熱移動を伴う管内粘性流の有限要素法解析における
流出境界条件に関する検討*中山 司^{*1}, 岩崎 潤^{*2}A Note on Outflow Boundary Conditions for the Finite Element Analysis
of Internal Viscous Flows with Heat Transfer

Tsukasa NAKAYAMA and Jun IWASAKI

Outflow boundary conditions have been examined for the finite element analysis of internal viscous flow problems. As a test problem, the combination of Poiseuille flow and Bénard-Rayleigh convection in a two-dimensional duct has been chosen. Using the test problem, two types of conditions are tested: (A) vanishing of a normal gradient of a quantity and (B) vanishing of a linearized convective derivative. Condition (A) is often used in the finite element analysis of internal fluid flows. In the present test case, it has been found that condition (B) yields better results, showing little reflection of outgoing waves back into the computational domain. In the last part of the paper, a generalized method for including the outflow boundary condition of type (B) into the finite element formulation of Navier-Stokes equations is shown.

Key Words: Finite Element Method, Outflow Boundary Condition, Viscous Incompressible Flow, Bénard-Rayleigh Convection

1. はじめに

化学反応器のような管状の容器内の流れを数値解析する場合、流入、流出境界が設けられる。流入境界は、実験などによって流れの速度分布があらかじめわかっているか、あるいはポアズイユ流れのような理論解が適用できるような位置に設定される。これに対して流出境界は、その位置が解析上重要である場合を除いて、一般には管内の適当な位置に仮想境界として設置される場合が多い。このときその位置は、計算精度を損なわないように、注目する流れの領域から十分に離れたところに設けられ、そこでは未知量の法線方向微係数を零とする条件を課すことが多い。しかし、この場合、整流のために設けられるダミーの領域に分布させる未知量のために解くべき連立一次代数方程式は大規模になってしまう。そこで、広い計算領域を必要とせず、しかも滑らかな流れの流出を実現する境界条件が望まれる。

流体流れの有限要素法解析においては、

$$-pn_x + \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial n} = -pn_y + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \dots\dots (1)$$

が、流出境界条件として広く用いられており、もっともらしい流れのパターンが得られることが知られている。

熱移動を伴う流れの場合には、温度 T に関する流出境界条件として、

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

を用いるのが一般的である。しかし、この条件式は、熱量が境界を横切って流出しないという断熱条件を表している。そのため、計算領域を十分に長くとらないと、出口付近に熱がたまり、不自然な流れのパターンを生むことになる。

そこで本論文では、熱移動と流体流れの連成問題を例題として、従来有限要素法解析で用いられてきた流出境界条件と、Bottaro⁽¹⁾によって提案された線形移流方程式で表される条件との比較検討を行い、望ましい流出境界条件について考察してみたい。

2. 問題の設定

解析例題として、下面が加熱される2枚の平行平板間の二次元流れを考える。図1において、水平に置か

* 原稿受付 平成4年4月20日。

*¹ 正員、中央大学理工学部 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)。*² 学生員、中央大学理工学部 (現：(株)アマダ)。

れた平行平板間の長方形領域を計算領域 Ω とし、下面境界を Γ_1 、上面境界を Γ_2 、流入境界を Γ_3 、流出境界を Γ_4 とする。図1のように座標原点 o を定め、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸を設けるものとする。流入境界ではポアズイユ流れの速度分布を指定する。このとき下面を加熱して鉛直方向に温度差をつくると、浮力による対流（ベナール・レイリー対流）が発生し、水平方向のポアズイユ流れとの連成により蛇行する流れのパターンが生じる。本論文では、この現象の解析をとおして、流出境界条件の検討を行うことにする。

流体は非圧縮ニュートン流体、平板間の流れは層流と仮定すると、流れの支配方程式は、次の連続の方程式とナビエ・ストークス方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{Gr}{Re^2} T \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、すべての物理量は無次元化されているものとし、 t は時間、 u 、 v はそれぞれ流速の x 方向、 y 方向成分、 p は圧力、 T は温度を表す。 Re はレイノルズ数、 Gr はグラスホフ数である。温度の支配方程式は、エネルギー方程式を簡略化した熱伝導方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \\ = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \Omega \text{ 内} \quad \dots\dots (6) \end{aligned}$$

