だ円渦モデルによる大規模渦構造の記述*

梅 村 章^{*1}, 可 知 繁 隆^{*2}

Large Eddy Structures Revisited in Elliptic Vortex Model

Akira UMEMURA and Shigetaka KACHI

A new discrete vortex model is developed and applied to reveal the essential feature of the vortex pairing, a key process to turbulent mixing layer evolution. The model accounts for the finite size of each eddy as a circulation monopole plus a vortex quadrupole and describes a self-rotating elliptic vortex deformable in a stretching flow field in the presence of other vortices. It is demonstrated that the coalescence of pairing vortices takes place, through interaction between a pair of quadrupoles, when the magnitude of the stretching rate in the eddies exceeds that of the self-rotating angular velocity. The streakline pattern outside the eddies, calculated for a temporally developing mixing layer, is in fairly good agreement with existing numerical calculation results, and is thus expected to provide a powerful analytical tool for simulating turbulent mixing layers.

Key Words: Discrete Vortex Method, Vortex Quadrupole, Vortex Pairing, Large Eddy Structure, Coalescence

1. は じ め に

近年, 渦が存在する流れ場での拡散燃焼の特性が注目されている^{(1)~(11)}. 燃料と酸化剤との二つの平行気流の間に形成される自由せん断層での拡散燃焼特性の予測は, 実用上重要であるばかりでなく, 乱流燃焼を理解するうえで重要な手掛かりを与える. しかし, この比較的簡単な流れにおいても, 発展過程で現れる種々の流動局面のために包含される燃焼形態は多岐にわたり, 解析的手法で接近するのは難しい. したがって, 研究はもっぱら実験^{(9)~(11)} ないしは数値計算^{(1)~(8)} によっており, 物理の抽出は容易でない.

上の問題の基礎をなす非圧縮性せん断層の渦構造についてはすでに多くの研究があり, 乱流発生過程における渦対運動の重要性が認識されている⁽¹²⁾. すなわち, 初期の線形不安定波が非線形的に発展して渦列が形成され, 渦列の不規則性による渦対の形成と合体の繰返しで乱流を導く道だと考えられている. 従来, この渦対過程の解析は主として波動記述によってきた⁽¹⁾⁽³⁾⁽¹⁴⁾. 波動は一つの現象の見方であるが, 理論展開

には煩雑な式を取扱わなければならない, 物理的見通しは必ずしもよくない. これに対して, Winant-Browand⁽¹⁵⁾ は離散渦法⁽¹⁶⁾ による現象の記述を試みた. 彼らの解析では, Stuart⁽¹⁷⁾ が二次元非圧縮非粘性流体に対して求めた渦度分布を持つ無限周期渦列の解を用いて二重渦列を作り, 渦中心の軌跡が追跡された. 計算結果は, 渦対形成後の初期段階における渦中心の軌跡をよく記述したものの, 対渦は一つの閉曲線上を移動し渦の合体は記述できなかった. この結果は, 単に点渦で計算した結果と同じであって, 原因はStuartの解の重ね合わせは元のオイラーの方程式を満足せず, 渦の相互作用が適切に記述されていないことにあると考えられる.

本研究では, 従来の離散渦法(点渦を取扱っている)の考えを発展させ, 渦核の有限性を考慮しただ円渦モデルを構成することにより, 大規模渦構造に現れる渦対過程の物理像を鮮明にする試みを行った. 主な知見は, 渦対の合体は, 渦核の有限性を考慮して初めて説明できることであり, 渦中心での伸長速度の大きさが渦の回転速度の大きさを上回る条件下において生じることが知れる. また, 提案するだ円モデルによれば, 渦対過程での渦核外の流れが効率的に計算でき, 特に燃焼問題への応用において期待が持てる. 実際, せん断

* 原稿受付 平成4年6月29日.

^{*1} 正員, 山形大学工学部(〒992 米沢市城南4-3-16).^{*2} 山形大学産業研究所(〒992 米沢市城南4-3-16).

