通気性のあるセイル翼列*
(第1報, 通気性のある平板翼列)村田 暹*¹, 田中周治*¹, 山本富士夫*²Aerodynamic Characteristics of Porous Sails in Cascade
(1st Report, Porous Flat plates in Cascade)

Susumu MURATA, Shuji TANAKA and Fujio YAMAMOTO

A method is presented for the aerodynamic characteristics of the cascade of porous flat plates, which are porous sails with infinitely high tension. In this analysis the authors apply a series of Jacobi's polynomials to express the pressure difference across the membrane. As a result of this numerical analysis, the effects of porosity on the coefficient of interference and the position of the center of pressure are shown in diagrams as functions of solidity and stagger angle. With an increase in the porosity the pressure difference across the membrane increases near the trailing edge, and decreases near the leading edge. As a result, the center of pressure moves back toward the middle point of the chord when the porosity increases.

Key Words: Numerical Analysis, Potential Flow, Cascade, Porous Flat Plate, Jacobi's Polynomials

1. 緒 言

セイル翼は, ヨットの帆, ハンググライダー, 風車などに関連して研究が行われてきた。セイル翼のような可撓性物体では, 物体の形状と圧力分布が未知で, それらが相互に力学的に関連する。

二次元非通気性セイル翼の迎え角が小さい場合については, Voelz⁽¹⁾, Thwaites⁽²⁾, Nielsen⁽³⁾などの線形理論, Vanden-Bloek⁽⁴⁾の完全非線形理論など多くの研究がある。

セイル翼を風車のようなターボ機械に用いる場合には翼列干渉が問題になる。Myallら⁽⁵⁾は二枚セイル翼の干渉を研究し, 村田ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾はセイル翼列の研究を行った。

上述のセイル翼の研究に対して問題になったのは通気性の影響である。通気性単独セイル翼については, Barakat⁽⁸⁾, 村田ら⁽⁹⁾の研究がある。しかしセイル翼列に対する通気性の影響については報告がない。

非通気性セイル翼の前縁近くの渦度分布は, 前縁からの距離の -0.5 乗に比例し, 渦分布を Glauert 級数

や Chebyshev 多項式であらわすことができる。しかし通気性セイル翼の渦分布は前縁からの距離の $-\beta$ 乗に比例し, β は通気性係数に関係する。そこで Jacobi の多項式を用いて渦分布を表示する必要がある。

さてセイル翼の研究に際しては, 平板翼(列)の解析結果を用いて, 無衝突流入時に前縁の特異性が消滅する方法を採用すると有利である⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁹⁾。通気性セイル翼列の研究の基礎となる, 通気性平板翼列を数値解析する方法とその結果についてはいままで報告がないので本報ではこれについて述べる。

2. 基礎式

薄翼直線翼列に対し, 流速 U の一様流が微小迎え角 θ で流入する場合を考える(図1)。翼列ピッチを t , 食違い角を ξ とし, 翼列中の一つの翼の前縁を $(X = -C, Y = 0)$, 後縁を $(X = C, Y = 0)$ とする。各翼の形状を $Y(X)$, 渦分布を $\gamma(X)$, 翼上面下面の圧力差を $\Delta p(X)$ とし, 無次元化のため次のようにおく。

$$X = cx, Y = cy, t = c\bar{t} \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{\gamma}(x) = \frac{\Delta p(x)}{\rho U^2} = \frac{\gamma(x)}{U} \dots\dots\dots (2)$$

ただし ρ は空気密度である。翼透過流速は圧力差 $\Delta p(x)$ に比例するとし, 通気性係数を K とすれば次

* 原稿受付, 平成4年4月2日。

*¹ 正員, 豊田工業大学 (〒468 名古屋市天白区久方 2-12-1)。*² 正員, 福井大学工学部 (〒910 福井市文京 3-9-1)。

の基礎方程式を得る⁽⁷⁾⁽⁹⁾.

$$K\bar{\gamma}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{\gamma}(x_0) F(x_0, x) dx_0 = \theta - \frac{dy}{dx} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$F(x_0, x) = s \times \frac{\cos \xi \sinh\{2s(x-x_0)\cos \xi\} + \sin \xi \sin\{2s(x-x_0)\sin \xi\}}{\cosh\{2s(x-x_0)\cos \xi\} - \cos\{2s(x-x_0)\sin \xi\}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし $s = \pi/\bar{l}$ である.