である。ここに Pr はプラントル数である。粘性による散逸エネルギーは、流れが遅いという仮定のもとで無視するものとする。流出境界を除く境界上での条件は以下のように与えられる。

$$u=v=0, T=1 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad \dots\dots (7)$$

$$u=v=0, T=0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad \dots\dots (8)$$

$$u=4y(1-y), v=0, T=1-y \quad \Gamma_3 \text{ 上} \quad \dots\dots (9)$$

図1 計算領域の定義

さて、本論文で検討の対象とする流出境界条件は次の2種類である。

$$(A) \quad \left. \begin{aligned} -p + \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Gamma_4 \text{ 上}$$

$$(B) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Gamma_4 \text{ 上}$$

条件(A)は流体流れの有限要素法解析と熱移動現象の数値解析でしばしば用いられる条件式を組合せたもので、いずれも速度と温度の x 軸方向の変化率を指定している。(B)の条件式の一般形は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (10)$$

のように与えられる。移流速度 U 、 V は計算領域内の流れの様相に依存するため、時間と場所の関数であり、一般には未知量である。したがって、式(10)は非線形方程式として扱われなければならないが、ここでは Bottaro にならい、 U 、 V を流入境界上の速度分布（すなわちポアズイユ流れの速度分布）の平均値に等しいと考える。したがって、

$$U = \int_0^1 4y(1-y)dy = \frac{2}{3}, V=0 \quad \dots\dots (11)$$

とにおいて、式(10)を線形方程式として扱うことにする。

3. 有限要素法による離散化

支配方程式ならびに境界条件は三角形要素を用いる有限要素法によって離散化される。領域 Ω を多数の要素に分割し、それぞれの要素内で圧力 p を x 、 y の一次式で近似する。次に、図2のように要素をさらに四つの等面積の小三角形に分割し、その小三角形ごとに速度成分 u 、 v と温度 T をそれぞれ x 、 y の一次式で近似する⁽²⁾。こうして、基礎方程式は空間方向に離散化されて

$$H^T U = 0 \quad \dots\dots (12)$$

$$\bar{M} \dot{U} + \left\{ A(U) + \frac{1}{Re} D \right\} U - HP + BT = 0 \quad \dots\dots (13)$$

図2 解析に用いた有限要素

$$\bar{M}\dot{T} + \left\{ A(U) + \frac{1}{Re Pr} D \right\} T = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここに、 U は各節点の速度成分から成る速度ベクトル、 P は圧力ベクトル、 T は温度ベクトルを表す。 $(\quad)$ は集中化された行列 (lumped matrix) を意味し、 $(\quad)$ は時間 t に関する偏微分を意味する。なお、方程式(4)～(6)の弱形式を導くにあたって、式(4)、(5)の右辺第1、第2項、式(6)の右辺第1項に部分積分を施すものとする。

流出条件(A)は、支配方程式の弱形式を導出する際に自然境界条件としてそのままの形で用いることができるので、特別な式変形は不要である。しかし、流出条件(B)の利用にあたっては工夫が必要である。この場合、条件(B)を、ディリクレ型条件として用いるか、ノイマン型条件として用いるかによって式変形の仕方が変わってくる。ここではまず、Bottaroによって示された前者の利用方法を検討してみよう。後者については節を改めて考えることにする。温度の条件式を例にとると、時間微係数を前進差分で、空間微係数を後退差分で近似することによって

$$T^{n+1}(x, y) = T^n(x, y) - \frac{U \Delta t}{\Delta x} \{ T^n(x, y) - T^n(x - \Delta x, y) \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

を得る。ここに、点 (x, y) を流出境界 Γ_4 上の任意の節点とし、 Δx をその節点と、隣接する上流節点との間の距離とする。さらに、 Δt を時間増分とし、上付き添字 n は時刻 $t^n = n \Delta t$ における値を表すものとする。式(15)で計算される値を境界値として用いれば、 Γ_4 上でディリクレ型境界条件を設定することができる。

時間方向の離散化には差分法を用いる。まず、連続の方程式(12)とナビエ・ストークス方程式(13)には、SIMPLER法のアルゴリズム⁽³⁾⁽⁴⁾を適用する。このアルゴリズムのもとで、時刻 t^n の圧力 P^n と時刻 t^{n+1} の速度 U^{n+1} を求める手順は次のようにまとめられる。

- (1) 次式により、中間的な速度 $\tilde{U}$ を計算する。

$$\tilde{U} = U^n - \Delta t \bar{M}^{-1} \left[\left\{ A(U^n) + \frac{1}{Re} D \right\} U^n + B T^n \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

- (2) 連立一次代数方程式

$$(H^T \bar{M}^{-1} H) P^n = - \frac{1}{\Delta t} H^T \tilde{U} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を解いて、圧力 P^n を求める。

