液体金属の水平円管内自然・強制複合対流の数値解析*

王 煤^{*1}, 辻 俊博^{*2}, 長野靖尚^{*2}Numerical Analysis of Combined Free and Forced Laminar Convection
of Liquid Metals in a Horizontal Pipe

Mei WANG, Toshihiro TSUJI and Yasutaka NAGANO

Numerical analysis has been conducted for combined free and forced laminar convection of liquid metals in a horizontal pipe which is isothermally heated from a certain axial location. The steady-state solutions have been obtained in consideration of axial conduction for Péclet numbers of 0.3~7.5 and Rayleigh numbers of 15~500. The results reveal marked effects of axial conduction on the flow and heat transfer characteristics of liquid metals. At the entrance to the heated section, the secondary flow has already developed and a reverse flow occurs near the pipe top as the buoyancy effect becomes large. Consequently, the circumferential average Nusselt number decreases with increasing secondary flow in comparison with that observed in moderate and large Prandtl-number flows. The regime of reverse flow is clearly identified in the Pe-Ra coordinates.

Key Words: Pipe Flow, Heat Transfer, Numerical Analysis, Combined Free and Forced Convection, Liquid Metal, Entrance Region

1. 緒 言

水平円管内の自然・強制複合対流の問題について、これまでいくつかの数値解析が行われている。Ou-Cheng⁽¹⁾は、壁温一定の温度助走区間における自然対流の影響を解析しているが、プラントル数が大きい流体を対象に運動量方程式の慣性項を省略しているため、気体および低プラントル数流体にこの結果を適用することはできない。そこで、菱田らは空気を想定し、速度と温度が同時に発達する助走区間の複合対流について、壁温一定⁽²⁾⁽³⁾と熱流束一定⁽⁴⁾の条件で厳密な数値解を求め、発生する二次流れと温度場に対するその影響を明らかにした。また、Chou-Hwang⁽⁵⁾は気体と液体を対象に、軸方向のある断面から熱流束一定で加熱を開始する温度助走区間について、運動量方程式の慣性項を考慮した数値解析を行っている。(ただし、彼らの解析では数値計算を容易にするため、軸方向の粘性拡散と熱伝導は無視されている)。したがって解析は、これまでプラントル数が比較的大きな流体に限ら

れ、液体金属のような低プラントル数流体についてはあまり行われていない。

液体金属が、実際に原子炉などの高熱負荷冷却あるいはコンパクト熱交換器の作動流体として使用されるため、低プラントル数流体に関するこの問題の解析は工学的に有意義である。本研究は、この液体金属を対象にして、発達した速度場で軸方向のある断面から壁温一定で加熱する温度助走区間の数値解析を行い、その流動と伝熱特性を明らかにしたものである。

2. 記 号

Gr : グラスホフ数 $= g\beta(t_w - t_0)r_0^3/\nu^2$

g : 重力の加速度

h_ϕ : 局所熱伝達率

Nu_ϕ : 局所ヌッセルト数〔式(20)〕

$\overline{Nu}$: 管断面の平均ヌッセルト数〔式(22)〕

P : 無次元圧力〔式(17)〕

Pe : ペクレ数 $= RePr$

Pr : プラントル数

p : 無次元圧力〔式(7)〕

p' : 圧力

Ra : レイリー数 $= GrPr$

Re : レイノルズ数 $= 2r_0 u_0'/\nu$

* 原稿受付 平成4年5月1日。

^{*1} 正員, 名古屋工業大学大学院(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

^{*2} 正員, 名古屋工業大学。

r, ϕ, x : 無次元円筒座標 [式(7)]

r', ϕ, x' : 円筒座標

r_0 : 管半径

t' : 流体温度

t'_0 : 流体の初期温度

t'_w : 壁温

U, V, W : 無次元速度成分 [式(8)]

u, v, w : r, ϕ, x 方向の無次元速度成分 [式(7)]

u', v', w' : r', ϕ, x' 方向の速度成分

w_0 : x' 方向の平均速度

β : 体膨張係数

θ : 無次元温度 [式(7)]