層拡散燃焼では、渦核内での燃焼は重要な役割を果たさず、核外のポテンシャル流れ場での化学種の拡散および化学反応とそれらの相互作用が問題になるが、核外流れ場の簡易計算法の確立によって、全体の計算量は大幅に節約できると同時に物理的見通しもよくなるからである。

記 号

- A, A_i : 渦双極子強度
 a : 渦中心の x 座標
 B, B_{ij} : 渦 4 極子強度
 b : 渦中心の y 座標
 C, C_{ij} : 初期だ円渦の特性行列
 E, E_{ij} : 渦中心でのひずみ速度
 f : 振動数
 G, G_{ij} : 変換群
 R, R_i : 初期相対位置ベクトル
 r, r_i : 相対位置ベクトル
 r_e : 等価円半径
 S : 渦核領域
 t : 時間
 v, v_i : 相対速度ベクトル
 $\mathbf{x}$: 動位置ベクトル $= (x_i) = (x, y)$
 $\mathbf{x}_c$: 渦中心位置ベクトル $= (a, b)$
 x : デカルト座標 (主流に平行)
 y : デカルト座標 (主流に直交)
 α : Stuart の解のパラメータ
 (渦度の集中度を表す)
 Γ : 循環
 δ : ディラックのデルタ関数
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ
 ε : 平衡位置からのずれ
 ε_{ijk} : 交代テンソル
 λ : 平衡渦間隔 (基本波長)
 σ : だ円渦の伸長度
 ϕ : x 軸から測っただ円渦の主軸の角度
 Ψ : グリーン関数
 ϕ : 流れ関数
 Ω : 渦の自己回転角速度
 ω : 渦度
 下添字
 0: 初期値
 +: $(+a, +b)$ に中心を置く渦
 -: $(-a, -b)$ に中心を置く渦

2. だ円渦モデル

以下、考える流れは二次元の非圧縮非粘性流とする。図 1 に示すように、非回転流れの中に埋め込まれた小さな渦領域を考える。すなわち、領域 $S(t)$ を台とする渦度 ω の分布を考え、それを渦核と称する。渦度分布は必ずしも連続的である必要はなく、従来の離散渦法で考えられているような点渦の集団であってもよい。渦度は流れに乗って輸送されるので、一般に渦核の境界を構成する物質面は時間の経過とともに形を変える。渦から遠く離れた位置では、渦の影響は核の形状に関係なく、循環 Γ を持った一つの点渦によって代表できる。しかし、近傍では核の形状が有意な影響を及ぼす。この渦核の幾何学的効果を明らかにするために、各時刻 t において ω を核内の任意の点 $\mathbf{x}_c$ の回りに Dirac のデルタ関数を用いて展開する。

$$\omega = \Gamma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + B_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + \cdots \quad (1)$$

ここに

$$\Gamma = \int \omega d^2 \mathbf{x} \quad (2 \cdot a)$$

$$A_i = - \int (x - x_c)_i \omega d^2 \mathbf{x} \quad (2 \cdot b)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \int (x - x_c)_i (x - x_c)_j \omega d^2 \mathbf{x} \quad (2 \cdot c)$$

積分は領域 $S(t)$ 全体にわたる。式 (2・a) の循環 Γ は時間的に不変であるが、他の係数は境界の形が変わるとともに時間的に変化する。点 $\mathbf{x}_c$ を係数 $A(t)$ が常に零になるように定め、この点を渦中心と呼ぶ。すると、式 (1) 右辺の初項は点 $\mathbf{x}_c$ に位置する循環 Γ の点渦を表すのに対して、第 3 項は渦核寸法の有限性に由来する効果を表すことになる。次に、この寸法効果がどのように特性付けられるか調べよう。

渦中心 $\mathbf{x}_c$ から測ったある物質点までの位置ベクトルを $\mathbf{r}(t; \mathbf{R})$ で表す。ここに $\mathbf{R}$ は、着目する物質点の初期時刻 $t=0$ における相対位置ベクトルを表し、 $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t=0)$ である。考えている非圧縮非粘性流では、次

図 1 非回転流中の渦核の運動

の関係式（測度の保存）が成立する。

$$\omega(t, \mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} = \omega(t, \mathbf{R}) d^2 \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (3)$$

これより式(2・c)は

$$B_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int r_i(t; \mathbf{R}) r_j(t; \mathbf{R}) \omega(0; \mathbf{R}) d^2 \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と書き改められる。

渦核の寸法が十分小さく、中心 $\mathbf{x}_c$ に対する相対速度 $\mathbf{v}$ が次のように線形な形に近似できるとする。

$$v_i = dr_i/dt = E_{ij}(t) r_j - \Omega(t) \varepsilon_{ij} r_j \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに中心で評価した速度こう配は純粋ひずみ速度 E_{ij} と角速度 Ω の和に分解してある。非圧縮性より $\mathbf{E}$ のトレースは零になる。 $\mathbf{E}$ の算出法については、後に具体的な問題で例示する。

