二次元移流拡散方程式の、有限要素法による新しい定式化* (誤差解析手法によるアプローチ)

松田 安弘^{*1}, 邵 長 城^{*2}, 加藤 景 久^{*3}

New Formulation using the Finite Element Method for the Two-Dimensional Convection-Diffusion Equation (Approach by the Error Analysis Technique)

Yasuhiro MATSUDA, Changcheng SHAO and Kagehisa KATO

In our previous paper, the modified Galerkin method (MGM) was proposed for the one-dimensional convection-diffusion equation as one of the most efficient methods. In this paper, the MGM concept has been analytically extended to the two-dimensional convection-diffusion equation. The triangular linear and the rectangular linear elements were investigated by the error analysis technique combined with an analytical solution. Then, six correction coefficients were obtained for MGM and the Galerkin method (GL). At the same time, two finite difference methods were investigated using the error analysis technique. Then, all of these numerical methods were evaluated from the viewpoints of phase error and dissipation error. The MGM was proven to be the most efficient numerical method among these five methods. Through numerical experiments by MGM and GL, we confirmed the effectiveness of MGM and the general correspondence between the error analysis and the numerical simulation.

Key Words: Two-Dimensional Convection-Diffusion Equation, Finite Element Method, Error Analysis, Modified Galerkin Method, Finite Difference Method

1. 緒 言

非定常移流拡散方程式は、熱流体解析の中で最も基本的な方程式の一つであり、その効率的な数値解法についての研究は重要である。本論文では、先に一次元移流拡散問題について提案した新しい有限要素解法(変形ガレルキン法)の考え方⁽¹⁾を、二次元移流拡散問題に拡張したものである。すなわち、フーリエ級数による誤差解析手法を用いて既存の有限要素法や差分法の陰解法に補正係数を導入し、新しい有限要素法による定式化を提案した。そして誤差解析の観点から、これら各数値解法間の比較・検討を行い数値実験との対応関係を検討した。

なお、本論文では次の二次元非定常移流拡散方程式を対象としている。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad \cdots \cdots (1)$$

ただし、 t : 時間、 C : 濃度、 u, v : 流速、 K_x, K_y : 拡散係数である。

2. 誤差解析手法による 数値解法の補正方法

2.1 一般解についての定式化 もし、 u, v, K_x および K_y がすべて定数である場合は式(1)は変数分離法によって解くことができるが、その一般解はフーリエ級数により表現され、その成分の一つは次式で表される。

$$C = A \exp[-(\beta_x^2 K_x + \beta_y^2 K_y)t + i\beta_x(x - ut) + i\beta_y(y - vt)] \quad \cdots \cdots (2)$$

ただし、 A : 複素定数、 β_x, β_y : 波数である。ここで $x = lh_x, y = mh_y, t = n\Delta t, b_x = u\Delta t/h_x, b_y = v\Delta t/h_y, r_x = K_x\Delta t/h_x^2, r_y = K_y\Delta t/h_y^2$ とすると、式(2)より次式を得る。ただし、 l, m, n : x 方向、 y 方向、および時間方向の添字であり、 h_x, h_y : x, y 方向のメッシュ幅、 Δt : タイム・ステップ、である。

$$C_{l,m}^n = A(\xi_A)^n \exp(i\beta_x lh_x + i\beta_y mh_y) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\xi_A = P_1 + iP_2 \quad \cdots \cdots (4)$$

$$P_1 = \exp[-(\beta_x h_x)^2 r_x - (\beta_y h_y)^2 r_y] \cos(b_x \beta_x h_x + b_y \beta_y h_y) \quad \cdots \cdots (5)$$

$$P_2 = -\exp[-(\beta_x h_x)^2 r_x - (\beta_y h_y)^2 r_y] \sin(b_x \beta_x h_x + b_y \beta_y h_y) \quad \cdots \cdots (6)$$