θ_0 : 無次元混合平均温度 [式(21)]

λ : 熱伝導率

μ : 粘性係数

ν : 動粘性係数

ξ : 軸方向の無次元座標 [式(9)]

ρ : 密度

τ : 無次元時間 [式(7)]

$\tau_{w\phi}$: 壁面せん断応力 [式(19)]

τ' : 時間

3. 基礎方程式および境界条件

図1に示すように、上流側($x' < 0$)は断熱され、下流側($x' \geq 0$)は一様温度 t'_w で加熱されている水平円管内の流動について、軸方向の熱伝導の影響を考慮に入れて解析する。加熱開始点($x' = 0$)から遠く離れた上流側の位置で、流体の速度分布は十分発達(放物分布)し、そこでの温度を一定温度 t'_0 とする。流動と伝熱を支配する、連続の式、運動量方程式およびエネルギー方程式はそれぞれ、Boussinesq 近似を仮定して次のように表される。

連続の式

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad (1)$$

図1 座標および記号

運動量方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left(U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} + W \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - \frac{U^2 + V^2}{r} \right) \\ = -\frac{r}{2} \left(\frac{Re}{2} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial r} + \nabla^2 U - \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ - Gr r \theta \cos \phi \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left(U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + W \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{Re}{2} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nabla^2 V - \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ + Gr r \theta \sin \phi \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left(U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi} + W \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - \frac{UW}{r} \right) \\ = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \nabla^2 W - \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r^2} \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

熱エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \left(U \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + W \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ + \left(\frac{2}{Re} \right)^2 \left\{ \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{d^2 \xi}{dx^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、式(1)~(6)の変数は次のように無次元化され、

$$\left. \begin{aligned} \tau &= (\tau' w_0 / r_0) (2/Re), \quad x = (x' / r_0) (2/Re) \\ r &= r' / r_0, \quad u = (u' / w_0) (Re/2) \\ v &= (v' / w_0) (Re/2), \quad w = w' / w_0 \\ \theta &= (t' - t'_w) / (t'_0 - t'_w), \quad p = p' / (\rho w_0^2 / 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (7)$$

数値解の収束の安定および加熱開始点から軸方向に遠く離れた位置での境界条件を適用するために、以下の変数変換が施されている⁽²⁾。

$$U = ru, V = rv, W = rw \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} -\infty \leq x < 0: \quad \xi = 1/(1-30x) - 1 \\ 0 \leq x \leq \infty: \quad \xi = 1 - 1/(1+30x) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、圧力に関するポアソン方程式は、式(1)~(4)から次のように導かれる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = -2 \left(\frac{2}{Re} \right)^2 \left\{ \frac{1}{r} \left(U \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial D}{\partial \phi} \right. \right. \\ \left. \left. + W \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - \frac{UD}{r} \right) - \nabla^2 D + \frac{2}{r} \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{D}{r^2} \right\} \\ + Gr \left(\cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial r} - \sin \phi \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 + \frac{U^2 + V^2}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \left(U \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U^2 + V^2}{r} \right) \right. \\ \left. - \frac{2W}{r} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial V}{\partial r} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{\partial W}{\partial r} \Big] \dots\dots\dots (10)$$