線形性より式(5)の解は次の形を取る。

$$r_i = G_{ij}(t) R_j \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに $\mathbf{G}$ は次式に従う。

$$\frac{dG_{ij}}{dt} = [E_{ik} - \Omega \varepsilon_{ik}] G_{kj} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし

$$G_{ij}(t=0) = \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(6)を式(4)に代入して次式を得る。

$$B_{ij} = \frac{1}{2} G_{ia} G_{jb} C_{ab} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$C_{ab} = \int R_a R_b \omega(0; R) d^2 R \quad \dots\dots\dots (10)$$

第3項で打ち切った式(1)の近似と一致して、だ円形の初期渦核を仮定する。その配位は短径を長径で割った比 σ_0^2 と等価円半径 r_e および正の x 軸と長軸がなす角度 ϕ_0 によって特性付けられる。等価円半径 r_e は、だ円渦核と同じ面積を持つ円の半径であり、非圧縮性流体を考えているので常に一定に保たれる。さらに、だ円渦核内部において渦度が一様に分布していると仮定すれば、式(10)よりマトリックス $\mathbf{C}$ が次のように求められる。

$$\frac{\Gamma}{8} r_e^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sigma_0} + \sigma_0\right) + \left(\frac{1}{\sigma_0} - \sigma_0\right) \cos 2\phi_0 & \left(\frac{1}{\sigma_0} - \sigma_0\right) \sin 2\phi_0 \\ \left(\frac{1}{\sigma_0} - \sigma_0\right) \sin 2\phi_0 & \left(\frac{1}{\sigma_0} + \sigma_0\right) - \left(\frac{1}{\sigma_0} - \sigma_0\right) \cos 2\phi_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(6)の線形変換は1パラメータ変換群を構成し、元のだ円領域を他のだ円領域に写像する。任意の時刻 t においてだ円渦の長軸が x 軸となす角度 $\phi(t)$ および伸長度 $1/\sigma(t)$ は、渦核がマトリックス $\mathbf{B}$ の特性だ円と相似になることより、次式によって算出される。

$$\tan 2\phi = \frac{2(\sigma_0^2 G_{xy} G_{yy} + G_{yx} G_{xx})}{\sigma_0^2 (G_{yy}^2 - G_{xy}^2) + (G_{yx}^2 - G_{xx}^2)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2 (G_{yy}^2 + G_{xy}^2) + (G_{xx}^2 + G_{yx}^2) + [\sigma_0^2 (G_{yy}^2 - G_{xy}^2) + (G_{yx}^2 - G_{xx}^2)] \cos 2\phi + 2(\sigma_0^2 G_{yx} G_{xx} + G_{xy} G_{yy}) \sin 2\phi}{\sigma_0^2 (G_{yy}^2 + G_{xy}^2) + (G_{xx}^2 + G_{yx}^2) - [\sigma_0^2 (G_{yy}^2 - G_{xy}^2) + (G_{yx}^2 - G_{xx}^2)] \cos 2\phi - 2(\sigma_0^2 G_{yx} G_{xx} + G_{xy} G_{yy}) \sin 2\phi} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただしここに後の応用を考慮して $\phi_0=0$ とした。

一様な渦度分布を持っただ円渦は古くより Kirchhoff のだ円渦⁽¹⁸⁾ の名で知られている。このような渦は自ら誘起する速度場によって一定の角速度で自転する。外部流れ場との干渉によって生ずるだ円渦核の変形は初期の一様な渦度分布を乱す可能性があるが、考えている近似の範囲においては、渦度を再分配していつでも核内において一様な渦度分布を考えることができる。したがって、核の瞬間回転角速度は

$$\Omega = \frac{2\Gamma}{\pi r_e^2 \left(\frac{1}{\sigma} + \sigma\right)^2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