式(3)は Cauchy 核をもち、積分区間が $[-1, 1]$ である第2種 Fredholm 積分方程式である. Kutta の条件を満足し、前縁で渦度が無限大となる式(3)の解は、前縁と後縁で $(1-x)^\beta(1+x)^{-\beta}$ の特異性を持つ⁽¹⁰⁾.

ただし

$$\cot \pi\beta = 2K \quad \dots\dots\dots (5)$$

である.

3. 平板翼列の数値計算

平板翼列はセイル翼列において張力が無限大である場合に相当し、基礎式(3)で $dy/dx=0$ の場合である. いま式(3)で $\bar{\gamma}(x)/\theta$ をあらためて $\bar{\gamma}(x)$ とおきかえ、積分方程式

$$K\bar{\gamma}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{\gamma}(x_0) F(x_0, x) dx_0 = 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

の数値計算を行う.

いま

$$W(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\beta \quad \dots\dots\dots (7)$$

とし、式(6)の解を次の形におく.

$$\bar{\gamma}(x) = W(x)\phi(x) \quad \dots\dots\dots (8)$$

荷重関数が式(7)である Jacobi の多項式 $P_n^{(\beta, -\beta)}(x)$ の零点を x_k とし

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_n^{(\beta, -\beta)}(x)\phi(x_k)}{(x-x_k)P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

とすれば

$$\phi_n(x_k) = \phi(x_k) \quad \dots\dots\dots (10)$$

を満足する補間式が得られる. ただし $'$ は x による微分を示す.

さて

$$\bar{\gamma}_n(x) = W(x)\phi_n(x) \quad \dots\dots\dots (11)$$

図1 薄翼直線翼列

を $\bar{\gamma}(x)$ のかわりに用いれば、式(6)の左辺は次式のように変形できる.

$$\begin{aligned} I_n(x) &= K\bar{\gamma}_n(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{\gamma}_n(x_0) F(x_0, x) dx_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \phi_n(x_k) F(x, x_k) \frac{1}{P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \frac{W(x) P_n^{(\beta, -\beta)}(x_0)}{x - x_k} dx_0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{\phi_n(x_k)}{(x - x_k) P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)} \times \frac{P_n^{(\beta, -\beta)}(x)}{2\sin \pi\beta} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし上式の誘導には次の公式⁽¹⁰⁾を用いている. すなわち, $|x| < 1$ のとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 W(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t) \frac{dt}{t-x} \\ &= 2KW(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - 2^{-k} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} P_{n-k}^{(\alpha, -\beta)}(x) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$x = -(\alpha + \beta)$$

であるが、ガンマ関数の公式

$$\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \frac{\pi}{\sin \pi\beta}$$

を用い、上式に対し $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow -\beta$ の置換を行って得られる次の公式を式(12)の誘導のために用いている.

$$\begin{aligned} &KW(x) P_n^{(\beta, -\beta)}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{W(t) P_n^{(\beta, -\beta)}(t)}{t-x} dt \\ &= \frac{P_n^{(\beta, -\beta)}(x)}{2\sin \pi\beta} \end{aligned}$$

式(12)の誘導には、

$$\phi_n(x) F(x_0, x) = \sum_{k=1}^n \frac{P_n^{(\beta, -\beta)}(x)\phi(x_k) F(x_0, x_k)}{(x-x_k) P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)}$$

を併用しており、上式と式(9)の $\phi_n(x)$ は $x=x_k$ の点を除いて値が異なり、これが誤差の原因の一つとなるが、後述の厳密解と数値解の比較が示すように本論文の計算方式の誤差は極めて小さい.