ただし、 $C_{l,m}^n$ は時刻 $t = n\Delta t$ で、 $x = lh_x, y =$

* 原稿受付 平成4年3月25日。

^{*1} 正員、信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

^{*2} 准員、信州大学工学部。

^{*3} 学生員、信州大学大学院。

mh_y における濃度で、 ξ_A は一般解の増幅因子である。

2.2 数値解についての定式化と、その補正方法

一方、式(1)にある数値解法を適用し、式(3)に示すように $C_{l,m}^n$ に $(\xi)^n \exp(i\beta_x lh_x + i\beta_y mh_y)$ を代入して整理すると数値解の増幅因子 ξ は一般的に次式により表される。

$$\xi = \frac{Q_1 + Q_2 + iQ_3}{Q_4 + Q_5 + iQ_6} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 Q_1, Q_3, Q_4, Q_6 は $b_x, b_y, \beta_x h_x, \beta_y h_y$ の関数で、 Q_2, Q_5 は $r_x, r_y, \beta_x h_x, \beta_y h_y$ の関数である。ここで精度の向上のために、次式で示すような二つの補正係数“ f ”と“ g ”を導入する。

$$\xi = \frac{Q_1 + fQ_2 + igQ_3}{Q_4 + fQ_5 + igQ_6} \dots\dots\dots (8)$$

すなわち、 f は拡散項の補正係数であり、 g は移流項の補正係数である。 f と g は式(4)と式(8)とを等置することにより求められるが、いま簡単のために、 $\beta_x h_x, \beta_y h_y$ を零とする極限を考えると、次の関係式を得る。

$$f = \lim_{\beta_x h_x \rightarrow 0, \beta_y h_y \rightarrow 0} \frac{(Q_3 - P_1 Q_6)(P_1 Q_4 - Q_1) - P_2^2 Q_4 Q_6}{(Q_3 - P_1 Q_6)(Q_2 - P_1 Q_5) + P_2^2 Q_5 Q_6}$$

$$g = \lim_{\beta_x h_x \rightarrow 0, \beta_y h_y \rightarrow 0} \frac{P_2(Q_2 Q_4 - Q_1 Q_5)}{(Q_3 - P_1 Q_6)(Q_2 - P_1 Q_5) + P_2^2 Q_5 Q_6} \dots\dots\dots (9)$$

なお、本論文で対象とする数値解法としては、変形ガレルキン法を中心に、一次元移流拡散問題⁽¹⁾での検討において比較的精度の高かった陰解法による有限要素法および差分法である。

3. 有限要素法による定式化とその補正

以下の検討では形状関数が三角形一次要素と四角形一次要素の場合を考える。

3.1 ガレルキン法(GL)による定式化 式(1)

を、境界条件を考慮して定式化すると、マトリックス形で次のように表される。

$$[P]\{\dot{C}\} + [D]\{C\} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ここで、マトリックス

$$[P] = \sum_{V_e} \int_{V_e} N_i N_j dx dy$$

$$[D] = \sum_{V_e} \int_{V_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} K_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} K_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + N_i u \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \dots\dots\dots (11)$$

V_e ：一要素の領域、 N_i ：形状関数、 M ：総要素数である。いま、式(10)の $\{\dot{C}\}$ について式(12)の関係式を用

いると式(13)を得る。

$$(1 - \phi)\{\dot{C}\}^{n-1} + \phi\{\dot{C}\}^n = \frac{\{C\}^n - \{C\}^{n-1}}{\Delta t} \dots\dots\dots (12)$$

(ϕ ：タイムスキームパラメータ)

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + \phi[D] \right\} \{C\}^n = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1 - \phi)[D] \right\} \{C\}^{n-1} \dots\dots\dots (13)$$

いま、図1に示す三角形一次要素の節点 p_1 の節点番号を k_1 、座標を $x = lh_x, y = mh_y$ とすると式(13)の第 k_1 代数方程式は次式で表される。