によって与えられる。

以上により、基本的なモデルの構成は終わる。

本モデルを渦対運動の解析に適用するに先立って、ここで本モデルが従来の離散渦モデルに対して加えている修正の物理的意義について触れておく。式(1)の第3項は渦4極子を表し、異なった符号を持つ2対の点渦を渦中心回りに無限小の距離をおいて直角に配置することによって作られる。これは、主軸が45度傾いている点を除けば、2対の流体ゆう源と吸込みから作られる4極子と同じである。渦4極子によって形成される流線を図2に示す。だ円渦で、このような4極子が現れる理由は容易に理解できる。一様な渦度分布を持つ円形の渦は同心円の流線を創成し、核外の流れは式(1)の第1項で与えられる点渦によって記述される。この円形渦が図1に描いてあるようなだ円渦に変形したとする。渦度の和は不変であるから、点渦の特性はそのまま保存される。これに加えて、渦核の変

形による流れが上乘せされる。同じ変形は次のようにしても達成される。すなわち、円形渦領域の対向した部分の一部の渦度を取り去り、これを他の対向部分に付加する。換言すると、 x および y 軸上に正負の循環を短い距離をおいて置く。これは、まさに 4 極子の構成そのものにほかならない。このようにして構成された 4 極子は、第 2, 3 象限において向心流を創成し、また、第 1, 3 象限に遠心流を生む。後に、この向心流が渦対の合体を可能にすることが示されるであろう。

3. 渦対過程の模擬計算

3・1 定式化 渦対過程の模擬計算を、式(1)で特性付けられる特異な渦の二重列(図3)に対して行う。古く von Karman によって見いだされたように、規則的な渦配列の中で最も不安定なものは、同じ渦が等間隔 λ で一列に(x 軸上に)並んでいる場合である。図3は、この中立状態から、一つおきに渦が横に微小量 ε ずれた場合を表している。これを初期条件とし、その後の渦の運動を追うと、渦は対をなして回転運動を行うことになる。周期性より代表的に $-\lambda/2 < x < \lambda/2$ の領域に限って考えればよい。著者らのモデルにおいて各時刻 t における流れ関数 ψ の構成は容易である。まず $\nabla^2 \psi = \omega$ の関係に着目する。ここで右辺の渦度 ω は原点对称な点($x = \pm a, y = \pm b$)に中心を置く二つの渦の重ね合わせによって与えられるから、 $\nabla^2 \Psi = \delta(x-a)\delta(y-b)$ を満たすグリーン関数 Ψ がわかれば、必要な流れ関数はただちに導ける。対象とする周期構造を持った流れでは、 Ψ は

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\cosh \frac{\pi(y \mp b)}{\lambda} - \lambda \cos \frac{\pi(x \mp a)}{\lambda} \right] \quad \dots\dots\dots (15)$$

によって与えられる。したがって、二つの渦核外側での流れ関数は

$$\psi = \psi_+ + \psi_- \quad \dots\dots\dots (16)$$

図2 渦4極子の流線模様

ただし

$$\Psi_{\pm} = \Gamma \psi_{\pm} + (B_{xx} - B_{yy}) \frac{\partial^2 \psi_{\pm}}{\partial x^2} + (B_{xy} + B_{yx}) \frac{\partial^2 \psi_{\pm}}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (17)$$

渦中心は $da/dt = \partial \psi / \partial y(a, b)$, $db/dt = -\partial \psi / \partial x(a, b)$ に従って運動する。また、式(7)の E は $E_{xx} = -E_{yy} = \partial^2 \psi / \partial x \partial y(a, b)$, $E_{xy} = E_{yx} = \partial^2 \psi / \partial y^2(a, b)$ より算出される。

実際に計算を行うには初期渦核の配位を規定する必要がある。本モデルで考えている渦核は、内部で一様な渦度分布を持っただ円渦である。連続的に変化する渦度を持った一般の渦をこのようなだ円渦で近似するには、式(1)に則って渦核の作る特異性が同等になるように循環 Γ とだ円の特性量(r_e, σ_0)を定義すればよい。したがって、波長 λ の周期渦構造に対しては、次式によって等価なだ円渦が構成される。

$$\pi r_e^2 \omega_0 = \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \omega(x, y) \quad \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

$$\frac{\pi}{4} \frac{r_e^4}{\sigma_0^2} \omega_0 = \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy x^2 \omega(x, y) \quad \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

$$\frac{\pi}{4} r_e^4 \sigma_0^2 \omega_0 = \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy y^2 \omega(x, y) \quad \dots\dots\dots (18 \cdot c)$$