ここで,

$$D = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \dots\dots\dots (11)$$

境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} \xi = -1, 0 \leq r < 1: \\ w = W/r = 2(1-r^2), \\ (\partial p / \partial \xi)(d\xi/dx) = -16 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U = V = 0 \\ \theta = 1 \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1, 0 \leq r < 1: \\ w = W/r = 2(1-r^2), \\ (\partial p / \partial \xi)(d\xi/dx) = -16 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U = V = 0 \\ \theta = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \xi < 0, r = 1: U = V = W = 0, \partial \theta / \partial r = 0 \\ \partial p / \partial r = 2(2/Re)^2 (\partial^2 U / \partial r^2 - \partial U / \partial r - Gr \theta \cos \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \xi \leq 1, r = 1: U = V = W = 0, \theta = 0 \\ \partial p / \partial r = 2(2/Re)^2 (\partial^2 U / \partial r^2 - \partial U / \partial r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1, 0 \leq r \leq 1, \phi = 0, \pi: V = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ただし, 式(16)は管断面の半分の領域(流動と伝熱が管中心を通る鉛直面について対称である)を解析するために導入したものである。式(8), (9)の変換によって $x = \pm \infty$ の領域まで解析の対象となっている。そこで, 有限な値として圧力の解を得るため,

$$P(r, \phi, x) = p + 16x \dots\dots\dots (17)$$

で定義する圧力を用いることにする。この変換によって, 式(12), (13)の圧力に関する境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} \xi = -1, 0 \leq r < 1: \partial P / \partial \xi = 0 \\ \xi = 1, 0 \leq r < 1: \partial P / \partial \xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

のように変換される。なお, 境界条件(14), (15)は単に p を P に置き換えたもので表される。

4. 数値計算結果および考察

基礎方程式を, 対流項について風上差分, 時間進行について修正オイラー法およびクランク・ニコルソン法を適用して差分化した。また, 導関数として与えられる圧力の境界条件については, Miyakoda の方法⁽⁶⁾を用いて差分化を行った。流動と伝熱が管中心を通る鉛直面について対称であるため, 管断面の半分の領域に計算格子点を設け, SOR 法を用いて時間依存する離散化方程式の定常解を求めた。格子点数については, 従来の数値解析⁽²⁾⁽³⁾を参考に, $26 \times 27 \times 51(r, \phi, \xi)$ とした。また, 解の収束判定は最大相対誤差が 10^{-5} 以下になるようにした。計算条件の範囲は, 液体金属を対象に, $Pr = 0.003, 0.007, 0.025, Re = 100, 200, 300$ および $Gr = 3\,000 \sim 20\,000$ の組合せで得られる, $Pe = 0.3 \sim 7.5$ および $Ra = 15 \sim 500$ である。計算には

TITAN 3000 を使用した。

4・1 速度分布 鉛直断面における軸方向の速度分布の変化を図2に示した。初め放物形 velocity 分布が, 加熱開始点に近づくにつれて浮力の影響で次第に非対

(a) $Pe = 2.5, Ra = 125$

(b) $Pe = 2.5, Ra = 500$

(c) $Pe = 0.7, Ra = 35$

(d) $Pe = 0.7, Ra = 140$

(e) $Pe = 0.3, Ra = 60$

図2 軸方向速度分布の変化

称となり、最大速度の位置も管中心から下方に移動する。そして下流で、流体と管壁の温度差が小さくなるとともに浮力の影響が小さくなり、再び放物形速度分布に近づいていく。浮力が大きい場合、図2(b), (d), (e) (いずれの図も $Re=100$, $Gr=20\,000$) に示すように、管の上側の部分で逆流が顕著になり、逆流の発生する領域も加熱開始点のかなり上流まで及ぶようになる。

図3は、液体金属に対する軸方向流れの計算結果について、後述する局所壁面せん断応力の正負を根拠に、逆流発生の有無を調べたものである(白抜き記号の計算条件において逆流が発生する)。逆流の発生は、主に Re と Gr の条件によって左右されるが、 Pr にもわずかながら依存する。そのため、整理には Pe と Ra の座標を用いた。図3は、 Re , Gr , Pr のいずれか二つのパラメータを固定して他のパラメータを変化させた場合の整理結果であり、逆流発生の有無をこの座標を用いて明確に区分できることを示している。破線(対数