$$[4 + 12\phi(r_x + r_y)]C_{l,m}^n + [1 - 3\phi(r_x + r_y) + 2\phi(b_x + b_y)]C_{l+1,m+1}^n + [1 - 3\phi(r_x + r_y) - 2\phi(b_x - b_y)]C_{l-1,m+1}^n + [1 - 3\phi(r_x + r_y) - 2\phi(b_x + b_y)]C_{l-1,m-1}^n + 2\phi(b_x - b_y)C_{l+1,m-1}^n = [4 - 12(1 - \phi)(r_x + r_y)]C_{l,m}^{n-1} + [1 + 3(1 - \phi)(r_x + r_y) - 2(1 - \phi)(b_x + b_y)]C_{l+1,m+1}^{n-1} + [1 + 3(1 - \phi)(r_x + r_y) + 2(1 - \phi)(b_x - b_y)]C_{l-1,m+1}^{n-1} + [1 + 3(1 - \phi)(r_x + r_y) + 2(1 - \phi)(b_x + b_y)]C_{l-1,m-1}^{n-1} - 2(1 - \phi)(b_x - b_y)C_{l+1,m-1}^{n-1} \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の各 $C_{l,m}^n$ に $\xi^n \exp(i\beta_x lh_x + i\beta_y mh_y)$ を代入し、 ξ について整理すると、式(7)の $Q_1 \sim Q_6$ は、次式により表される。

$$Q_1 = 1 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y)$$

$$Q_2 = 3(1 - \phi)(r_x + r_y)[\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1]$$

$$Q_3 = -2(1 - \phi)[b_x \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) + b_y \cos(\beta_x h_x) \sin(\beta_y h_y)]$$

$$Q_4 = Q_1$$

$$Q_5 = -3\phi(r_x + r_y)[\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1]$$

$$Q_6 = 2\phi[b_x \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) + b_y \cos(\beta_x h_x) \sin(\beta_y h_y)] \dots\dots\dots (15)$$

図1に示す三角形一次要素の節点 p_2 と図2に示す四角形一次要素の節点 p_3 についても同様に $Q_1 \sim Q_6$ を得ることができるが、紙面の都合上省略する。

3.2 変形ガレルキン法[MG(C)]⁽¹⁾による定式化
変形ガレルキン法ではガレルキン法と違い、式(1)の左辺の移流項を右辺に移項して発生項として扱うので、次式により定式化される。

図 1 三角形一次要素の場合 図 2 四角形一次要素の場合

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + \phi[D] \right\} \{C\}^n \\ &= \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1-\phi)[D] \right\} \{C\}^{n-1} - \{F(C^{n-1})\} \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} [D] &= \sum_{i=1}^M \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} K_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} K_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\ \{F\} &= \sum_{i=1}^M \int_{V_e} N_i \left[\frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} \right] dx dy \\ & \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

(1) 三角形一次要素の節点 p_1 の場合 図 1 に示す節点 p_1 についての $Q_1 \sim Q_6$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) \\ Q_2 &= 3(1-\phi)(r_x + r_y) [\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1] \\ Q_3 &= -2[b_x \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) \\ & \quad + b_y \cos(\beta_x h_x) \sin(\beta_y h_y)] \\ Q_4 &= Q_1 \\ Q_5 &= -3\phi(r_x + r_y) [\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1] \\ Q_6 &= 0 \\ & \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

(2) 三角形一次要素の節点 p_2 の場合 同様に $Q_1 \sim Q_6$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4 + 2\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) + \cos(2\beta_x h_x) \\ & \quad + \cos(2\beta_y h_y) \\ Q_2 &= 6(1-\phi)(r_x + r_y) [\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1] \\ & \quad + 3(1-\phi)(r_x - r_y) [\cos(2\beta_x h_x) - \cos(2\beta_y h_y)] \\ Q_3 &= -2[2b_x \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) \\ & \quad + 2b_y \cos(\beta_x h_x) \sin(\beta_y h_y) + b_x \sin(2\beta_x h_x) \\ & \quad + b_y \sin(2\beta_y h_y)] \\ Q_4 &= Q_1 \\ Q_5 &= -6\phi(r_x + r_y) [\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1] \\ & \quad - 3\phi(r_x - r_y) [\cos(2\beta_x h_x) - \cos(2\beta_y h_y)] \\ Q_6 &= 0 \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