さて、 x を $P_n^{(\beta, -\beta)}(x)$ の零点 x_{0m} に選べば式(12)は

$$I_n(x_{0m}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \phi(x_k) F(x_{0m}, x_k) a_k \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる^{(11)~(13)}. ただし a_k は Christoffel 数で、次式で与えられる.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{W(x) P_n^{(\beta, -\beta)}(x)}{x - x_k} dx \\ &= -\frac{\pi}{\sin \pi\beta} \frac{P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)}{P_n^{(\beta, -\beta)}(x_k)} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

したがって積分方程式(6)の解を求めるには、次の連立方程式を解けばよい.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \phi(x_k) F(x_{0m}, x_k) a_k = 1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

さて Jacobi の多項式の数値計算には次の公式⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾を用いた。

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\alpha - \beta}{2} + \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)x \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} & 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &= (2n+\alpha+\beta+1)\{(2n+\alpha+\beta) \\ & \times (2n+\alpha+\beta+2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

また Jacobi の多項式の微係数の計算には次式を用いる。

$$\begin{aligned} & (2n+\alpha+\beta+1)(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &= n\{(\alpha-\beta) - (2n+\alpha+\beta)x\}P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & + 2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

さらに $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ の零点 x_k は次のようにして求める。まず第1近似として

$$x_{k,0} = \cos\left(\frac{2\beta+4k-1}{4n+2}\pi\right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

とし、

$$x_{k,m} = x_{k,m-1} - \frac{P_n^{(\beta, -\beta)}(x_{k,m-1})}{P_n^{(\beta, -\beta)'}(x_{k,m-1})} \quad \dots\dots\dots (22)$$

を用い、収束するまで繰返し計算を行う。また $P_n^{(\beta, -\beta)}(x)$ の零点 x_{0m} は、 $P_n^{(\beta, -\beta)}(x)$ の零点 x_m より次式により求められる。

$$x_{0m} = -x_m \quad \dots\dots\dots (23)$$

4. 揚力係数などの数値計算

式(16)を解いて渦分布を求めれば、次式により揚力係数などを計算できる。揚力係数を C_L とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dC_L}{d\theta} &= \int_{-1}^1 \bar{\gamma}(x) dx = \int_{-1}^1 W(x) \phi_n(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \frac{\phi(x_k) P_n^{(\beta, -\beta)}(x) W(x)}{(x-x_k) P_n^{(\beta, -\beta)'}(x_k)} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \phi(x_k) a_k \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

となる。またモーメント係数を C_M とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dC_M}{d\theta} &= \int_{-1}^1 x \bar{\gamma}(x) dx = \int_{-1}^1 x W(x) \phi_n(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \frac{x_k \phi(x_k) P_n^{(\beta, -\beta)}(x) W(x)}{(x-x_k) P_n^{(\beta, -\beta)'}(x_k)} dx \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \phi(x_k) a_k \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。圧力中心位置は次式で与えられる。

$$C_p = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sum_{k=1}^n x_k \phi(x_k) a_k}{\sum_{k=1}^n \phi(x_k) a_k} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

5. 厳密解との比較

$K=0$, すなわち非通気性の場合には式(6)の厳密解は次式で与えられる⁽¹⁶⁾。

$$\begin{aligned} s &= \frac{\pi}{t} \\ &= \cos \xi \tanh^{-1} \left(\frac{\cos \phi}{\cosh \psi} \right) + \sin \xi \tan^{-1} \left(\frac{\sin \phi}{\sinh \psi} \right) \\ & \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\tan \phi = \tan \xi \tanh \psi \quad \dots\dots\dots (28)$$

上式において、 s と ξ が与えられれば ϕ , ψ が求まり、次式により $dC_L/d\theta$ と C_p の厳密解を求めることができる。

$$\frac{dC_L}{d\theta} = 2 \bar{t} \frac{\cos \phi}{\cos \xi \cosh \psi} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$C_p = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\cos \xi \cosh \psi \ln(\coth \psi)}{s \cos \phi} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

厳密解と本報の数値解(通気性係数 $k=0.0001$, 分割数 $n=10$) による $dC_L/d\theta$ と C_p の値を比較して、表1, 2に示した。上段が数値解, 下段が厳密解である。よく一致することがわかる。