図3 逆流の発生限界

(a) $Pe=2.5$, $Ra=125$ (b) $Pe=2.5$, $Ra=500$

図4 管断面内での二次流れ $\xi=0.08(x'/r_0'=0.145)$

グラフ上でほぼ直線)が、本解析結果から予測される逆流の発生限界である。このように液体金属を作動流体とする熱交換器では、条件によって逆流が発生し、後述のような局所熱伝達率の低下を招くことがあるので注意を要する。

加熱開始直後の管断面における二次流れを、速度成分 u と v で作られるベクトルとして図4に表した[ただし、ベクトルの大きさは、図2に示した軸方向速度 w の値に比べ、式(7)の定義において相対的に $(Re/2)$ 倍大きくなっている]。 Ra が比較的小さい図4(a)では、流体が管壁に沿って上昇し、管断面の中心部で下降する二次流れが発生するが、浮力の影響が大きく軸方向に大きな逆流が現れる場合には、図4(b)に示すように、管断面全体で強い二次流れが生じ、管の上部と下部(管壁近く)に二つの渦が現れる複雑な流れパターンとなる。

4.2 温度分布 鉛直断面における温度分布の軸方向変化を図5に示した。横軸の目盛は、軸方向の位置と温度の基準点($1-\theta=0$)を表している。低プラントル数の液体金属では、軸方向への熱伝導が顕著であり、その影響が加熱開始点からかなり上流の領域まで及んでいる。そして、 $\xi=-0.56\sim 0.56(x'/r_0'=-2.12\sim 2.12)$ の領域では、自然対流の発生による二次流れの影響で温度分布は上下非対称となる。図5(b)に示すように、 Ra が大きいほど流体の最低温度はより下方に位置するようになり、加熱開始点上流では上下管壁の温度差も増大する。

大きな二次流れが発生している加熱開始直後の温度

(a) $Pe=2.5$, $Ra=125$

(b) $Pe=2.5$, $Ra=500$

図5 温度分布の軸方向変化

分布と速度分布を比較するため、等温線と等軸方向速度線を求めて図6に表した。空気($Pr=0.71$)については、温度と速度がほぼ相似な分布となるが⁽²⁾、液体金属では図6に示すように管の上側の速度分布に逆流域が現れ、その相似性が失われている。浮力の効果が大きくなると、図6(b)のように逆流する領域が管中心近くまで及ぶようになり、管の下側の軸方向速度が増大する。

4.3 壁面せん断応力および熱伝達率 次式で無次元化した、局所壁面せん断応力 $\tau_{w\phi}$ の軸方向分布を図7に表した。

$$\tau_{w\phi} = -\mu(\partial w'/\partial r')_{r'=r_b, \phi} / (\rho w_b'^2/2) \\ = -(4/Re)(\partial w/\partial r)_{r=1, \phi} \dots\dots\dots (19)$$

軸方向の流れは、図2に示したように、二次流れの影響によって管の上側で減速、管の下側では加速される。そのため、局所壁面せん断応力は二次流れの最も強い加熱開始点近くの管上部($\phi=0$)で最小値をとり、管下部($\phi=\pi$)で最大値をとる。浮力の影響が大きい場合には、加熱開始点から遠く離れた上流と下流におけるポアズイユ流れの $\tau_w Re = 16$ に比して、それらの値

(a) $Pe=2.5, Ra=125$ (b) $Pe=2.5, Ra=500$ 図6 等温線および等速度線 $\xi=0.08(x'/r'_0=0.145)$

はかなりかけ離れたものになっている。また、逆流が発生し、管上部の壁面せん断応力が負になる領域も拡大する。

次式で与えられる局所ヌッセルト数の軸方向変化を図8に表した。

$$Nu_\phi = 2r'_0 h_\phi / \lambda = -(2/\theta_b)(\partial \theta / \partial r)_{r=1, \phi} \dots\dots (20)$$