(3) 四角形一次要素の節点 p_3 の場合 同様に $Q_1 \sim Q_6$ は次式で表される。

表 1 補正係数 a

Node	p_1	p_2	p_3
Element			
a	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) + 2\cos(\beta_x h_x) \\ & \quad + 2\cos(\beta_y h_y) \\ Q_2 &= 6(1-\phi)(r_x + r_y) [-2 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y)] \\ & \quad + 6(1-\phi)[(2r_x - r_y) \cos(\beta_x h_x) \\ & \quad - (r_x - 2r_y) \cos(\beta_y h_y)] \\ Q_3 &= -b_x [6\sin(\beta_x h_x) + 3\sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y)] \\ & \quad - b_y [6\sin(\beta_y h_y) + 3\sin(\beta_y h_y) \cos(\beta_x h_x)] \\ Q_4 &= Q_1 \\ Q_5 &= 6\phi(r_x + r_y) [2 - \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y)] \\ & \quad - 6\phi[(2r_x - r_y) \cos(\beta_x h_x) \\ & \quad - (r_x - 2r_y) \cos(\beta_y h_y)] \\ Q_6 &= 0 \\ & \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

したがって、式(9)から、点 p_1 , p_2 および p_3 についての f と g は一般に次式により表される。

$$f = a \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y)^2}{r_x + r_y} \right], g = 1 \dots\dots\dots (21)$$

ここで係数 a は表 1 に示されている。もし $a=1$, $b_y=0$, $r_y=0$ なら、式(21)は一次元移流拡散問題の補正係数⁽¹⁾と一致する。変形ガレルキン法 [MG(C)] での拡散係数 K_x , K_y は fK_x および fK_y となるが、 $K_x=K_y$, $h_x=h_y$ の場合には、次式のような人工拡散係数となる。

$$\begin{aligned} fK_x &= a \left[K_x + \frac{1}{4} \Delta t (u+v)^2 \right] \\ fK_y &= a \left[K_y + \frac{1}{4} \Delta t (u+v)^2 \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

3.3 ガレルキン法の補正方式 [GL(C)] による定式化 変形ガレルキン法と同様の補正方式をガレルキン法に導入すると、式(9)から、同様の手順により p_1 , p_2 と p_3 についての補正係数 f と g は次式により表すことができる。

$$f = a \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y)^2}{r_x + r_y} (1-2\phi) \right], g = 1 \dots\dots (23)$$

ここで係数 a は同様に表 1 で示される。

4. 差分法による定式化の場合

4.1 クランク・ニコルソン方式⁽²⁾ (CNK) の場合

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{i,m}^{n+1} - C_{i,m}^n}{\Delta t} + u \frac{C_{i+1,m}^{n+1} - C_{i-1,m}^{n+1} + C_{i+1,m}^n - C_{i-1,m}^n}{4h_x} + v \frac{C_{i,m+1}^{n+1} - C_{i,m-1}^{n+1} + C_{i,m+1}^n - C_{i,m-1}^n}{4h_y} \\
& = K_x \frac{C_{i-1,m}^{n+1} - 2C_{i,m}^{n+1} + C_{i+1,m}^{n+1} + C_{i-1,m}^n - 2C_{i,m}^n + C_{i+1,m}^n}{2h_x^2} \\
& \quad + K_y \frac{C_{i,m-1}^{n+1} - 2C_{i,m}^{n+1} + C_{i,m+1}^{n+1} + C_{i,m-1}^n - 2C_{i,m}^n + C_{i,m+1}^n}{2h_y^2} \dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

したがって、式(7)より、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 2, Q_2 = 2r_x[\cos(\beta_x h_x) - 1] + 2r_y[\cos(\beta_y h_y) - 1] \\ Q_3 &= -b_x \sin(\beta_x h_x) - b_y \sin(\beta_y h_y), Q_4 = Q_1, Q_5 = -Q_2, Q_6 = -Q_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

