有限要素法による高精度非定常流解析*
(第1報, 数値スキーム)加藤 千幸^{*1}, 池川 昌弘^{*1}, 海保 真行^{*1}Time Accurate Solution of Unsteady Viscous Flow Problems
using the Finite-Element Method
(1st Report, Numerical Scheme)

Chisachi KATO, Masahiro Ikegawa and Masayuki Kaiho

A new finite-element method is proposed for solving unsteady incompressible Navier Stokes equations. The basis of the method is to shift the governing equations to the upstream direction by a distance proportional to the local flow velocity multiplied by the time increment. The method thus differs from most conventional upwind formulations which shift the governing equations based on the element dimension. The proposed method guarantees reasonable stability for simulations of high Reynolds number flows without introducing excessive numerical diffusion which is often encountered with conventional upwind methods. The accuracy of the proposed upwind method is first demonstrated for a simple advection-diffusion problem known as 'rotating cone'. Several simulations of unsteady laminar flows are then performed to test the full Navier-Stokes formulation. The simulated results show good agreement with the experimental data. Hence, the proposed method seems quite promising for simulations of unsteady flows in complicated geometries.

Key Words: Unsteady Flow, Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Upwind Method, Numerical Diffusion, Laminar Flow

1. 緒 言

スーパーコンピュータの出現とそれに適した高速な行列解法の開発, グラフィックワークステーションによる計算結果の可視化手法の発達などにより, 近年機械工学の分野で数値流体力学が著しい進歩をとげている。機械工学の分野で問題となる流れは, 一般に複雑形状流路内の, 大規模な渦を伴った非定常流が多い。これまで, 複雑形状流路の非定常流の解析には, 曲線座標系やマルチブロック法を併用した差分法が主として用いて行われてきたが⁽¹⁾⁽²⁾, 差分法は基本的に規則的な格子分割を前提としているため, 複雑な形状流路の解析に適用することには限界がある。これに対し, 有限要素法は, 差分法に比べ計算効率は劣るものの, 理論的には任意形状流路の解析が可能であり, メッシュ生成の完全自動化が実現されれば, 将来複雑形状流路の非定常流解析に有限要素法が広く用いられるようになることが予想される。従来, 有限要素法は主に複雑形状流路の定常流解析に適用され, 種々の安定でかつ高精度な定常スキームが提案されているが⁽³⁾⁽⁴⁾, 有限要素法による非定常流解析スキームはあまり提案さ

れていない。そこで, 本研究では有限要素法による高精度でかつ数値的安定性に優れた, 非定常流解析スキームを提案することを目的としている。

本報は, 解析スキームの提案とその検証を主目的としているため, 検証対象とした流れ場は二次元の層流に限定したが, 提案するスキーム自体には空間の次元に関する制約は一切ない。提案するスキームを用いた, 三次元非定常乱流解析については次報にて報告する。

主 な 記 号

 C_D : 円柱の抗力係数 $= 2F_D/(\rho u_\infty^2 D)$ C_L : 円柱の揚力係数 $= 2F_L/(\rho u_\infty^2 D)$ C_P : 圧力係数 $= 2(p - p_\infty)/(\rho u_\infty^2)$ C_f : 円柱の表面摩擦係数 $= 2\tau_w/(\rho u_\infty^2)$ D : 円柱の直径 F_D : 円柱の単位長さあたりに働く流体抗力 F_L : 円柱の単位長さあたりに働く流体揚力 f : 渦放出周波数 H : ステップの高さ γ_i : 解析境界における外向き単位法線ベクトルの
 x_i 方向成分 p : 圧力 p_∞ : 一様流の圧力

* 原稿受付 平成3年9月9日。

*¹ 正員, (株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。

Re : レイノルズ数 $= u_\infty H / \nu$, または $u_\infty D / \nu$

R_i : x_i 方向の運動量式の残差

St : 渦放出のストローハル数 $= fD / u_\infty$

t : 時間

u_∞ : 一様流速度, あるいは円柱の移動速度

u_i : x_i 方向の流速成分

x_i : 空間直交座標

Δ : 等高線の値の間隔 (図中)

Δt : 計算時間刻み

ρ : 密度

ν : 動粘性係数

θ : 円柱前縁から計った角度

τ_w : 壁面摩擦応力

Ω : 計算領域

Γ_n : ノイマン境界

ϕ : 任意の保存関数

ϕ^* : 重み関数

上付き添字

n : 計算時間ステップ

$-$: 時間平均値

2. 基礎方程式および境界条件

有限の解析領域 Ω 内の非定常非圧縮性流体の運動を考える。基礎方程式はナビエ・ストークス方程式 (1), および連続の式 (2) により与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに, u_i は x_i 方向の流速成分, p は圧力, また, ρ , ν はそれぞれ流体の密度, ならびに動粘性係数を表す。

