粘弾性流体の二次流れの計算における線形化の試み*

前 田 武 夫*¹A Linearization for Secondary Flow Simulation
of Viscoelastic Fluid

Takeo MAEDA

For a translational symmetric case, the change rate of an elastic stress is approximated by the spin term alone. The contribution of the derived elastic stress to the momentum equation is decoupled from a velocity component in each coordinate. Then, the body force caused by the elastic stress is approximated by a linear source term within an iteration loop. The following cases are demonstrated: (1) a square duct, (2) a lid driven swirl flow in a cylinder, (3) a free surface movement of coaxial rotating cylinders.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Non-Newtonian Fluid, Viscoelastic Fluid, Constitutive Equation, Secondary Flow, Swirling Flow, Finite Volume Method

1. ま え が き

粘弾性流体では法線応力効果により、図1のごとく粘性流体では発生し得ない二次流れが生じたり⁽¹⁾、図2のように粘性流体とは定性的にも異なる特異な現象が現れる⁽²⁾。粘弾性流体の構成方程式には、弾性応力の変化率の項が加わる^{(1)~(6)}。このため、独立自由度として、流速と応力の両方を採用する混合法が用いられてきた^{(4)~(6)}。この方法を、既存の Navier-Stokes コードを拡張して適用することは困難である。

本文では粘弾性流体の法線応力効果に伴う二次流れの計算において、

- (1) 並進対称系 (translational symmetry)
- (2) 二要素マックスウェル・モデル
- (3) 定常問題

に対象を限定して、非線形性への対応を試みる。

ここで、並進対称とは、

- (1) 無限長ダクトにおける十分に発達した流れ
- (2) 軸対称 (回転対象) 系におけるスワール流れ

のごとく、主流方向に状態量に変化しない系を言う。

この場合、弾性応力の移流項の中、主流方向の成分は零となる。さらに、弾性応力のスピンに伴って発生する法線応力はせん断面に直交する性質により、連成成分が線形化でき、構造格子においては運動方程式の成分分離計算が可能となる。すなわち、スピンに伴う非線形項は、着目する流速成分の反復ループ中では見掛け上、定数であり運動方程式の左辺の係数行列ではなく、右辺のソース項に含めることができる。この方法では上記の混合法を用いる必要がない。

本文は、この線形化法を用いて、

- (1) 正方形管の二次流れ
- (2) 回転板駆動のスワールに伴う二次流れ
- (3) 回転二重円筒内のスワールに伴う液面移動の計算例を示す。

2. 主 な 記 号

ρ : 密度

μ : 粘性係数

λ : 緩和時間

P : 圧力

u : 流速ベクトル

d : 変形速度テンソル

ω : スピンテンソル

* 原稿受付 平成4年5月18日。

*¹ 正員, (株)CRC 総合研究所 (〒261-01 千葉市美浜区中瀬 1-3-D 16)。

σ : 偏差応力テンソル

$\dot{\sigma}$: 応力テンソルの変化率

$[N]$: 移流行列

$[K]$: 拡散行列

$[C_F]$: こう配行列

太字記号についての混乱を避けるため、ベクトルには $\{u\}$ のごとく $\{ \}$ を、テンソルには $[\sigma]$ のごとく $[\]$ を付けて区別するが、自明の場合は括弧を略す。

3. 数値解析法

3.1 基礎方程式の線形化 変形速度テンソルと、スピントテンソルを次式で定義する。

$$d = \frac{1}{2}[(\nabla u) + (u\nabla)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\omega = \frac{1}{2}[(\nabla u) - (u\nabla)] \quad \dots\dots\dots (2)$$

二要素マックスウェル模型による粘弾性流体の構成方程式は、次式で表される⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。

$$\sigma + \lambda \dot{\sigma} = 2\mu d \quad \dots\dots\dots (3)$$

第2項の $\dot{\sigma}$ は、 σ に関する変化率であり、通常 Oldroyd 微分、または次式の Jaumann 微分が用いられる。

$$\frac{J\sigma}{Jt} = \frac{D\sigma}{Dt} + (\omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3)の非線形項の処理に、初期応力法が用いられたことがあった⁽³⁾。初期応力法には問題点が二つある。第1点は、非線形性の強い系においては発散しやすい。第2点は、応力に関する境界条件を運動方程式のソース項で対処する必要がある⁽⁴⁾。式(4)中の空間微分 $(u \cdot \nabla)\sigma$ の存在のため、粘弾性流体の離散化に際し、新たに必要なる境界条件である⁽⁴⁾。第2の問題点に対する具体的な解決法は、見いだせていない。以上から粘弾性流体の一般的な問題には、初期応力法は実際には適用が困難である。

本文では、図1と図2で示される粘弾性流体特有の現象の模擬を目的として、計算の対象を並進対称系に限定する。この場合、主流方向への移流項の寄与はな

く、スピンに関する項が重要であるため、 σ として式(4)の Jaumann 微分を採用する。

図1は、富田の展望論文⁽¹⁾に紹介された、正方形管内の二次流れの実験結果⁽⁸⁾である。この問題について、主流方向を z 、直交断面を $x-y$ 平面に採り、次式の Lagrange 微分の各項について考える。