よって、式(9)から $f=1, g=1$ となり、この場合の補正方式は存在しない。

4.2 ロバート・ワイス対流方式⁽³⁾ (RW) の場合

$u \geq 0, v \geq 0$ で

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{i,m}^{n+1} - C_{i,m}^n}{\Delta t} + u \frac{C_{i,m}^{n+1} - C_{i-1,m}^{n+1} + C_{i+1,m}^n - C_{i,m}^n}{2h_x} + v \frac{C_{i,m}^{n+1} - C_{i,m-1}^{n+1} + C_{i,m+1}^n - C_{i,m}^n}{2h_y} \\
& = K_x \frac{C_{i-1,m}^{n+1} - 2C_{i,m}^{n+1} + C_{i+1,m}^{n+1} + C_{i-1,m}^n - 2C_{i,m}^n + C_{i+1,m}^n}{2h_x^2} \\
& \quad + K_y \frac{C_{i,m-1}^{n+1} - 2C_{i,m}^{n+1} + C_{i,m+1}^{n+1} + C_{i,m-1}^n - 2C_{i,m}^n + C_{i,m+1}^n}{2h_y^2} \dots\dots\dots (26)
\end{aligned}$$

したがって、式(7)より、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 2 - b_x[\cos(\beta_x h_x) - 1] - b_y[\cos(\beta_y h_y) - 1] \\ Q_2 &= 2r_x[\cos(\beta_x h_x) - 1] + 2r_y[\cos(\beta_y h_y) - 1] \\ Q_3 &= -b_x \sin(\beta_x h_x) - b_y \sin(\beta_y h_y) \\ Q_4 &= Q_1, Q_5 = -Q_2, Q_6 = -Q_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

よって、式(9)から $f=1, g=1$ となり、この場合の補正方式は存在しない。

$$E_P = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\Delta \phi}{\Delta \phi_A} - 1 \right\}^2} \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $\Delta \phi = \tan^{-1}[\text{Im}(\xi)/\text{Re}(\xi)]$, $\Delta \phi_A = -2\pi(b_x/k_x + b_y/k_y)$, $N = (k_x \text{ の数}) \times (k_y \text{ の数}) \times (b_x \text{ の数})$ である。図1に示す二つの三角形要素の節点 p_1 と p_2 は数値計算の際、同時に現れるので、これらの節点の誤差 $E_i(\boxtimes)$ と $E_i(\diamond)$ は、次式のようにまとめて考える。

$$E_i(\boxtimes) = \sqrt{\frac{1}{2} \{E_i^2(\boxtimes) + E_i^2(\diamond)\}} \dots\dots\dots (31)$$

誤差解析による数値誤差 E_i は、要素 $\boxtimes$ と $\boxplus$ について、与えられた計算領域内で同じ節点数 [すなわち、 $h_x(\boxtimes) = h_x(\boxplus)/\sqrt{2}$, $h_y(\boxtimes) = h_y(\boxplus)/\sqrt{2}$] となるような条件のもとに比較した。ここで、 $h_x(\boxtimes)$ と $h_y(\boxtimes)$ は三角形要素のメッシュ幅 (図1) であり、 $h_x(\boxplus)$ と $h_y(\boxplus)$ は四角形要素のメッシュ幅 (図2) である。また、 r_x, r_y, b_x, b_y は四角形要素のメッシュ幅 $h_x(\boxplus)$ と $h_y(\boxplus)$ をもとに定義した。なお差分法でのメッシュ幅 h_x と h_y は、 $h_x(\boxplus)$ と $h_y(\boxplus)$ に等しく定義した。

5.2 誤差解析の結果 差分法 (CNK および RW) は無条件安定となり、有限要素法は条件付き安定となった。なお、有限要素法の誤差解析でのタイムスキームパラメータは、安定範囲内において $0 \sim 1$ (0.1 きざみ) と変化させた際の最小 E_i を与える ϕ_{opt} を用いている。表2と表3に、 $r_x = r_y = 0 \sim 1$, $b_x = 0.1 \sim 0.5$ (0.1 きざみ) および、 $b_x = 0.2 \sim 1$ (0.2 きざみ) のもとで、(1) $b_y = 0.5 \times b_x$; (2) $b_y = b_x$ とした場合の誤

5. 各数値解法についての

誤差解析結果

5.1 誤差解析の前提条件 二次元問題での各数値解法の増幅因子 ξ と一般解の増幅因子 ξ_A とを比較することにより、各種の有限要素法や差分法の計算精度を検討した。

