、図 6 では、図 4 で積分偏差が十分小さくなっていない位置 $x=100$ において放物形のディリクレ形境界条件を設定することで、収束解が流れ方向に大きく振動していることがわかる。図 3, 5 で積分偏差が収束する定常値は、本計算ではほぼ 2.0×10^{-4} であり、 $Re=100$ の場合は $x=68$ 、 $Re=333$ の場合は $x=220$ でこの値に達していた。そこで、 $Re=100$ の場合に、下流側境界条件にディリクレ形の (c)、 L_2 に 68 を設定したときの積分偏差 $\text{dev. } u$ を、図 3 の計算結果と比較して表 1 に示す。この場合も数値振動はほとんど見られず、

(a) メッシュ $C_x \times C_y$

(b) メッシュ $C_x \times D_y$

(c) メッシュ $F_x \times F_y$

図 2 メッシュ構成の例

$Re=333$ で $L_2=220$ とした場合も同様であった。このため本計算において積分偏差が 2.0×10^{-4} 以下であることは、流れが完全発達に達したことの必要条件としてみなすことができる。

出口境界近傍で流れが完全発達に達したことの一つ

図 3 積分偏差の変化 [$Re=100$, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件(a), メッシュ $C_x \times C_y$]

図 4 積分偏差の変化 [$Re=333$, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件(a), メッシュ $C_x \times C_y$]

図 5 積分偏差の変化 [$Re=333$, $L_1=10$, $L_2=260$, 下流側境界条件(a), メッシュ $C_x \times C_y$]

の判定基準を, Gartling⁽¹¹⁾ は圧力がチャネル断面にわたり一定であること, また Leone⁽¹²⁾ は主流速度誤差が 1% 以下であることに帰している。図 5 の計算で, $x=100$ での断面にわたる圧力変動は有効数字 5 けた以下, 主流方向速度誤差は 2% であり, $x=124$ において主流方向速度誤差は 1% 以下であった。一方, 図 6 の計算で $L_2=124$ としても, 依然として数値振動が発生した。これより, Gartling, Leone の完全発達の判定基準は, 彼らの用いた一定応力や x 方向微分零の下流側境界条件による計算結果で言及できることであり, 下流側ディリクレ境界条件設定の可能性とは一致するものではない。

二次元流路流れの助走部長さ L_E は, 境界層理論の解析結果より流路半幅を a , 平均速度を U_0 とすれば,

$$\frac{L_E}{a} = 0.16 \frac{U_0 a}{\nu}$$

表 1 下流側境界条件設定位置による u の積分偏差の変化

Re	100	
L2	100	68
B. C.	a)	c)
x	dev. u	
50	0.00129	0.00128
52	0.00100	0.00101
54	0.00078	0.00078
56	0.00059	0.00057
58	0.00048	0.00050
60	0.00036	0.00032
64	0.00023	0.00027
68	0.00014	0.00000
72	0.00008	
76	0.00005	
80	0.00003	

図 6 積分偏差の変化 [$Re=333$, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件(c), メッシュ $C_x \times C_y$]

と与えられる⁽¹³⁾。今、下流側で流れが再び完全発達になるまでの距離がこの評価式に準ずるとすれば、 $Re=100$ において $L_E=24.0$ 、 $Re=333$ において $L_E=79.9$ となる。図3, 5の計算において、再付着距離は $Re=100$ で $L_R=6.45$ 、 $Re=333$ で $L_R=15.67$ であり、再付着後に流れが再発達し始めるとすると、完全発達に達する位置はそれぞれ $x=30.5$ 、 $x=95.6$ と見積もることができる。このため、下流側のディリクレ形境界条件に対し、各レイノルズ数において安定な解を得るために $L_2=68$ および220と設定することは、通常の助走部の評価と比べてはるかに長い区間を設けることになる。

上流側境界条件の設定位置が及ぼす影響を見積もるために、 L_1 を10および20とした場合の、ステップ上流側での $dev. u$ の値を表2に示す。先の、下流側において 2×10^{-4} 以下であることが完全発達の一つの条件であるという積分偏差を、運動量の誤差積分量としての数値的な誤差であるとみなせば、100から数百程度の中程度のレイノルズ数においては、上流側に6ステップ距離をとれば十分といえる。この上流側境界条件設定位置について、1章で触れた文献(2)のワークショップでは、本解析と同程度のレイノルズ数に対して6ステップ上流側で放物形速度分布を規定しており、その妥当性が示唆される。しかし、文献(3)のミニシンポジウムでは、図1の $x=0$ で同様なディリクレ形境界条件を課しており、これは以下で示すように、ステップの存在が上流側の積分偏差や壁面せん断応力の分布に及ぼす影響を考慮すると、物理的な意味での後ろ向きステップ流れの解析とは異なることになる。