ここで、渦度分布に Stuart の解

$$\omega(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \right]^2 \frac{(1 - \alpha^2)}{\left[\cosh \left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right) - \alpha \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \right]^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

を用いれば、図4の結果を得る。図4の横軸は Stuart の解で渦度の集中度を表すパラメータ α であり、これに対してだ円渦の伸長度 $1/\sigma_0$ と、 λ で無次元化した等価円半径 r_e の変化が示してある。

4. 渦合体機構

行列 C で特性付けられる渦の寸法効果(4極子)と渦の回転角速度 Ω との間には等価円半径 r_e を介して相反関係が成立する。これより、特に r_e が零になるときは Ω は発散する。図4によれば、この状況は $\alpha = 1$ の場合に対応し、 $\sigma_0 = 1$ 、したがって式(11)と式(9)より $B = 0$ となる。式(1)の第1項で代表される従来

図3 二重だ円渦列(初期配置)

の離散渦モデルは、このような極限状況において妥当なものである。この近似での渦対の運動は比較的単純であり、各渦はケルビンの猫の目の名で知られる流線上を移動する。すなわち、初期に渦が領域 $\cosh(2\pi b/\lambda) - \cos(2\pi a/\lambda) < 2$ の内部にあれば、渦対は原点を中心として閉曲線を描き、その外側では開曲線を描いて互いにすれ違う。しかし、 α の値が小さくなると、寸法効果が効いてきて、渦対は多様な運動をするようになる。以下、これについて調べた結果を述べる。

図5に $\alpha=0.8$ の場合を例に取って、初期渦対の配置を $a=0.5\lambda$, $b=0.15\lambda$ に取った場合の渦中心の軌跡が描いてある。比較のため図5には Winant-Browand による実験結果⁽¹⁵⁾ もプロットしてある。両者の一致はかなり良好である。図示のような対渦の合体につながる閉軌道からのずれは、渦4極子 B の存在によって引き起こされる。図5にはだ円渦の配向を規定するパラメータ σ と ϕ の時間的変化も示してある。それによれば、 σ が初期値の回りに振動しているのに対して、 ϕ は渦の合体が起きるまで単調に増加しているのがわかる。また、合体の瞬間に σ は突然零まで落ちて、渦核が急激に大きく伸長していることを示している。合体前の周期的なだ円渦の変形は、仮想的に一定の E と Ω の流れ場を考えると、容易に理解できる。この場合、式(5)は一般の線形流れの中で変形する流体要素を支配する式と同じであり、条件

$$f^2 = \Omega^2 - (E_{xx}^2 + E_{yy}^2) > 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

が満たされるときには周期解を持つ。その理由は、剛体回転によって渦核が1方向に伸長されるのが防げられるからである。しかし、式(14)によれば、 Ω の大きさは核が円形から変形すると減少する。このことは、大きく伸長された渦核に対しては4極子の配向が固定されることを意味する。したがって、2つの4極子が、

お互いに引き合うような位置に来ると、接近する渦は4極子の効果を強化し、ついには式(20)の条件を満たさなくなると、渦は大きく変形して合体することになる。逆に、4極子がたまたま反発する配向で固定されたと仮定すると、二つの渦間の距離の増大は4極子の効果を弱め、渦の変形を周期的なものに戻すであろう。考えている問題では、 E と Ω の値は渦の移動とともに時間的に変化するもので、 E が Ω を越えて増大するような位置に渦が来ると、条件(20)が破たんして渦の合体が生じ得る。このようにして、著者らのモデルによれば、渦の合体は渦核の有限性による4極子の効果として理解できる。

実際には、二つの渦はともえ(巴)を描いて絡み合い、一つの渦に合体していくことになるが、本だ円近似モデルでそこまで記述することはできない。モデルは核がお互いに重なり合うまで近づいたときには妥当でなく、例えば、その限界を二つの渦核のすきまが渦の小径と等しくなる場合にとることができる。実験によれば、合体後の渦の直径は元の円渦の直径の約2倍になるから、合体に際して二つの渦に挟まれた流体がトラップされていることになる。