- (3) $\tilde{U}$ を次式で補正し、 U^{n+1} を求める。

$$U^{n+1} = \tilde{U} + \Delta t \bar{M}^{-1} H P^n \quad \dots\dots\dots (18)$$

次に、熱伝導方程式(14)の時間積分には、有理ルンゲ・クッタ法⁽⁵⁾を用いる。各時刻において、最初に速度

場を計算し、次にその値を用いて温度場を求める。初期条件は、 $t=0$ で、 $u=v=T=0$ とする。

4. 数値計算と結果の検討

領域の長さ L が 5.0 と 7.5 の場合について計算を行った。領域内の要素分割のパターンを図3に示す。このとき、要素サイズの違いによって計算値に差が生じないように、 $L=5.0$ と $L=7.5$ のいずれの場合も同サイズの要素を使用した。この結果、 $L=5.0$ のとき、総要素数は 400、総節点数は 861、 $L=7.5$ のとき、総要素数は 600、総節点数は 1281 であった。各パラメータの数値は、 $Re=10$ 、 $Gr=1.5 \times 10^4$ 、 $Pr=0.667$ とし、時間増分には $\Delta t=10^{-3}$ を用いた。

図4は、流出条件(A)を用いたときの、 $t=5.0$ の速度と温度の分布図である。このとき用いた温度の条件 $\partial T / \partial n = 0$ は断熱を表すので、流出境界付近に熱がたまることになる。その結果、浮力の影響が強く現れ、大きな上昇流が計算されている。流出条件(B)による計算結果を示した図5と比較すると、図4では流出境界の下部で、本来流出するはずの流れが、この上昇流のために流入流れになってしまっている。出口の上流部に整流区間を設け、流れをポアズイユ流れに戻してから流出させない限り、本例題の流出境界条件として条件(A)を用いることは不相当であることがわかる。

図5は、図4と同様 $t=5.0$ における速度と温度の分布を示したもので、 L が 5.0 と 7.5 の場合の結果を対比している。図4で見られた、流出境界付近での不自然な流れのパターンは現れておらず、しかも計算領域の長さの違いによる速度や温度の分布の変化はきわめ

図3 計算領域の要素分割

(a) 速度ベクトル

(b) 等温線

図4 流出条件(A)による計算結果

て小さい。

領域の長さの違いによる計算値の変化を定量的に調べた結果を図6と図7に示す。これらは、温度 T と速度成分 v の時間変化をプロットしたもので、図6は節点 (3.0, 0.5) における値、図7は節点 (5.0, 0.5) における値をそれぞれ示している。節点 (3.0, 0.5) は、 $L=5.0$ と $L=7.5$ のいずれの場合にも領域内部に位置

している。この場合、流出境界の位置を変えても、その節点での計算値はほとんど変化しないことを、図6は示している。一方、図7を見ると、同一節点を、流出境界上に置いた $L=5.0$ の場合と領域内部に置いた $L=7.5$ の場合のそれぞれの計算値の時間変化の間には、計算開始の初期において位相のずれが生じることがわかる。しかし、この位相のずれは時間の経過とともに

図5 流出条件(B)による計算結果 (各図の上段は $L=5.0$, 下段は $L=7.5$)

図6 節点 (3.0, 0.5) における温度 T と流速成分 v の時間変化 [流出条件(B)]

図7 節点 (5.0, 0.5) における温度 T と流速成分 v の時間変化 [流出条件(B)]

解消されている。また、十分な時間が経過しても、時間変化の振幅には若干の差が残る。特に、曲線の谷の部分での差が目立つ。

これらの位相のずれや振幅の差が生じた原因は、流出条件式(10)の移流速度 U , V を一定としたことにあると思われる。本論文で連続の方程式とナビエ・ストークス方程式の解法として用いた SIMPLER 法においては、非圧縮の条件(3)を厳密に満たすことは困難であり、速度の発散は必ずしも零にはならない。そのため、たとえば平行平板間の単純なポアズイユ流れを静止状態を初期値として計算すると、流出境界の速度分布が流入境界で指定したポアズイユ流れの速度分布になるまでには、 $Re=10$, $\Delta t=10^{-3}$ の場合、約 900 回の時間ステップを必要とする。ところが、本論文の例題では、そのような過渡的な期間であっても、流入境界と同じ速度分布を流出境界上で仮定して式(10)の移流速度 U , V を決めている。実際に計算される速度分布と、移流速度 U , V を決める際に仮定する速度分布の不一致が図 7 に見られる差を生んだ原因と考えられる。本研究では、毎時刻計算される流出境界上での速度分布の平均値を U , V とする方法も試みたが、良好な結果は得られなかった。文献(6)に見られるように、計算領域内部の流れの様相を考慮しつつ、毎時刻移流速度 U , V の大きさを決める方法を考案することが必要であると思われる。今後の検討課題としたい。