3.2 下流側境界条件の種類の影響 下流側境界条件による影響を見るために、 $L_1=10$ 、 $Re=333$ に固定し、 $L_2=100$ 、境界条件を(b)および(b')とした場合

表2 上流側境界条件設定位置による u の積分偏差の変化

Re	100		333	
L1	20.0	10.0	20.0	10.0
x	dev. u		dev. u	
-18	0.00003		0.00001	
-16	0.00004		0.00004	
-14	0.00007		0.00007	
-12	0.00009		0.00008	
-10	0.00012	0.00000	0.00007	0.00000
-8	0.00012	0.00018	0.00005	0.00008
-6	0.00015	0.00015	0.00013	0.00017
-4	0.00118	0.00118	0.00088	0.00089
-2	0.00868	0.00872	0.00464	0.00465
0	0.06378	0.06376	0.02441	0.02441
2	0.72452	0.72445	0.83925	0.83924

の積分偏差を図7, 8に示す。図7より境界条件(b)を用いた場合には $dev. v$ と $dev. p, y$ の両偏差は下流側で収束定常値以下となっており、滑らかな解が得られている。しかし境界条件(b')を用いた図8では、再付着点以降で数値振動が見られる。これより、圧力については少なくとも積分偏差が十分小さければ、物理的

図7 積分偏差の変化 ($Re=333$, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件(b), メッシュ $C_x \times C_y$)

図8 積分偏差の変化 ($Re=333$, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件(b'), メッシュ $C_x \times C_y$)

図9 積分偏差の変化 ($Re=333$, $L_1=10$, $L_2=40$, 下流側境界条件(a), メッシュ $C_x \times C_y$)

な完全発達条件を全断面で設定することが望ましいといえる。

下流側境界条件設定位置 L_2 を 40 とし、境界条件を (a), (a'), (b) とした場合の積分偏差を図 9~11 に示す。これらの図で、 $40 \leq x$ の範囲に伸びる分布は、図

図 10 積分偏差の変化 [$Re=333$, $L_1=10$, $L_2=40$, 下流側境界条件(a'), メッシュ $C_x \times C_y$]

図 11 積分偏差の変化 [$Re=333$, $L_1=10$, $L_2=40$, 下流側境界条件(b), メッシュ $C_x \times C_y$]

図 12 壁面圧力, せん断応力の変化 [$Re=333$, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件(a)]

4 の分布を重ね合わせたものである。下流側の計算領域を狭めた結果では下流域で dev. v は小さいとはいえず, v についてディリクレ形条件を与えることが数値振動をもたらしている。圧力については $x=40$ についてもその偏差は小さく, 断面および一点で規定する方法は矛盾することなく, 正当な解が得られている。

これらのことより, 下流側境界条件としては速度成分については自然境界条件を設定することにより, また圧力をディリクレ形で指定する場合には全断面にわたり設定することにより下流側計算領域を抑えることができるといえる。

3.3 計算メッシュの影響 Durst ら⁽¹⁰⁾ は, $Re=333$ でステップ反対側壁面ではく離泡が生ずることを見だしている。次に, $L_1=10$, $L_2=100$, 下流側境界条件は(a)に固定して, 計算メッシュの影響を見る。

本計算では, $C_x \times C_y$ のメッシュを用いた場合には, ステップ反対側壁面のはく離泡の存在は認められなかった。一方で, 同じ節点数にもかかわらず, $0 \leq y$ においてチャンネル断面方向に非等間隔であるメッシュ $C_x \times D_y$ を用いた計算では, ステップ反対側壁面の $x=15.21$ から $x=19.21$ の範囲に壁面せん断応力が負となる領域があり, はく離泡が形成された。しかし, この D_y の節点をすべて含む, より密なメッシュ $C_x \times E_y$ を用いた計算では, 再びこのはく離泡が現れない結果が得られた。これより, このレイノルズ数におけるステップ反対側壁面のはく離泡の存在には疑問が残るとともに, 流れ場の変化が激しいこのような領域では, 注目しているステップ反対側壁面近傍のみならず, チャンネル中央やステップ側壁面を含めたチャンネル断面全体にわたりメッシュ分割を細かくする必要があるといえる。