以上で明らかのように、二つの渦の干渉の仕方は渦間の距離 d によって変化する。 d が大きいときには渦中心の移動速度の誘起 ($1/d$ に比例する) が支配的であるが、 d が小さくなるにしたがって E ($1/d^3$ に比例する) が効いて渦は変形し、自転速度を変える。これに伴って渦4極子の効果が顕著になり d はますます小さくなる。これによりさらに高次の変形 ($1/d^4$ に比例する) が顕在化して、上で述べたようなともえになるであろう。本論文で展開した渦の記述法は、式(1)で高次項を含めたものまで拡張できる。しかしこの場合、展開式(1)に適合する渦核の形状はもはやだ円でな

図4 初期渦核の特性化

図5 対渦中心の軌跡と渦核の変形

く、係数を定める関係式が高度に非線形になって計算は簡単でない。ここで、二つの渦が近づいたときを想定して高次の変形がもたらす効果について補足しておく。式(5)に二次流れを加えることによってだ円渦核(座標系 O-XY をその主軸に一致させて取れば、式 $X^2\sigma^2 + Y^2/\sigma^2 = 1$ で表せる)がどのような変形を受けるかを調べる。考える二次流れの係数は流れ関数の導関数を渦中心で評価して得られる。しかも流れ関数が調和関数であることを考慮すると、一般に次の形に書き書せる。

$$\frac{u}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{dX/dt}{\sqrt{A^2+B^2}} = \beta(X^2 - Y^2) - 2\sqrt{1-\beta^2}XY \dots\dots\dots (21\cdot a)$$

$$\frac{v}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{dY/dt}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\sqrt{1-\beta^2}(X^2 - Y^2) - 2\beta XY \dots\dots\dots (21\cdot b)$$

$$\left(\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

図6には、 β をパラメータとして、上式より求めた微小時間 dt 後の変形しただ円の形状を実線で示してある。これからわかるように二次変形まで考えると渦核

図6 だ円核からの二次変形

は実際とよく似た形状が実現できる。円形渦からだ円渦への変形に付随して4極子が構成されたと同様に、図示の変形は6極子を作り、その強度は $(B_{xxx} - B_{xyy}) = -(\pi/12)\beta(r_e^6/\sigma^4)dt/\sqrt{A^2+B^2}$, $(B_{xxy} - B_{yyx}) = -(1/9)\beta(r_e^6/\sigma^4)dt/\sqrt{A^2+B^2}$ となるから長だ円ほどその効果は大きくなる。6極子が生成する流れ場は、 60° の角度で外向き流れと内向き流れが誘起される領域が入れ替わる。これによって他の渦の中心は移動しようとするが、互いに近づくにしたがい順次高次項が効くようになる。高次になればなるほど渦を動かす向きの流れは狭い角度に限られるので、わずかの回転でもすぐ逆向きの流れ域に入り、結局渦の移動はある程度近づくとはなくなり、合体が完了する。

図7に Stuart の渦度集中度パラメータ α を変えたときに渦の合体が起きる範囲を示してある。これは、図4によって特性付けられる初期のだ円渦の中心位置を $a = \pm\lambda/2$ に取り、それぞれの b の値に対して渦運動を追跡して求めたものである。合体は大変形を伴って渦が接近する場合をもって判定し、図7中丸印で示してある。おおまかに言って、 α が小さいほど、合体できる b の範囲は拡大する。しかし、細かく見ると、合体が生ずるかどうかは、流れとだ円渦の配向にも依存するため、その境界は複雑に入り組んでいる。また、考えている区間 $-\lambda < x < +\lambda$ において合体しなかった渦についても、4極子の作用によってだ円渦の場合途中で渦核は大きく伸長されるので、同じ渦が次に他の渦と対を作るときには合体を起こすものも多い。ここに示された初期条件による渦運動の変化は、大規模渦構造に現れる渦運動の多様性につながるものとし

図7 合体する渦対の初期配置

図 8 渦の入れ替え

て、興味深いものがある。

以上まとめて、可能な対渦の軌跡には 3 種類の代表的な形がある。(1) 閉軌道を描く場合、(2) 合体の起きる場合、それに(3) 図 8 に示すように途中で渦の位置の入れ替えが起きる場合である。最後の形は、(a)と(b)の境で起き、二つの渦が最も近づいたとき、だ円渦の長軸が対渦の中心を連ねる線に一致する場合に可能である。その理由は図 8 に基づいて次のように説明される。図 8 の P の位置に渦が来たとき、4 極子の配向が互いに渦を引き合う向きにあると、対渦は原点回りに回転しながら間隔を縮める。この間それぞれのだ円渦は自己回転し、Q の位置に来たときにだ円の長軸が対渦の中心を連ねる線に一致して、4 極子の効果が消失する。このとき渦間隔は小さくなっているから、渦は大きな速度で原点回りに回転する。そして R の位置に来ると、自己回転によって 4 極子の配向は互いに反発しあう向きに転じているから、渦の間隔を広げて渦の入れ替わりを完了する。いま述べた例は入れ替わりが完全に起きる場合であるが、実際には種々の亜流が存在し得る。いずれの場合にも、渦の入れ替わりが起きるには、最も渦が近づいた状態で上に述べたような特殊な配向になっているか、あるいは円形渦に近づいていて、4 極子の効果が消滅していることが肝要である。