一方, 解析領域 Ω は, デイレクレー境界およびノイマン境界により囲まれており, それぞれ以下の条件が与えられているものとする。ただし, 本解析ではノイマン境界において自由噴流の状態を仮定している。

デイレクレー境界

$$u_i = u_i \text{ given} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ノイマン境界

$$\gamma_j \left[-\delta_{ij} \frac{p}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに, γ_j は境界における外向き単位法線ベクトルの x_j 方向成分を表す。

3. 数値解析法

3・1 運動量式の時間積分 式 (1) は, 時間微分項と空間微分項を分離して次のように書き表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = R_i \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$R_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ここに, R_i は式 (1) の空間微分項をまとめた残差項である。

今, 時刻 $t = n\Delta t$ における速度場ならびに圧力場が求まっているとすると, 次の時刻 $t = (n+1)\Delta t$ の速度場は現在の残差項ならびにその時間変化率を用いて次式から求められる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + R_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} R_i^n \Delta t^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ところが, 対流項が支配的となる高レイノルズ数流れにおいては, 一般に流体と共に移動する物理量の時間変化率は近似的に空間微分項に置き換えることができる⁽⁶⁾。したがって, 式 (6) 右辺最終項は, 次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} R_i^n \Delta t^2 &\simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^n u_j^n \Delta t^2 \\ &\simeq -\frac{1}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} u_i^n \Delta t^2 \\ &= -\frac{1}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} R_i^n \Delta t^2 \quad (\text{ただし, } Re \gg 1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに, 式 (7) の導出にあたり, 非圧縮性流体の仮定を使用した。

式 (7) を式 (6) に代入すると次の式 (8) が得られる。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + R_i^n \Delta t - \frac{1}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} R_i^n \Delta t^2 \\ &= u_i^n + \left(1 - \frac{1}{2} u_j^n \Delta t \frac{\partial}{\partial x_j} \right) R_i^n \Delta t \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式 (8) が提案する時間積分式の一般形である。

通常のオイラー陽解法では, 式 (6) の右辺最終項は無視するが, レイノルズ数が高い流れの解析においてはこの項を考慮することは, 数値積分の安定性を確保するために本質的に必要なことである。すなわち, 式 (7) は対流項が支配的であると仮定するとさらに次のように変形できる。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} R_i^n \Delta t^2 \simeq \frac{1}{2} u_j^n u_k^n \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_i^n \Delta t \quad \dots\dots\dots (9)$$

式 (9) は, この項が拡散応力項として流れ方向に作用することを意味する⁽⁶⁾。したがって, この項を無視することは逆に流れ方向に負の数値的粘性を導入するこ

とになり計算に不安定を生じさせる。

時間積分式(8)を用いる代わりに、通常のオイラー陽解法に式(9)に対応する拡散項を直接付加して時間積分することも可能である⁽⁵⁾。しかしながら、本研究では一般性を保つために式(8)を用いて時間積分を行う。

式(8)の右辺第2項は、ある点における流速の時間変化率を計算する際、その点より $1/2u_j\Delta t$ だけ上流側の点において空間残差項を計算することを意味する。オイラー陽解法における時間微分項の評価時刻である $t=(n+1/2)\Delta t$ においては、 $1/2u_j\Delta t$ だけ上流の情報特性 $x_j=u_jt$ 上を伝ばして伝えられる。したがって、 $1/2u_j\Delta t$ だけ上流側の、現時刻における流速から空間残差項を計算すれば高精度な時間積分が実現できるのである。

3.2 圧力の解法 式(8)から計算される速度場は、時刻 $t=(n+1)\Delta t$ における近似解ではあるものの、連続の式(2)を満足しない。そこで、本研究では差分法の ABMAC⁽⁷⁾ に基づき速度、圧力の同時緩和を行い、連続の式を満足させた。その詳細は文献(7)、(9)を参照されたい。