5. 流出条件(B)の新しい導入方法

4 章では、(B)の条件式を式(15)のように差分近似して用いた。この場合、出口付近では要素の辺が x 軸に平行になるように要素分割を行う必要がある。複雑な内部形状を有する流体機械内の流れを解析するとき、要素分割の仕方にこのような制約を課すことは得策ではない。そこで、少なくとも空間方向には差分近似を用いない定式化を考える必要があるであろう。

温度を例にして有限要素法による定式化を考えてみる。熱伝導方程式の弱形式を求めるときに、右辺の拡散項を部分積分して、

$$\begin{aligned} & \iint_a T^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{Re Pr} \int_r T^* \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \\ & - \frac{1}{Re Pr} \iint_a \left(\frac{\partial T^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

を導く。ここに T^* は重み関数である。そこで、右辺第 1 項に注目して、まず

$$T^*=0 \quad \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \text{ 上} \dots\dots\dots (20)$$

とおく。次に、境界 Γ_4 上では

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{U} \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (21)$$

であることを考慮すると、式(19)は

$$\begin{aligned} & \iint_a T^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \\ &= -\frac{1}{Re Pr U} \int_r T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Gamma \\ & - \frac{1}{Re Pr} \iint_a \left(\frac{\partial T^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \\ & \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

のようになる。これを離散化すると

$$(\bar{M} + \bar{F})\dot{T} + \left\{ A(U) + \frac{1}{Re Pr} D \right\} T = 0 \dots (23)$$

を得る。ここに、 $\bar{F}T$ が式(22)の右辺第 1 項に対応する。したがって、3 章の式(14)において、 $\bar{M}$ の代わりに $\bar{M} + \bar{F}$ を用いればよいことがわかる。

ナビエ・ストークス方程式に対しても同様である。ただしこの場合、弱形式の導出において部分積分を施すのは、式(4), (5)の右辺第 2 項のみとし、圧力項はそのままの形で離散化されるものとする。この結果、連続の方程式(3)の弱形式の導出では、左辺を部分積分しなければならないこと、計算領域内の任意の 1 点で圧力の基準値を指定する必要が生じることに注意しなければならない。

以上により、流出条件(B)を、式(21)のようにノイマン型境界条件として用いることによって、空間方向に差分近似を施すことなく有限要素法の定式化の中へ導入することができる。

この新しい定式化の方法に基づく計算結果を図 8 に示す。図 8 は、 $L=5.0$ のときの $t=5.0$ での速度分布、温度分布を示している。図 5 とほぼ同様の結果が得られている。また、節点 (3.0, 0.5) と (5.0, 0.5) における速度成分 v と温度 T の時間変化を $L=5.0, 7.5$ の場合について調べた結果、図 6, 7 と同様の結果を得

(a) 速度ベクトル

(b) 等温線

図 8 条件(B)の新しい導入方法に基づく計算結果

た。

6. お わ り に

二次元ポアズイユ流れとベナール・レイリー対流の連成流れを例題として、流出境界条件に関する検討を行った。その結果、有限要素法解析で一般的に用いられている流出条件、すなわち未知量に関する境界の法線方向の変化率を指定する条件は適切ではないことがわかった。これに対して、Bottaro が提案した線形移流方程式で表す条件は流出境界の位置を変えても計算領域内部の流れのパターンの変化が少なく、良好な結果を与えることがわかった。そこで、この Bottaro 型の境界条件を、有限要素法による支配方程式の離散化

に導入するための効率的な方法を提案し、その効果を検証した。

文 献

- (1) Bottaro, A., *Numer. Heat Transf., Part B*, **18** (1990), 243.
- (2) Bercovier, M. and Pironneau, O., *Numer. Meth.*, **33** (1979), 211.
- (3) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), 131, McGraw-Hill, New York.
- (4) Yazaki, H. and Nakayama, T., *Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci.*, Melbourne, (1991), 1209.
- (5) 森西・里深, 機論, **56-527**, B (1990), 1906.
- (6) Orlanski, I., *J. Comput. Phys.*, **21** (1976), 251.