表1 非通気性平板翼列の $dC_L/d\theta$
(上段は数値解, 下段は厳密解)

$t/l \backslash \xi$	0°	30°	45°	60°	70°
0.5	1.9926	2.3035	2.8247	3.9989	5.8434
	1.9925	2.3035	2.8247	3.9980	5.8475
1.0	3.6685	4.2084	5.1069	7.1138	10.246
	3.6686	4.2084	5.1070	7.1139	10.238
1.5	4.6842	5.1970	5.9491	7.2300	8.4445
	4.6843	5.1971	5.9491	7.2303	8.4447
2.0	5.2462	5.6471	6.1684	6.8906	7.4120
	5.2464	5.6471	6.1685	6.8908	7.4121
2.5	5.5689	5.8712	6.2350	6.6854	6.9740
	5.5689	5.8714	6.2351	6.6854	6.9740

表2 非通気性平板翼列の C_p
(上段は数値解, 下段は厳密解)

$t/l \backslash \xi$	0°	30°	45°	60°	70°
0.5	.10857	.11622	.12683	.14424	.16169
	.10856	.11617	.12681	.14400	.16042
1.0	.18072	.19484	.21533	.25124	.29030
	.18072	.19483	.21533	.25124	.29054
1.5	.21245	.22466	.24088	.26470	.28375
	.21245	.22465	.24087	.26469	.28375
2.0	.22711	.23605	.24693	.26070	.26982
	.22710	.23605	.24692	.26070	.26982
2.5	.23475	.24126	.24872	.25743	.26273
	.23475	.24126	.24872	.25743	.26273

表 3 通気性単独平板翼の $dC_L/d\theta$ と C_p
(上段は数値解, 下段は厳密解)

K	β	$dC_L/d\theta$	C_p
0.1	0.4372	5.4936 5.4936	0.2814 0.2814
0.2	0.3789	4.7612 4.7612	0.3106 0.3106
0.3	0.3280	4.1215 4.1215	0.3360 0.3360
0.4	0.2852	3.5842 3.5842	0.3574 0.3574
0.5	0.2500	3.1416 3.1416	0.3750 0.3750
0.6	0.2211	2.7790 2.7790	0.3894 0.3894
0.7	0.1974	2.4810 2.4810	0.4013 0.4013
0.8	0.1778	2.4810 2.4810	0.4013 0.4013
0.9	0.1614	2.0284 2.0284	0.4193 0.4193
1.0	0.1476	1.8546 1.8546	0.4262 0.4262

表 4 渦分布 (上段は数値解, 下段は厳密解)

K=0.2		K=0.4	
x	$\overline{\gamma}$	x	$\overline{\gamma}$
.9895	.2543	.9905	.3403
	.2543		.3403
.9001	.6082	.9032	.6677
	.6082		.6679
.7268	.9234	.7317	.9172
	.9234		.9175
.4858	1.242	.4920	1.148
	1.242		1.149
.1995	1.593	.2065	1.386
	1.593		1.386
-.1054	2.012	-.0983	1.652
	2.012		1.652
-.4005	2.561	-.3939	1.981
	2.561		1.981
-.6583	3.378	-.6528	2.437
	3.378		2.437
-.8547	4.873	-.8509	3.203
	4.873		3.203
-.9714	9.235	-.9696	5.133
	9.235		5.133
-.9962	19.93	-.9955	8.878
	19.93		8.878

図 2 翼列干渉係数

また $\bar{l} \rightarrow \infty$, $s=0$, すなわち単独通気性平板翼の厳密解は次式で与えられる⁽⁸⁾.

$$\bar{\gamma}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\beta} \frac{1}{(K^2 + 0.25) \sin \pi \beta} \dots (31)$$

$$\cot \pi \beta = 2K \dots (32)$$

$$\frac{dC_L}{d\theta} = \frac{\pi \beta}{(K^2 + 0.25)(\sin \pi \beta)^2} \dots (33)$$

$$C_p = (1 - \beta)/2 \dots (34)$$

厳密解と本報の数値解 ($l/t = 0.0002$, $\xi = 0^\circ$, $n = 10$) を比較し表3に示した。上段は数値解, 下段は厳密解である。両者は完全に一致している。