3.3 有限要素法による定式化 時間に関して離散化された式(8)は、任意の空間離散化法により定式

化することができるが、本研究では前述のように、形状適応性に優れた有限要素法により定式化することにする。

式(8)に重み関数 ϕ^* を乗じ、解析領域全域にわたり積分し、部分積分を施すことにより次の式(10)が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi^* u_i^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} \phi^* u_i^n d\Omega \\ &+ \Delta t \int_{\Omega} \left(1 + \frac{1}{2} u_j^n \Delta t \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \phi^* R_i^n d\Omega \\ &- \Delta t \int_{\Gamma_n} \frac{1}{2} u_j^n \gamma_j \Delta t \phi^* R_i^n d\Gamma \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(8)の上流化は有限要素法により定式化した場合、重み関数の修正により実現される⁽⁹⁾。式(10)の右辺最終項は流出境界における上流化の効果を取り込むものである。以下、解析領域を要素分割し、通常のガラーキン有限要素法の手続に従い離散化すると、最終的に節点未知流速 u_i に関する連立一次方程式を得る。本研究では、位相誤差の低減を図るために Donea らにより提案されたマルチパスアルゴリズム⁽⁶⁾ を用いてこの連立方程式を解く。一方、速度、圧力の同時反復には通常のガラーキン有限要素法を使用している。なお、本研究では有限要素としては四辺形双一次要素を使用し、流速は節点で定義し、圧力、および式(10)にあら

図1 Rotating Cone問題による検証 (ベクレ数=10⁶)

われる上流化量は要素内一定として扱っていることを付記する。

3・4 時間積分法の検証 提案する上流化法を用いて、非定常流の解析を行う前に、Rotating Cone問題により、時間積分法自体の精度の検証を行ったのでその結果を簡単に述べる。Rotating Cone問題は、図1(a)に示すような二次元の回転流れ場(既知)におけるスカラー関数 ϕ の非定常移流拡散問題であり、関数 ϕ に適当な初期分布を与えてある時間積分し、その関数分布の変化から、時間積分法の精度や安定性を調べるものである。ここでは、図1(a)に示すような cosine 関数分布を ϕ の初期値として与え、1周後のコーンの状態から各数値積分法の精度ならびに安定性を調べた。ここで、高レイノルズ数の場合を想定し、コーン中心上の回転速度、コーン回転半径、ならびに関数 ϕ の拡散係数から定義されるペクレ数は 10^6 に設定した。したがって、コーン形状はほとんど不変のままコーンは回転して元の位置に戻ってくるはずである。また、積分の時間刻みはコーン中心上のクーラン数が

0.25 となるように設定した。

図1(b)~(d)は、種々の積分法によりコーンを一周させた後の状態を示す。ただし、オイラー陽解法では、コーンが一周する前に解が発散してしまったので、半周後の状態を示す[図1(d)]。これは、上述のようにオイラー陽解法では、負の数値粘性を導入するので、レイノルズ数あるいはペクレ数の高い流れ場では本質的に解が不安定になるからである⁽⁶⁾。一方、従来の上流化法⁽⁹⁾では、逆に過度の数値粘性を流れ方向に導入するため一周後のコーンの高さは、元の高さの42%まで減衰している。特にコーンの形状が流れ方向になまっていることがわかる。つまり、オイラー陽解法に導入される負の数値粘性を補償する上流化量は、式(8)からわかるように局所流速ならびに時間刻みに依存するのに対し、従来の上流化法では要素寸法に基づいて上流化量を決定するため、CFL条件のもとに陽的に積分を行っている限り必然的に過度の数値粘性が導入される。これに対し、提案する上流化法では、一周後もコーンは元の高さの98%の高さを維持しており、しか

図2 バックステップ流れの解析結果 ($Re=229$)

図3 円柱回りのカルマン渦の解析 (計算メッシュおよび境界条件)

も解析領域内には特に解の振動は認められない。この結果、提案するスキームにより、安定で高精度な時間積分が実現できる見込みが得られた。

4. 数値解析例

以下、3章で説明した解析法の計算精度を検証した

(a) $Re=100$

(b) $Re=200$

(c) $Re=400$

図4 円柱周りの瞬間圧力分布 ($\Delta C_p=0.1$)

(a) $Re=100$

(b) $Re=200$

(c) $Re=400$

図5 円柱の抗力係数および揚力係数の時間変動

図6 円柱の表面圧力係数 (時間平均値)

図7 円柱の表面摩擦係数 (時間平均値)

結果について述べる。ただし、前述したように、乱流モデルなどの基礎方程式自体の持つ解析誤差の混入を防ぐために、検証対象は層流とみなせる流れに限定した。対象とした流れは、 Re 数 229 のバックステップ流れ、 Re 数 60 から 400 の円柱回りに非定常流、ならびに Re 数 10^4 の円柱の出発渦の解析である。

4.1 バックステップ流れの解析 (Re 数=229)