4. お わ り に

渦対過程の基本的な物理像をだ円渦モデルに基づいて明らかにした。モデルでは、通常エディと呼びならわされている局所化された渦度分布(渦核)を、その中心に置いた 2 種類の特異点によって特性付ける。すなわち(1) 従来の離散渦モデルで使用されている時間的に不変な循環と(2) だ円渦領域に関連した 4 極子であり、4 極子の強度は自己回転速度と他の渦の存在

によって作られるひずみ速度場による。このモデルにより渦領域の有限性が対をなす渦の合体を引き起こすうえで基本的に重要な要素であることがわかった。さらに、渦対の合体は、対渦の 4 極子が互いに引き合う配置に来て、かつ渦核のひずみ速度の大きさが自己回転速度の大きさを超える状態に達したときに起きることが明らかになった。

本モデルによれば核外の流れ場の計算が大幅に簡略化でき、物理を讀取することも容易である。別報⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾にて、本モデルを応用した大規模渦構造場での拡散燃焼の解析を行っている。火炎位置での流体の体積膨張の効果を組み込むことにより、渦と火炎の干渉がもたらす燃焼特性を同定して、実験および厳密な数値計算結果と比較して定性的に良い対応を得ている。

本研究を行うに当たっては 1 部科学研究費(一般 C)の補助を得た、記して謝意を表する。

文 献

- (1) McMurtry, P. A. Jou, W. H., Riley, J. J. and Metcalfe, R. W., *AIAA J.*, **24** (1986), 962.
- (2) Cetegen, B. M. and Sirignano, W. A., *Proc. 22nd Symp. (Int.) Combust.*, The Combustion Institute, (1988), 489.
- (3) Ghoniem, A. F. and Krishnan, A., *Proc. 22nd Symp. (Int.) Combust.*, The Combustion Institute, (1986), 665.
- (4) Jou, W. H. and Riley, J. J., *AIAA J.*, **27** (1989), 1543.
- (5) 店橋・宮内, 第 28 回国内燃焼シンポジウム講演集, (1990), 25.
- (6) Yamashita, H., Kushida, G. and Takeno, T., *Proc. R. Soc., London, Ser. A*, **431** (1990), 301.
- (7) Ghomiem, A. F. and Heidarinejad, G. H., *Combust. Flame*, **83** (1991), 1.
- (8) 王・藤原, 日本航空宇宙学会誌, **40-460** (1992), 295.
- (9) Breidenthal, R. E., *J. Fluid Mech.*, **109** (1981), 1.
- (10) Broadwell, J. E. and Breidenthal, R. E., *J. Fluid Mech.*, **125** (1982), 397.
- (11) Broadwell, J. F. and Mungal, M. G., *Proc. 22nd Symp. (Int.) Combust.*, The Combustion Institute, (1988), 579.
- (12) Roshko, A., *AIAA J.*, **14** (1976), 1349.
- (13) Michalke, A., *J. Fluid Mech.*, **19** (1964), 543.
- (14) Kelly, R. E., *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 657.
- (15) Winant, C. D. and Browand, F. K., *J. Fluid Mech.*, **63** (1974), 273.
- (16) Oran, E. S. and Boris, J. P., *Numerical Simulation of Reactive Flow*, (1987), 382, Elsevier, New York.
- (17) Stuart, J. T., *J. Fluid Mech.*, **29** (1967), 417.
- (18) 今井, 流体力学(前編) (1977), 179, 180, 裳華房, 東京.
- (19) Umemura, A. and Kachi, S., *Proc. 13th ICDERS*, Nagoya, (1991).
- (20) Umemura, A., *Proc. 24th Symp. (Int.) Combust.*, (1992), 413.