誤差解析では $k_x = 2\pi/(\beta_x h_x) = 3, 4, 6, 8, 10$; $k_y = 2\pi/(\beta_y h_y) = 3, 4, 6, 8, 10$; $0 \leq (r_x = r_y) \leq 1$; $0 < b_x \leq 1$ の範囲を考えた。 b_y は次の二つの場合を考える: $b_y = 0.5 \times b_x$; $b_y = b_x$ 。また、数値解法の評価には、 $|\xi|_{\text{max}} \leq 1$ の安定条件と次式のような誤差指標 E_i を用いている。

$$E_i = \sqrt{E_A^2 + E_P^2} \dots\dots\dots (28)$$

ただし、 E_A と E_P は、それぞれ散逸誤差と位相誤差に対応しており、次式で表される。

$$E_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|\xi| - |\xi_A|)^2} \dots\dots\dots (29)$$

差 E_t の値を示す。下線を付したデータは、その $r_x = r_y$ での E_t の最小値であることを示している。なお表 2, 3 中の “#” は要素田 (GL(C)) での $\phi_{opt}=0.5$ の場

合を示しているが、これは式 (23) より、結果的にはガレルキン法と同じになる。なお、表 4, 5 は、おのおの、表 2 および表 3 中の各有限要素法に対する E_t の計算

表 2 理論誤差 $E_t(b_y=0.5 \times b_x)$

Parameters Methods		$b_x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$				$b_x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$			
		$r_x = r_y$				$r_x = r_y$			
		0	0.1	0.3	1	0	0.1	0.3	1
F E M	MG(C) 田	0.126	0.079	<u>0.119</u>	<u>0.231</u>	0.242	0.153	<u>0.233</u>	<u>0.351</u>
	GL(C) 田	<u>0.092</u>	#0.075	0.342	0.780	<u>0.159</u>	<u>0.141</u>	0.329	0.674
	GL 田	0.105	<u>0.075</u>	0.341	0.787	0.167	0.152	0.308	0.663
	MG(C) 罫	0.286	0.210	0.214	0.332	0.323	0.214	0.250	0.409
	GL(C) 罫	0.268	0.236	0.433	0.805	0.299	0.224	0.520	0.785
	GL 罫	0.274	0.229	0.439	0.817	0.299	0.268	0.456	0.819
F D M	CNK	0.341	0.333	0.207	5.788	0.362	0.362	0.270	2.487
	RW	0.420	0.424	0.343	5.605	0.485	0.500	0.470	2.303

表 3 理論誤差 $E_t(b_y=b_x)$

Parameters Methods		$b_x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$				$b_x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$			
		$r_x = r_y$				$r_x = r_y$			
		0	0.1	0.3	1	0	0.1	0.3	1
F E M	MG(C) 田	0.120	<u>0.085</u>	<u>0.152</u>	<u>0.271</u>	0.198	<u>0.164</u>	<u>0.257</u>	<u>0.395</u>
	GL(C) 田	<u>0.100</u>	#0.090	0.349	0.775	<u>0.195</u>	0.173	0.358	0.626
	GL 田	0.123	0.090	0.349	0.788	0.212	0.214	0.290	0.619
	MG(C) 罫	0.279	0.200	0.221	0.352	0.297	0.189	<u>0.249</u>	0.435
	GL(C) 罫	0.263	0.234	0.436	0.800	0.317	0.211	0.526	0.708
	GL 罫	0.275	0.243	0.440	0.817	0.317	0.293	0.393	0.805
F D M	CNK	0.349	0.343	0.219	4.010	0.382	0.390	0.328	1.644
	RW	0.446	0.454	0.393	3.818	0.524	0.543	0.534	1.466

表 4 陰解法の $\phi_{opt}(b_y=0.5 \times b_x)$

	$b_x = 0.1 \sim 0.5$				$b_x = 0.2 \sim 1$			
	$r_x = r_y$				$r_x = r_y$			
	0	0.1	0.3	1	0	0.1	0.3	1
MG(C) 田	0.5	0.8	0.9	1.0	0.6	0.7	0.8	1.0
GL(C) 田	0.3	0.5	0.8	1.0	0.4	0.4	0.7	0.9
GL 田	0.5	0.5	0.8	1.0	0.5	0.5	0.7	0.9
MG(C) 罫	0.3	0.7	0.9	1.0	0.5	0.6	0.8	1.0
GL(C) 罫	0.2	0.5	0.8	1.0	0.5	0.4	0.7	1.0
GL 罫	0.5	0.4	0.8	1.0	0.5	0.5	0.8	1.0