3章の式(8)における空間残差項 R_i は、流れ場が時間的に変化しない所では零となる。したがって、本解析法は定常解析にも用いることができる。このことを確認するために、ステップ高さ H およびステップ上流の平均流速により定義される Re 数が 229 のバックステップ流れの解析を行い、Denham らの実験結果⁽¹⁰⁾と比較した。ステップの拡大率は 2:3 である。境界条件はステップ上流 H の断面において流速の実測値を与え、また、ステップ下流 $15H$ の位置に流出境界を設定し、 x 方向、 y 方向ともに応力零の境界条件を課した。メッシュ分割は x 方向 48 分割、 y 方向 45 分割の等間隔メッシュを用いた。メッシュ寸法は x 方向、 y 方向それぞれ $0.33H$ 、 $0.067H$ である。計算されたはく離循環流域の流速分布を実験結果⁽¹⁰⁾と比較した結果

図 8 円柱の抗力係数の比較 (時間平均値)

図 9 渦放出のストローハル数の比較

を図 2 に示す。計算結果は実験値と極めて良く一致している。また、計算された再付着距離は 9.5 であり、実験値の 10.0 とほぼ一致する。なお、本解析においては、はく離循環流域内の流れに、ステップ高さおよびステップ上流の平均流速で定義される無次元周期にして 110 程度の弱い非定常性が認められた。そこで、同様に定義される無次元時間にして 600 における流れ場の平均を行い流速分布、ならびに再付着距離を算出した。

4.2 円柱のカルマン渦流れの解析 (Re 数=60~400)

次に、代表的な層流非定常流の例として、円柱直径 D および一様流速 u_∞ により定義されるレイノルズ数が 60, 100, 200, ならびに 400 の円柱回りの非定常流の解析を行い、抗力係数、渦放出の周波数を実験値と比較した。

図 3 に本解析に用いたメッシュ分割ならびに境界条件を示す。解析領域として幅 $20D$ の流路を取り、円柱上流 $10D$ の位置に流入境界を設定し、また、円柱の下流 $20D$ の位置に流出境界を設定した。流入境界では、一様流入の条件を課し、流出境界では x 方向、 y 方向ともに応力零の条件を設定した。一方、流路上下壁境界 $y = \pm 10D$ においては、閉そく効果の影響を避けるために、滑り壁の条件を与える代わりに x 方向、 y 方向ともに応力零の条件を設定した。最後に、円柱表面ではノースリップの条件を課した。これらの境界の位置ならびに境界条件は、円柱からの渦放出に影響を及ぼさないことが予備計算により確認されている。

メッシュ分割は、円柱の周方向に 120 分割、半径方向に 60 分割とした。円柱表面に発達する境界層が十分な精度で解像できるように、円柱表面の半径方向のメッシュ寸法は $0.01D$ とした。本解析に用いた全メッシュ数は 12 000 である。

計算は、 Re 数 60 のケースから始め、徐々にレイノルズ数を上げていった。それぞれのケースにおいて、解が完全にリミットサイクルに入ったと思われる時刻

図 10 円柱の出発渦の解析
(計算メッシュおよび境界条件)

から、円柱直径ならびに一様流速により定義される無次元時間にして60の間計算を続け、抗力係数の時間平均値や渦放出のストローハル数などを算出した。なお、最初の Re 数60のケースにおいては、円柱の上下3節点に一様流速の $\pm 3\%$ のかく乱を加え、渦放出を促進させた。

レイノルズ数100, 200, ならびに400の各ケースにおいて計算された円柱回りの瞬間圧力分布 C_p , および抗力係数 C_D , 揚力係数 C_L の時間変動をそれぞれ図4, 5に示す。揚力係数の時間変動から、各ケースとも、周期的なカルマン渦の放出が起こっていることがわかるが、レイノルズ数100の流れでは放出されたカルマン渦は粘性効果のためにすぐに減衰している。また、レイノルズ数400の流れでは円柱下流10D近傍からカルマン渦列が乱れ始めている。このことは、流れ場の中に三次元性が現れ始めていることを示唆し、この程度のレイノルズ数が二次元の層流解析の限界であると思われる。

放出されるカルマン渦自体の強度はレイノルズ数の

増加とともに強くなり、それに伴い、抗力係数ならびに揚力係数の時間変動も大きくなっている。この理由は、レイノルズ数の増加とともに離速度が速くなり、はく離流線の巻込みが激しくなることに起因していると考えられ、定性的に妥当な結果であると言える。