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)において、

(1) 第1項は、定常計算の前提条件により零、

(2) 二次流れの流速は、主流速度に比べて著しく小さい⁽¹⁾。したがって、第2項は式(4)のスピンに関する項に比べて無視できる。

(3) 第3項は、並進対称系の前提条件により零、の性質がある。すなわち、応力変化率 $\dot{\sigma}$ は次式で近似できる。この仮定が本文の要点である。

$$\dot{\sigma} = (\omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega) \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)に $(u \cdot \nabla)\sigma$ の項はなく、前述の初期応力法に関する第2の問題点は回避できる。

ここで、第2法線応力差が零という Weissenberg の仮定⁽⁹⁾を用いる。この要旨は、「せん断面の第2法線方向の二次応力効果は無視できる」ということである。具体的には、式(6)の成分について、 $\omega_{xz}(\sigma_{xz} + \sigma_{zx})$ または、 $\omega_{yz}(\sigma_{zy} + \sigma_{yz})$ などに比べて $(\omega_{xz}\sigma_{zy} + \omega_{yz}\sigma_{zx})$, $\omega_{xz}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})$, $\omega_{yz}(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$, $\omega_{yz}\sigma_{yx}$, $\omega_{xz}\sigma_{yz}$ が無視できることを意味する。

すなわち、式(6)の右辺は対角行列となり、応力テンソルは対称となる。さらに、二次流れは主流に比べて弱く⁽¹⁾、対角成分の $\omega_{xy}\sigma_{xy}$ は $\omega_{xz}\sigma_{xz}$, $\omega_{yz}\sigma_{yz}$ に比べ

図1 二次流れの可視化実験 (富田⁽¹⁾)

図2 法線応力効果による特異現象 (富田⁽²⁾)

で無視できる。式(6)の右辺を成分で表し、ここで特に σ を T_G と書けば、

$$[T_G] = 2 \begin{bmatrix} (\sigma_{xz}\omega_{xz}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{yz}\omega_{yz}) & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma_{xz}\omega_{xz} + \sigma_{yz}\omega_{yz}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。さらに、並進対称条件

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

から、

$$\omega_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right), \omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

であり、式(9)を用いて式(7)を離散化すれば、

$$[T_G][G]\{u\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{uw} \\ 0 & 0 & G_{vw} \\ G_{wu} & G_{wv} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

の形式になる。ここで $[G]$ は構造力学の有限変形解析で、「幾何剛性行列」⁽¹⁰⁾と呼ばれている項に相当する。式(10)は、主流直交断面 (x - y 断面) における二次応力は主流方向流速成分 w のみに依存することを示す。二次流れが主流に及ぼす影響は非常に小さい⁽¹⁾。したがって、 x - y 断面の流速成分 (u , v) について反復を行う際は、流速成分 w に関係する項の連成を断つことができる。これにより、初期応力法の第1の問題点は回避できる。

以上から、反復のカウンタ n を付けて式(3)の構成方程式を書き直せば、

$$\sigma_{n+1} = 2\mu d_{n+1} - \lambda [T_G]_n \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。式(11)を次式の運動方程式、

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \sigma \quad \dots\dots\dots(12)$$

に代入して離散化すれば、

$$[N+K]\{u\}_{n+1} = -[C_P]\{P\} - \lambda [C_P][G]\{u\}_n \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。ここで $[C_P]\{P\}$ は、式(12)の圧力こう配項を離散化した項である。式(13)の非線形ソース項は1スウィープ前の流速で評価するため、既存の Navier-Stokes 方程式のコードで対応できる。著者のコードは SIMPLE 法であるため、 $\{P\}$ は $(n+1)$ で評価している。

4. 計 算 例

数値計算プログラムは、Patankar の著書⁽⁷⁾に準拠している。すなわち、空間の離散化はスタガード配置の有限体積法であり、連続条件と圧力補正の関係は、完全陰解法の SIMPLE 法である。移流項には、一次上

流差分を用いた。

4.1 正方形管の二次流れ 図3は図1に対応する計算である。用いた物性値、規定流速は、仮定の体系であり、数値は $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\bar{w} = 10 \text{ m/s}$, $\mu = 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\lambda = 10 \text{ s}$, $a = 1 \text{ m}$ である。断面内流速の最大値は、主流速度の10%以内である。図3の二次流れのパターンと方向は図1の実験結果と一致している。このパターンは乱流による場合⁽¹²⁾と似ているが、方向が逆転している。粘弾性流体に固有の性質である。この流れのパターンは、流線が主流方向にスパイラルを描くことを示す。

後述のケースと統一を取るため、Weissenberg 数の定義に主流速度を用いれば、 $We = \lambda \bar{w}/a$ は極めて大きい数値となる。