x 方向へのメッシュについては, ステップ近傍以外

図 13 再付着距離 L_R の比較
〔比較データは文献(14)による〕

を密にした $G_x \times C_y$ の結果は, $C_x \times C_y$ の結果と同じであり, 再付着距離 L_R も 15.67 と一致した。ステップ近傍のメッシュ影響を見るために, メッシュ $C_x \times C_y$, $F_x \times C_y$ および $F_x \times F_y$ を用いた場合の, ステップ近くでの壁面圧力と壁面せん断応力の分布を図 12(a) ~ (c) に示す。ここで横軸の x が 0-0 の区間は, 従来あまり注目されていないステップ背面での分布を意味し, 図 12(a), (c) の一点鎖線は, 図 12(a) のステップ側壁面での分布を示す。図 12(a) のメッシュが比較的粗い場合には, 特にステップ直前で壁面せん断応力の値に数値振動が見られる。 x 方向への節点を密にすると, この数値振動は抑えられ, ステップ近傍での値の急激な変化がよく現れるようになる。しかし, この急激に変化する範囲も図 12 に示した範囲にとどまっている。

3.4 従来の計算との比較 後ろ向きステップ流のワークショップで行われた再付着距離 L_R の比較⁽¹⁴⁾ に, 本計算結果をあわせたものが図 13 である。計算条件が異なるため単純な比較には問題もあるが, 本計算結果は他の結果のばらつきの範囲内にあり, 妥当な結果が得られているものと考えられる。

4. おわりに

拡大率 1.5 の後ろ向きステップを過ぎるチャンネル流れについて, 数値計算上の自由度といえる境界条件の設定位置, 下流側境界条件の種類および計算メッシュが計算結果に及ぼす影響を, 三角形要素の有限要素法について調べた。そして, 主にレイノルズ数 333 の場合に対して, 次の結論を得た。

上流側境界条件として, 放物形の完全発達速度分布をディリクレ形条件として与える位置は, ステップ上流側に 6 ステップ距離をとれば十分である。

下流側境界条件として, 数値振動をもたらすことなく速度についてディリクレ形条件を課するためには, 十分下流側まで範囲を広げた計算で積分偏差が数値誤差以下になっていることが一つの判定基準になる。一方で, 速度については自然境界条件を, 圧力についてはチャンネル断面全域にわたり一定値を規定することで, 安定な解が得られるための下流側計算範囲を狭めることができる。

ステップ面とは反対側の, ステップ反対側壁面に生成される 2 番め以降の再循環領域の解析には, 単にステップ反対側壁面近傍のみならず, チャンネル全断面にわたって詳細なメッシュを設定する必要がある。

ステップをはさみ, 上流, 下流側 1, 2 ステップ距離の範囲を除いた領域の解析には, 1/4 ステップのメッシュを設定すれば十分である。

文 献

- (1) Tani, I., ほか 2 名, *Aero. Res. Inst., Univ. Tokyo, Rep.* 364(1961), 119-136.
- (2) Morgan, K., ほか 2 名編, *Analysis of Laminar Flow over a Backward-Facing Step, Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 9(1984), Vieweg.
- (3) Gresho, P. M. and Sani, R. L., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7(1990), 951-952.
- (4) 近藤・長野, 機論, 54-503, B(1988), 1760-1767.
- (5) Durst, F. and Pereira, J. C. F., *Trans. ASME, Ser. I*, 110(1988), 289-296.
- (6) Ghia, K. N., ほか 2 名, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9(1989), 1025-1050.
- (7) 近藤・ほか 2 名, 機論, 57-536, B(1991), 1422-1427.
- (8) Chung, T. J., *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, (1978), Chap. 5, McGraw-Hill.
- (9) Gresho, P. M., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23(1991), 413-453.
- (10) Durst, F. and Pereira, J. C. F., *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 9(1984), 191-212.
- (11) Gartling, D. K., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7(1990), 953-967.
- (12) Leone, J. M., Jr., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7(1990), 969-984.
- (13) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., (1979), 186, McGraw-Hill.
- (14) Morgan, K., ほか 2 名, Preface, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 9(1984), 1-20.