円柱表面の圧力係数 C_p , ならびに摩擦係数 C_f の時間平均値をそれぞれ図6, 7に示す。レイノルズ数の増加に伴い、放出渦の強度が強くなることに対応して、円柱の背圧も下がっている。一方、壁面摩擦応力はレイノルズ数の増加とともに減少するため、円柱の抗力係数はレイノルズ数200まではレイノルズ数の増加に伴い、わずかではあるものの減少している(図8)。図8には、円柱の抗力係数の実験値⁽¹²⁾⁽¹³⁾も示してある。実験方法により、実験値にもばらつきはあるものの、レイノルズ数200までの計算結果はほぼ妥当な値を示していると言える。レイノルズ数400の計算値は、明らかに実験値と異なる傾向を示しているが、この原因としては解析領域の狭さ、流れの三次元性の影響など

図11 円柱の出発渦の発達過程の比較 ($Re=10^4$)

が考えられる。

図9に渦放出のストローハル数を実験値⁽¹¹⁾⁽¹²⁾と比較した結果を示すが、少なくともレイノルズ数200までのケースにおいては、計算値は実験値と良く一致していると言える。

4.3 円柱の出発渦の解析 ($Re=10^4$) 最後に比較的高いレイノルズ数の非定常流の例として、静止流体中を軸と直交する方向に急に運動し始めた円柱背後に発達する出発渦の解析を行った。円柱の運動速度および円柱直径により定義されるレイノルズ数は 10^4 とした。本レイノルズ数の円柱回りの非定常流においても、円柱が運動し始めた直後の流れ場は二次元性が強いと考えられる。

図10に計算に使用したメッシュならびに境界条件を示す。メッシュ分割は、円柱の周方向200分割、半径方向60分割とし、また、流れ場の対象性を考慮して、半径 $10D$ の半円形の解析領域を設定した。一方、円柱が動き始めた直後の流れ場では、粘性の影響が円柱表面の極近傍までしか及ばないため、初期値としては円柱回りのポテンシャル流れの解を与えることにした。静止流体を初期値とし、円柱の運動加速度にあわせた慣性項を運動量式に付加して計算することも可能であるが、発生する衝撃圧力の減衰を精度良く追従するための計算負荷が著しく増大する。

図11に、円柱の背後に出発渦が発達していく様子を可視化実験の結果⁽¹⁴⁾と比較して示すが、主渦のみならず二次渦、三次渦の挙動も含めて本解析結果は実験結果と良く一致していると言える。

以上、数例の解析を通して、提案するスキームの有効性を確認することができた。なお、本報では検証対象を層流非定常流に限定したが、提案するスキームは、 10^5 を超える高レイノルズ数流れの解析も安定に行えることが確認されていることを付記する⁽⁹⁾。

5. 結 言

複雑流路形状内の非定常流を、数値的安定性を保ち

ながら高精度に解析することを目的として、新しい有限要素法スキームを提案した。提案するスキームは、局所流速と時間刻みとの積に比例した支配方程式の上流化を行うことに特徴があり、従来の要素寸法に基づいた上流化有限要素法でしばしば問題となっていた数値粘性の影響をほとんど完全に除去することができる。

提案するスキームを用いて、レイノルズ数(Re 数)229のバックステップ流れ、 Re 数60から400の円柱回り非定常流、および Re 数 10^4 の円柱の出発渦の解析を行ったところ、定性的、定量的に実験結果と良く一致する結果が得られ、複雑流路の非定常流解析に対する本解析法の有効性を確認することができた。

文 献

- (1) Kawamura, T. and Kuwahara, Y., *AIAA Paper*, 84-0340 (1984).
- (2) Himeno, R., ほか2名, *SAE Paper*, No. 900319 (1990).
- (3) Brooks, A. N. and Hughes, T. G. R., *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 32 (1982), 199.
- (4) Donea, J., ほか2名, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 48 (1985), 25.
- (5) Gresho, M., ほか3名, *Numer. Methods. Fluids*, 4 (1984), 557.
- (6) Donea, J., ほか3名, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 45 (1984), 123.
- (7) Vieceili, J. A., *J. Comput. Phys.*, 8 (1971), 119.
- (8) 加藤・池川, 第7回流体力学における数値解析法シンポジウム報文集, (1986), 125.
- (9) 加藤・池川, 第1回計算力学シンポジウム報文集, (1987), 111.
- (10) Denham, M. K. and Patrik, M. A., *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 52-4 (1974), 361.
- (11) Roshko, A., *NACA Tech. Note*, 2913 (1953).
- (12) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed. (1979), 32, McGraw-Hill.
- (13) Tritton, J., *J. Fluid Mech.*, 6-4 (1959), 547.
- (14) TaPhuocLoc, and Bouard, R., *J. Fluid Mech.*, 160 (1985), 93.