表 5 陰解法の $\phi_{opt}(b_y=b_x)$

	$b_x = 0.1 \sim 0.5$				$b_x = 0.2 \sim 1$			
	$r_x = r_y$				$r_x = r_y$			
	0	0.1	0.3	1	0	0.1	0.3	1
MG(C) 田	0.4	0.7	0.9	1.0	0.5	0.6	0.8	0.9
GL(C) 田	0.3	0.5	0.8	1.0	0.4	0.4	0.7	0.9
GL 田	0.5	0.5	0.8	1.0	0.5	0.5	0.7	0.9
MG(C) 罫	0.3	0.7	0.9	1.0	0.5	0.6	0.8	0.9
GL(C) 罫	0.2	0.5	0.8	1.0	0.5	0.4	0.6	0.9
GL 罫	0.5	0.5	0.8	1.0	0.5	0.5	0.7	0.9

に用いた最適値 ϕ_{opt} を示したものである。表2と表3より、全体的に四角形一次要素による変形ガレルキン法の精度が最も高くなっていることがわかる。また、補正されたガレルキン法は、補正なしのガレルキン法に比べて精度が改善されている。なお、有限要素法では、有限差分法に比べて、 ϕ_{opt} を使っているので精度が良くなっている（特に $r_x=r_y=1$ の場合）。

6. 変形ガレルキン法による 二次元移流拡散問題の数値計算例

6・1 計算条件 5章での結果をふまえて、変形ガレルキン法とガレルキン法による二次元移流拡散問題の数値計算を行った。時刻 $t=0$ で、 x - y 直交座標系の原点を中心とした $(2 \cdot Dx) \times (2 \cdot Dy)$ の長方形範囲内に一定濃度 C_b を瞬間的に与え、無限遠での濃度を零 ($t \geq 0$) とした場合の二次元非定常移流拡散問題は解析的に解くことができる。ただし、このような階段状に変化する初期濃度分布を精度良く扱うために、まず微小時間 δt だけ移流拡散させた後の濃度分布を解析解より計算し、それを初期濃度分布に用いて数値計算を行った。この際の解析解の初期条件と境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} C(x, y, -\delta t) &= C_b, & |x+U^*| \leq Dx, & |y+V^*| \leq Dy \\ C(x, y, -\delta t) &= 0, & |x+U^*| > Dx, & |y+V^*| > Dy \\ C(\infty, \infty, t) &= 0, & t &\geq -\delta t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし

(a) 347 節点, 304 要素

(b) 1295 節点, 1210 要素

図3 計算領域の分割

$$U^* = \int_{-\delta t}^0 u(t) dt, \quad V^* = \int_{-\delta t}^0 v(t) dt \quad \dots\dots\dots (33)$$

したがって、数値計算を開始する時点 ($t=0$) 以降の解析解は式(34)で表される。

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \frac{C_b}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{Dx - (x - U)}{2(K_x t + K_x \delta t)^{1/2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{erf} \left[\frac{Dx + (x - U)}{2(K_x t + K_x \delta t)^{1/2}} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{Dy - (y - V)}{2(K_y t + K_y \delta t)^{1/2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{erf} \left[\frac{Dy + (y - V)}{2(K_y t + K_y \delta t)^{1/2}} \right] \right\} \\ &\quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, t \geq 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし

$$U = \int_0^t u(t) dt, \quad V = \int_0^t v(t) dt \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。ここで数値計算における誤差の指標としては次式を考える。

図4 ϕ と E_t および E_r との関係

図5 変形ガレルキン法による数値実験結果

表 6 誤差解析結果と数値実験結果との比較
(347 Nodes, $b_x=0.2$, $b_y=0$, $\Delta t=0.025$, $t=0.5$)