また, 式(31)の渦分布の厳密解と, 本報の数値解とを比較し表4に示した。 $\bar{l} = 10^4$, $\xi = 0^\circ$ で分割数 $n = 20$ にとった。上段は数値解, 下段は厳密解である。

6. 通気性平板翼列の特性

式(16), (24), (26)を用いれば, 揚力係数, 圧力中心位置を求めることができる。式(33)の単独通気性平板翼の揚力係数を C_{L0} とし, 式(24)の通気性平板翼列の揚力係数を C_L とし, 翼列干渉係数 K_i を

$$K_i = \frac{C_L}{C_{L0}}$$

であらわし, K_i を食違い角 ξ , 節弦比 t/l , 通気性係数 K の関数として図2(a)~(e)に示した。

また圧力中心位置 $C_p(\xi, t/l, K)$ を図3(a)~(e)に示した。

また節弦比 $t/l = 1$, 食違い角 $\xi = 45^\circ$ の翼列の通気性係数 K の渦分布に及ぼす影響を, 分割数 $n = 20$ で数値計算して図4に示した。

図3 圧力中心位置

図4 渦分布 ($t/l=1$, $\xi=45^\circ$, $n=20$)

7. 結 論

通気性セイル翼解析の基礎として、通気性平板翼列の翼面渦分布を Jacobi の多項式を用いて表示し、線形理論を用いて翼特性を解析した。非通気性平板翼列 ($K=0$)、通気性単独平板翼 ($\bar{t} \rightarrow \infty$) の厳密解と、本報の数値計算の結果はよく一致した。

数値解析の結果、次のことがわかった。通気性係数 K が大きいと、食違い角が大きい $\xi=80^\circ$ 近くでは干渉係数 K_i は低下し、食違い角が小さい $\xi=0^\circ$ 近くでは K_i は増大し、食違い角による K_i の変化量が減少する。

t/l が大きい場合には圧力中心位置 C_p は、単独翼と同様通気性係数 K が増大すると $K=0$ の場合の 0.25

から 0.5 に近づき、圧力の作用点は翼弦中点に近づく。また、通気性係数 K が大きいと、干渉係数 K_i と同様、食違い角による C_p の変化量が減少することがわかる。

また通気性が大きになると、翼上面下面の圧力差は翼後縁で増大し、前縁で減少する。このため通気性係数が大きになると圧力の作用点は翼弦中点に近づく。

文 献

- (1) Voelz, K., *Z. Angew. Math. Mech.*, **30**-10(1950), 301.
- (2) Thwaites, B., *Proc. Soc., Ser. A*, **261**(1961), 402.
- (3) Nielsen, J. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **30**-3(1963), 435.
- (4) Vanden-Bloeck, J. M., *Phys. Fluids*, **25**-3(1982), 420.
- (5) Myall, J. O., ほか1名, *Proc. Soc., Ser. A*, **310**(1969), 373.
- (6) 村田・田中, 機論, **56**-524, B(1990), 1036.
- (7) 村田・田中, 機論, **56**-527, B(1990), 1992.
- (8) Barakat, R., *J. Math. Phys.*, **47**(1968), 327.
- (9) Murata, S. and Tanaka, S., *J. Fluid Mech.*, **206**(1989), 463.
- (10) Erdogan, F., ほか2名 (Shi, G. C., ed.), *Method of Analysis and Solution of Crack Problems*, Noordhoff, (1973), 368.
- (11) Белоцерковский, С. М., ほか1名, Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, Наука Ф. М. (1985).
- (12) 村田・田中, 機械の研究, **38**-6(1986), 687.
- (13) 村田・田中, 機械の研究, **38**-7(1986), 797.
- (14) 戸田, 特殊関数, (1981), 朝倉.
- (15) 大槻訳, 数学大公式集, (1982), 丸善.
- (16) 村田, 機論, **22**-177(1961), 666.