ここで、 θ_b は次の無次元混合平均温度である。

$$\theta_b = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \theta w r d\phi dr / \int_0^1 \int_0^{2\pi} w r d\phi dr \dots\dots (21)$$

液体金属では軸方向熱伝導の影響が大きく、加熱開始点ではすでに二次流れが強くなっている。そのため

(a) $Pe=2.5(Pr=0.025)$ (b) $Pe=0.7(Pr=0.007)$ (c) $Pe=0.3(Pr=0.003)$

図7 局所壁面せん断応力

図 8 局所ヌッセルト数 $Pe=2.5 (Pr=0.025)$

に局所熱伝達率は、管の上部($\phi=0$)で最小、下部($\phi=\pi$)で最大となり、浮力の影響が強いほどその差異は大きくなる。特に逆流の発生する管上部の熱伝達率はかなり低下する。二次流れの衰退とともに、十分下流では純強制対流に対する値にすべて収束していく。この収束値は、 Pe が比較的大きい流体については $Nu=3.66$ であるが、液体金属のように Pe が小さい流体では、 Pe に依存してそれより若干大きくなる。一般に、軸方向熱伝導の影響を考慮した純強制対流の解析については、 Pe が小さくなるとともに $Pe \rightarrow 0$ の極限值 $Nu=4.18$ まで増加することが知られている⁽⁷⁾。

図 9 は、次式で定義した管断面の平均ヌッセルト数の軸方向変化を示したものである。

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu_\phi d\phi \quad \dots\dots\dots (22)$$

軸方向の熱伝導の影響で、加熱開始点ではすでに流体温度がかなり上昇しているために、加熱開始直後の平均ヌッセルト数は空気の場合⁽²⁾ ほど大きくならない。また、浮力の増大で二次流れが強いほど、気体および液体については平均ヌッセルトが増加する傾向にあるが⁽²⁾⁽⁵⁾、液体金属の平均ヌッセルト数は逆に減少する。これは、大きな逆流の発生で、管上部の局所熱伝達率が図 8 に示したように極端に低下することに起因している。

5. 結 言

液体金属を想定して、低プラントル流体を壁温一定で加熱する水平円管内の温度助走区間について数値解析を行った。本研究で得られた結果は以下のように要約される。

(1) 軸方向の熱伝導の影響が大きく、加熱開始点ではすでに浮力の効果による二次流れが発生し、鉛直断面の軸方向速度分布および温度分布は非対称となる。

(a) $Pe=2.5 (Pr=0.025)$ (b) $Pe=0.7, 0.3 (Pr=0.007, 0.003)$

図 9 断面の平均ヌッセルト数

(2) 浮力が大きくなると、管の上側の部分で軸方向流れに顕著な逆流が発生し、逆流の発生する領域も加熱開始点のかなり上流まで及ぶようになる。この逆流の発生の有無は、 Pe と Ra の座標において明確に区分される。

(3) 軸方向に大きな逆流が発生する場合、管断面全体で強い二次流れが生じており、管の上部と下部(管壁近く)に二つの渦が現れる。

(4) 壁面せん断応力は、加熱開始点近くの管下部で最大、管上部で最小(逆流が発生する場合は負の値)となる。

(5) 大きな逆流が発生する場合、管上部の局所熱伝達率の低下は著しい。そのために、平均ヌッセルト数は浮力の影響が大きいほど減少する。

文 献

- (1) Ou, J. K. and Cheng, K. C., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **20** (1977), 953.
- (2) 菱田・長野・Montesclaros, 機論, 48-431, B(1982), 1321.
- (3) Hishida, M., Nagano, Y. and Montesclaros, M. S., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **104**(1982), 152.
- (4) 菱田・長野・相木, 機論, 50-457, B(1984), 2171.

- (5) Chou, F. C. and Hwang, G. J., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **31**(1988), 1299. Hermosa.
- (6) Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics*, (1976), (7) Michelsen, M. L. and Villadsen, J., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **17**(1974), 1391.
-