4.2 回転板駆動のスワールによる二次流れ 図4は、図2(c), (d)に対応する。この場合は、周方向が主流方向である。コンタラインはスワール流の大きさを示す。角速度 Ω は 10 rad/s 、回転筒半径 r は 0.2 m に固定し、緩和時間 $\lambda(\text{s})$ をパラメータとした。 ρ と μ は4.1節の値と同じである。図4中のベクトルの大きさは、各図の矢印の長さが、図下の数値になるようにオートスケールしてプロットした。また、コンタはスワール速度最大値 $\Omega_r = 2.0 \text{ m/s}$ と最小値零の間を10等分してプロットした。二次流れの方向は、図2に一致する。文献(2)では、図2(d)の二次流れの方向が粘弾性流体の場合に逆転する理由は記されていないため、本文で説明を試みる。図4のコンタにより、中心軸から径方向に離れるにしたがい、スワール速度の鉛直方向へのこう配が大きくなることがわかる。したがって、外壁に近づくほど、回転板直下のせん断力は強

図3 直交断面内二次流れ

くなり、これに伴う回転板方向の法線応力は強くなる。断面内の法線応力の分布は、図5と考えられる。これにより、中心軸方向へ向かう二次流れが生じる。この場合の Weissenberg 数の定義に議論はあるが、筒半径と最大スワール速度を用いれば、

$$We = \lambda u/r = \lambda \times r\Omega/r = \lambda\Omega \dots \dots \dots (14)$$

となり、大きな値である。

4.3 回転二重円筒内の液面移動 図6は、図2(a), (b)に対応する。円筒半径は外筒半径の1/10である。内筒のみを回転した。外筒寸法および物性値は4.2節と同じである。移動界面の追跡法は、次の簡易な方法で行った。

(1) 液面位置は、格子の水平線に沿って上下させる。

(2) 隣接要素との液面の差は、2メッシュを超えない。

この方法は、(1)の理由により、差分メッシュは、フルブロックかフルスルーであり、界面は階段状である。中間状態がないため、計算途中、液面は上下に交番し、解が振動することがある。また、(2)の理由により、メッシュ分割が粗い場合、液面の動きを拘束する。以上により、液面形の解像度は悪く、図6の計算について定量的な議論はできない。しかし、定性的には、図2(a), (b)を模擬できた。非線形性の強い問題が、本

文で提案した線形化法により対応し得ることが言える。

5. む す び

本文で提案した線形化法で用いた仮定は、

(1) 弾性応力の Lagrange 微分項の省略

(2) 二次流れが主流に及ぼす影響の無視

(3) 第2法線応力に関する Weissenberg の仮定である。第1, 第2の仮定は、ほぼ問題なく成立する。第3の仮定は、実験結果によれば必ずしも成立するとは言えないが⁽⁹⁾、文献(11)では「あまりくわしいことをいわずに限り」と限定して認めている。仮定(3)を認めない場合でも、式(6)の非対角成分の連成は弱く⁽¹¹⁾⁽¹³⁾、ソース項として処理できる。これは、幾何剛性行列を、point Jacobi 法で解くことに相当する。

以上により、適用範囲は並進対称系に限定している

図5 鉛直方向法線応力分布

(a) $\lambda=0$

(b) $\lambda=1$

(c) $\lambda=3$

(d) $\lambda=10$

図4 回転板駆動円筒内二次流れ

(a) $\Omega=50, \lambda=0$

(b) $\Omega=10, \lambda=0$

(c) $\Omega=10, \lambda=1$

(d) $\Omega=10, \lambda=25$

図6 回転二重円筒内液面変化

が、初期応力法による非線形問題への対応の可能性を示した。

本文の解法は、非線形ソースの成分の連成を断つことにより、各成分単位では線形問題となることを利用している。したがって、非線形性による解の発散は抑制されるが、 λ が大きい場合、係数行列の安定性の悪い系となる。文献(14)の疑似切片法による緩和は、この問題の一つの対応策であるが、緩和が過剰の場合、物理的に不合理な解が得られた。この意味で本法の適用できる We 数に上限がある。また、液面移動の定常問題に関しては、精度の良い計算を行うためには解適合格子 (adaptive grid) を用いる必要がある。これらの定量的な問題の検討は今後の研究課題としたい。

文 献

- (1) 富田, 非ニュートン流体の流れ, 機論, 48-432, B (1982), 1423-1430.
- (2) 富田, 第 26 回応力連合会講論集, (1976), 35-44.
- (3) Dawson, R. and Thompson, E., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **12** (1978), 47-57.
- (4) Shimazaki, Y. and Thompson, E., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17** (1981), 97-112.
- (5) Thompson, E., Pittman, J. and Zienkiewicz, O., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **3** (1983), 165-177.
- (6) Shimazaki, Y. and Shiojima, T., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24** (1987), 1659.
- (7) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), Hemisphere.
- (8) Townsend, P., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **1** (1976), 107.
- (9) 平井, レオロジー, (1978), 172, 丸善.
- (10) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, (1971), 416, McGraw-Hill.
- (11) 山本, 物体の変形学, (1972), 294, 誠文堂新光社.
- (12) Rodi, W., *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics*, (1980), 51, IAHR.
- (13) Böhme, G., *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, (1987), 278, North-Holland.
- (14) 前田, 機論, 58-552, B (1992), 2438.