二次元物体の付加質量係数の近似計算法*

(二次元ポテンシャル理論)

矢野 秀雄^{*1}, 大江 正展^{*2}

An Approximate Method for Computation of Added-Mass Coefficients of Two-Dimensional Bodies (Two-Dimensional Potential Theory)

Hideo YANO and Masanobu OOE

This solution is based on a discrete singularity method in two-dimensional potential theory. For computational examples, the following bodies were chosen: groups of circular cylinders and elliptic cylinders in an infinite flow field, and a group of circular cylinders in a cylindrical container. Their added-mass coefficients were then calculated. As a result, it was clarified that this approximate method of solution is effective for calculation of the added-mass coefficients of two-dimensional bodies of any form, and that it is better than the imaginary method in view of its generality.

Key Words: Fluid Force, Flow-Induced Vibration, Numerical Analysis, Potential Flow, Added-Mass Coefficient, Singularity Method

1. 緒 言

流体中を運動する物体群に働く力の問題は、ボイラや各種熱交換器において発生する流体励起振動に関係して重要な課題である。

本論文では、完全流体中を加速度運動する単体または複数の二次元物体の付加質量係数の近似計算法を提案する。二次元物体の付加質量係数に関しては、Dalton⁽¹⁾らが完全流体の仮定のもとで、一方向に速度を持つ変動流中の複数の円柱の付加質量係数を鏡像法を用いて算出している。また、Chen⁽²⁾は、非圧縮性粘性流体を満たした円筒容器内の同心円柱の付加質量係数を、流れ関数を用いた無限級数解として解いている。

本解法は、離散特異点法(代用電荷法)^{(3)~(5)}によるもので、従来の方法に比べて一般性が高く、しかも計算が容易である。複数の物体が変動流中にある場合や円筒容器内にある場合など、種々の計算例を示し本解法の有効性を確認する。

2. 解 法

本解法では、物体が静止流体中を微小振動するものと仮定する。図1に示すように、渦とわき出しを持つ N 個の特異点を物体 B の内部に離散的に配置し、複素ポテンシャル $f(z)$ を次式で与える。

$$f(z) = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + iq_j}{2\pi i} \log(z - \zeta_j^*) \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

ζ_j^* : 特異点の位置

γ_j : 渦の強さ, q_j : わき出しの強さ

N : 特異点の個数, i : 虚数単位

式(1)を z で微分し複素共役をとると、複素速度 $W(z)$ を得る。

$$W(z) = \text{Conj} \left\{ \frac{d}{dz} f(z) \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Conj: 複素共役をとる演算子

物体表面の M 個の拘束点における不浸透条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Real}\{W(\zeta_k) \cdot \exp(-i\theta_k)\} \\ = \text{Real}[U(t) \cdot \exp\{i(\alpha - \theta_k)\}] \dots\dots\dots (3) \\ k=1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

ただし、

* 原稿受付 平成4年3月16日。

^{*1} 正員、同志社大学工学部 (〒602 京都市上京区今出川通烏丸東入ル)。

^{*2} 同志社大学大学院。

ζ_k : 拘束点の位置

θ_k : 拘束点での法線方向と x 軸とのなす角

$U(t)e^{i\alpha}$: 物体の複素速度, M : 拘束点の個数

また, 付加条件として各物体を囲む閉曲線に関する循環を零とする. すなわち,

$$\sum_{j=1}^{N_m} \gamma_j = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし, N_m は m 番めの物体内部の特異点数とする.

本解析では, 式(3)の $U(t)$ を微小変動させ, 各瞬間で $2N$ 個の未知数 γ_j, q_j ($j=1, 2, \dots, N$) を式(3), (4)より求める. ただし, 一般に式の数が $2N$ より多いため, 残差最小二乗解として解く.

特異点の最適位置は, 境界条件式(3)に対応する残差 e_k の rms 値

$$\bar{e} = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e_k^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

によって定めることができる. すなわち, 式(5)の値が最小になるように特異点配置パラメータ ϵ を定める(図1に示すように物体境界 B に相似な閉曲線 C 上に特異点を配置するため, C と B との相似比が特異点配置パラメータ ϵ ($\epsilon < 1$) となる).

複素ポテンシャル $f(z)$ が定まると, これを次の非定常の Blasius の第1公式に代入する.

$$F = F_a + \text{Conj} \left[\frac{i\rho}{2} \oint_C \left\{ \frac{d}{dz} f(z) \right\}^2 dz \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに

$$F_a = -\text{Conj} \left[\frac{i\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{Conj} \left[\oint_B z \frac{d}{dz} f(z) dz \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. + \oint_B \text{Conj}(z) \frac{d}{dz} f(z) dz \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし,

ρ : 流体の密度

$\oint_C$: 物体を取り囲む任意の閉曲線 C についての一週積分

$\oint_B$: 物体 B に沿う閉曲線についての一週積分

F_a は付加質量に比例する非定常項である.