$\Gamma_x = \Gamma_y$		0	0.01	0.1
b_x / Γ_x		∞	20	2
MG(C) 田	ϕ_{opt}	0	0.3	0.9
	E_t	*0.072	0.070	0.067
	E_r (%)	0.393	0.281	0.183
GL 田	ϕ_{opt}	0.5	0.1	0.5
	E_t	0.084	0.070	0.105
	E_r (%)	0.522	0.410	0.148

$$E_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|C_{A_i} - C_i|}{C_{A_{\max}}} \times 100 (\%) \quad \dots\dots (36)$$

ここで、添字 A は、解析解であることを示し、 N は総節点数、 n は時間方向の計算繰返し回数、である。計算領域は半径がほぼ 1 となるような半円として考え、図 3 のような四角形一次要素を用いて、変形ガレルキン法とガレルキン法 (347 節点 304 要素の場合のみ) の数値実験を行った。境界条件はすべての境界で $\partial C / \partial n_B = 0$ ($\partial / \partial n_B$ は、境界での外向き法線方向の微分を示す) であり、また、 $v=0$, $C_B=100$, $Dx=Dy=0.05$ とした。式(34)での $K_x \delta t$ と $K_y \delta t$ は定数 (0.0005) とした。

6.2 計算結果と考察 図 4 は、347 節点での変形ガレルキン法とガレルキン法における理論誤差 E_t と数値誤差 E_r (%) の、タイムスキームパラメータ ϕ による変化を示す。ただし、 $r_x=r_y=0.1$, $b_x=0.2$, $b_y=0$ である。これより、 E_t と E_r の、 ϕ による変化は、ほぼ同様の挙動を示していることがわかる。また図 5 は、1295 節点での変形ガレルキン法による濃度 $C(y=0)$ の $t=0.5$ および 1 ($\Delta t=0.0125$) での分布を示している。ここで ϕ は、誤差解析での最適値 $\phi_{\text{opt}} (=0.9)$ を用いている。表 6 は 347 節点での、各 $r_x=r_y$ での変形ガレルキン法とガレルキン法による E_t と E_r (ϕ_{opt} を使用) を示す。これより変形ガレルキン法は、ガレルキン法に比べて相対的に精度が高くなっていることが

わかる。変形ガレルキン法が対称マトリックスのみによる定式化であることを考えると、この点は大きな長所になると言えよう。

また、表 6 での E_t と E_r との定量的な対応関係はあまり明確ではないがこの理由としては、(1) 境界条件や初期条件は数値計算ごとに個別の問題となるため誤差解析では考慮されないこと、(2) 補正係数の導出では、式(9)のように $\beta_x h_x$, $\beta_y h_y$ を零とした極限で考えていること、(3) E_t のまとめ方 [式(28)] に検討の余地があること、などが考えられる。

しかし、この数値実験により、 ϕ による E_t と E_r の挙動という全体的な対応関係 (図 4) や、対称マトリックスのみで計算できる変形ガレルキン法の有用性 (図 5 と表 6) は十分示されていると言えよう。

なお、MG(C) の E_t で “*” 印を付した場合は $|\xi|_{\max} = 1.01$ ($k_x=4$ と $k_y=8$, 10 の場合で、 k_x , k_y の 25 組み中では 2 組みの場合) となり、理論的には不安定となるが、上述の (1) の理由により、本数値実験ではガレルキン法より良い結果が得られている。

7. 結 論

(1) 二次元非定常移流拡散方程式に変形ガレルキン法とガレルキン法を適用した際の補正係数を、3 種類のメッシュについて誤差解析手法により導入した。

(2) 総合的に見て変形ガレルキン法の補正方式は、タイムスキームパラメータ ϕ を適切に選ぶことにより、各種の有限要素解法や差分法の中で最も高い精度を与えることを理論的に示した。

(3) 数値実験により、タイムスキームパラメータによる E_t と E_r の挙動はほぼ対応関係にあること、および、変形ガレルキン法の有効性を確認した。

文 献

- (1) 松田, 機論, 56-522, B (1990), 441.
- (2) Crank, J. and Nicholson, P., *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 43-1 (1947), 50.
- (3) Roberts, K. V. and Weiss, N. O., *Math. Comput.*, 20 (1966), 272.