例えば二体問題の場合, 物体①に働く流体力 F_a ①は, 次のように離散化できる.

$$F_a \text{ ①} = -\text{Conj} \frac{i\rho}{2} \left[\text{Conj} \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} (\dot{\gamma}_j + i\dot{q}_j) \zeta_j^* \right\} + \sum_{k=1}^N \text{Conj}(z_k) \left[\sum_{j=1}^{N_1+N_2} \left\{ \frac{\dot{\gamma}_j + i\dot{q}_j}{2\pi i} \frac{1}{z_k - \zeta_j^*} - \frac{\dot{\gamma}_j + i\dot{q}_j}{2\pi i} \frac{z_k - \zeta_j^*}{(z_k - \zeta_j^*)^2} \right\} \right] \Delta z_k \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに,

N_1 : 物体①内の特異点数

N_2 : 物体②内の特異点数

$\dot{\gamma}_j = \frac{d\gamma_j}{dt}, \dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, z_k = \frac{dz_k}{dt}$

N' : 数値積分の分割数

z_k : 分割点, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

また, 付加質量係数 C_M を以下のように定義する.

$$C_M = -\frac{F_a}{\rho \pi \dot{U} L^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし,

L : 物体の代表長さ, $\dot{U}$: 物体の加速度

3. 計算結果と考察

3.1 無限静止流体中の単独円柱とだ円柱

半径 r の単独円柱の場合, 特異点数 $N=8$, 拘束点数 $M=32$, 特異点配置パラメータ $\epsilon=0.4$ として計算した. また, 長軸 b 対短軸 a の比 $b/a=2$ であるだ円柱の場合, 運動方向を長軸方向とし, $N=16, M=64, \epsilon=0.8$ として計算した. これらの計算結果を表1に示す. ただし, 式(9)における代表長さは, 円柱の場合 $L=r$, だ円柱の場合 $L=a$ とする. 表1より, 本解析結果は十分な精度を持つことがわかる.

表1 単独円柱, だ円柱 ($b/a=2$) の付加質量係数の計算結果

	Results	$\bar{e}$	Exact solutions
Circular cylinder	1.0000000	10^{-3}	1
Elliptic cylinder	1.0028801	10^{-2}	1

図1 任意物体に対する計算モデル

3・2 変動流中の複数の円柱 本節では、変動流中にある複数の円柱を扱う。ここでは、平均圧力こう配の慣性反力への寄与分は除外する(各円柱に対して、 $N=8$, $M=32$, $\varepsilon=0.4$ として計算した)。

(1) 2円柱を変動流に対して水平に置いた場合(図2) この場合、付加質量係数 C_M は、2円柱とも同じである。図2では、Dalton⁽¹⁾らが鏡像法を用いて算出した結果と本解析結果を比較している。 l/r が小さい場合、Daltonらの解と本結果の一致性は良くない。これは図3に示すように本解析結果の境界残差が広範囲の l/r の値に対して十分小さいのに対し、

図2 2円柱を変動流に対して垂直に置いた場合の各円柱の付加質量係数 C_M

図3 2円柱の場合(図2)の境界残差のrms値 $\bar{\omega}$

Daltonらの鏡像法では、境界条件が十分に満足されていないためと考えられる。

(2) 2円柱を変動流に対して垂直に置いた場合(図4) (1)の場合と同様、 l/r が小さい場合、Dalton⁽¹⁾らの解析結果との一致性は良くない。

(3) 3円柱を変動流に対して水平に置いた場合

図4 2円柱を変動流に対して垂直に置いた場合の各円柱の付加質量係数 C_M

図5 3円柱を変動流に対して水平に置いた場合の各円柱の付加質量係数 C_M

(図5) (1)の場合と同様, 3円柱の間隔が狭いほど各円柱の付加質量係数 C_M は小さくなる. 中央の円柱は, 両端の円柱に比べて, やや付加質量係数が小さくなっている.

(4) 3円柱を変動流に対して垂直に置いた場合 (図6) (2)の場合と同様, 3円柱の間隔が狭いほど各円柱の付加質量係数 C_M は大きくなる. 図4の場合と異なり, 中央の円柱は両端の円柱に比べて, やや付加質量係数が大きくなっている.

3.3 変動流中の複数の円柱(長軸 b 対短軸 a の比 $b/a=2$ の円柱の場合) 本問題では, 3個の円柱を図7(b)のように配置し, 各円柱に対して, $N=16, M=64, \epsilon=0.8$ として計算した. ここでも, 平均圧力こう配の慣性反力への寄与分は除外した.

図7(a)を見ればわかるように, 円柱①, ③の付加質量係数 C_{M1}, C_{M3} は, 円柱の間隔が狭くなるとともに大きくなることは注目に値する.

なお, 境界残差の rms 値 $\bar{e}$ は, 3.2, 3.3 の各場合とも

$$\bar{e} = 10^{-3} \sim 10^{-2}$$

であった.

(a) C_M 対 l/b

(b) 配置図

図6 3円柱を変動流に対して垂直に置いた場合の各円柱の付加質量係数 C_M

(a) C_M 対 l/b

(b) 配置図

図7 3個の円柱を変動流中に置いた場合の各円柱の付加質量係数 C_M

(a) C_M 対 r_0/r

(b) 配置図

図8 円筒容器内の同心円柱の付加質量係数 C_M

3・4 流体を満たした静止円筒容器内の単独円柱

円筒容器に対して, $N=8$, $M=32$, $\varepsilon=1.7$, 円柱に対して, $N=8$, $M=32$, $\varepsilon=0.4$ として計算した.

(1) 静止円筒容器内の同心単独円柱(図8) 図8は, 内側半径 r_0 の円筒容器中に半径 r の円柱を同心に置いた場合の計算結果を示したもので, Chen⁽²⁾の解析解と本結果を比較している. 両者の結果は良く一致している. 本解析の境界残差の rms 値 $\bar{e}=10^{-3}$ であった.

(2) 静止円筒容器内の偏心位置での単独円柱(図9) 図9は, 半径 r の円柱を x 軸方向に $l_0=r_0/4$ だけ偏心させた場合の付加質量係数 C_M を示したものである. この場合の振動方向は x 軸方向である. 比較する他の解析結果はないが, 残差は, $\bar{e}=10^{-3}$ と小さく, 本結果の精度は十分であると考えられる.

3・5 付加質量係数行列 完全流体中で複数の物体が任意方向に振動する系においては, 付加質量に比例する慣性反力ベクトルは行列表現される. 例えば, 二体問題の場合, この慣性反力ベクトルは以下のようになる.

(a) C_M 対 r_0/r

(b) 配置図

図9 円筒容器内の偏心円柱の付加質量係数 C_M
($l_0=r_0/4$)

(a) C_{11} 対 l/r

(b) C_{12} 対 l/r

(c) C_{33} 対 l/r

(d) C_{34} 対 l/r

(e) 配置図

図10 静止円筒容器内の2円柱の付加質量係数行列
($r_0/r=4$)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = -\rho\pi\dot{U}L^2 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ただし、

X_k : 物体 k に働く慣性反力の x 方向成分

Y_k : 物体 k に働く慣性反力の y 方向成分

C_{ij} : 付加質量係数行列の成分

$\dot{u}_k$: 物体 k の加速度の x 成分

$\dot{v}_k$: 物体 k の加速度の y 成分

計算例として、静止円筒容器内で 2 円柱が微小振動する場合を考える(図 10)。

この場合、付加質量係数行列は、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = -\rho\pi\dot{U}r^2 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & C_{34} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(11)$$

独立な行列成分は 4 成分 C_{11} , C_{12} , C_{33} , C_{34} であり、これらを図 10(a)～(d)に示す。

4. 結 論

本論文において以下の結論を得た。

(1) 本解法は、複数の物体が変動流中にある場合や、個々の物体が独立に運動する場合など、種々の場合における二次元の任意形状物体の付加質量係数の近似計算法として有効である。

(2) 本解析は、鏡像法など従来の解析法に比べ、一般性が高く計算が容易である。

文 献

- (1) Dalton, C. and Helfinstine, R. A., Potential Flow Past a Group of Circular Cylinders, *Trans. ASME, Ser. D*, **93**-4(1971), 636.
- (2) Chen, S. S., *Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures*, (1987), 30, Hemisphere.
- (3) Kieda, A. and Yano, H., Approximate Numerical Solutions for Two-Dimensional Potential Flow Problems, *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, **100**(1978), 122.
- (4) Yano, H. and Kieda, A., Approximate Method for Solving Two-Dimensional Low-Reynolds-Number Flow Past Arbitrary Cylindrical Bodies, *J. Fluid Mech.*, **97**-1(1980), 157.
- (5) 村島, 代用電荷法とその応用, (1983), 9, 森北出版.