回転同軸二重円筒内の流れの数値シミュレーション*

河村 哲也^{*1}, 岩津 玲磨^{*2}

Numerical Study of the Flow Between Concentric Cylinders

Tetuya KAWAMURA and Reima IWATSU

The flow between concentric cylinders is numerically studied by means of a finite difference method. A third-order upwind scheme is applied to the advection terms of the Navier-Stokes equations. The outer cylinder is at rest and the inner cylinder rotates at a constant speed. The ratio of the radii of inner and outer cylinders is fixed at 1.14 and the height of the cylinders, twenty times longer than the gap between the two concentric cylinders. Cyclic boundary condition is applied in the axial direction. The computation is carried out at the Reynolds numbers, $0.92R_c$, $1.1R_c$, $1.5R_c$ and $2.0R_c$, where R_c is the theoretical critical Reynolds number of the Couette flow between the concentric cylinders of infinite length. In the present study, Couette flow is realized at the Reynolds number of $0.92R_c$ and steady Taylor vortex flow is obtained for the cases with $R_e \geq 1.1R_c$ when impulsive start from the rest is employed. Wavy Taylor vortex flow is attained for the cases with $1.5R_c$ and $2.0R_c$ if small amplitude of random disturbances is added in the Taylor vortex flow solution as an initial condition. Present numerical results are in qualitative consistency with the previously reported studies, and this will give credence to the utilization of present numerical method.

Key Words: Internal Flow, Viscous Flow, Finite Difference Method, Third-Order Upwind Scheme, Couette Flow, Taylor Vortex Flow, Wavy Taylor Vortex Flow

1. はじめに

層流から乱流への遷移には大別して二つの形がある。一つは“突発形”と呼ばれるもので、微小じょう乱に対して流れは安定であるが十分高いレイノルズ数では乱流となり中間のレイノルズ数では乱流と層流の入り混った状態が存在するというもので、円筒内 Poiseuille 流れ、外円筒の回転速度が卓越した場合の Taylor-Couette 流などの乱流遷移がその代表的な例になっている。もう一つは“スペクトル遷移形”と呼ばれるもので、微小じょう乱の出現後種々の流れを経て最終的に乱流に移行するもので、自由剪断流や、内円筒の回転速度が卓越した場合の Taylor-Couette 流の乱流遷移などが代表例である。一方、二次元 Poiseuille 流や平板境界層の遷移はその中間的なタイプと見ることができる。

著者らは、層流の乱流への遷移を三次精度の上流差分を用いてどの程度シミュレート可能なのかを調べているが、中間形である二次元 Poiseuille 流れの遷移に対してはある程度の成果を得ることができた⁽¹⁾ので、

本研究ではスペクトル遷移形の代表例である Taylor-Couette 流の外円筒静止の場合を調べる。Taylor-Couette 流は、Taylor の先駆的な研究⁽²⁾の後、種々の理論的・実験的な研究が行われてきた流れであるが、最近の電子計算機の進歩により、数値的な研究も増加しつつある。その中で Moser⁽³⁾や Marcus⁽⁴⁾はスペクトル法を用いた三次元計算を行い、Taylor 渦が不安定となって方位角方向に進行する波をとまなう“wavy”な流れを数値的に得ることに成功している。一方、それらの計算では無限に長い円筒を仮定し、軸方向に基本波数 α に関する周期性を課しているため、実際には一対の Taylor 渦の挙動を調べていることになっている。これに対して、本研究では軸方向に周期境界条件を課してはいるが、その周期は、一周期内に 10 対程度の Taylor 渦がはいることのできる長さをとっている。したがって一周期内で各渦の大きさが同一でない流れや渦の個数の時間変化も取扱うことができるため、より実験条件に近い計算になっている。

2. 基礎方程式と計算方法

基礎方程式は連続の式(1)と Navier-Stokes 方程式(2)である。

$$\operatorname{div} V = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

* 原稿受付 平成 4 年 7 月 9 日。

^{*1} 正員、千葉大学工学部 (〒263 千葉市稲毛区弥生町 1-33)。^{*2} 正員、計算流体力学研究所 (〒152 東京都目黒区原町 1-22-3)。

$$\partial V/\partial t + (V \cdot \nabla) V = -\text{grad } p + \frac{1}{Re} \Delta V \quad \dots (2)$$

ここで V は流速, p は圧力, Re はレイノルズ数を表す。(なお本研究では代表速度として内円筒の周速度 $r_a V_{\theta a}$, 代表長さとして円筒間距離 $r_b - r_a$ をとった。) この計算では式(1), (2)を連立させて解くかわりに, MAC 法⁽⁵⁾に従って, 式(2)の発散をとって式(1)を考慮して得られる圧力に関する Poisson 方程式

$$\Delta p = -\text{div} (V \cdot \nabla) V + \frac{D}{\Delta t} \quad \dots (3)$$

を連立させて解を求める。

ここで式(3)の右辺第2項の Δt は式(2)を時間積分するときの時間刻みで, D は着目している時間における $\text{div } V$ の差分近似値であり, 一般には零ではない小さな値を持っている。この項は, 式(2), (3)を差分近似して解いて得られる V が, 常に式(1)を近似していることを保証するための補正項となっている。

同軸二重円筒間の流れを問題とするため式(2), (3)に円柱座標系 (r, θ, z) を用いるのが便利である(図1)。このとき式(2), (3)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta V_z \quad \dots (2 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \quad \dots (2 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left(\Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \quad \dots (2 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \\ = -\frac{\partial}{\partial z} \left(V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) \\ + \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right\} \quad \dots (3)' \end{aligned}$$

ただし Δ は, A を V_z または V_r または V_θ として

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (1/r) \times \partial(r \partial A / \partial r) / \partial r + (1/r^2) \times \partial^2 A / \partial \theta^2$$

である。なお速度変化の大きい壁 ($r = r_a$: 内円筒, r

$= r_b$: 外円筒) の近くでは差分格子は細かいほうがよい, 半径方向に次の変換を用いた:

$$r = r_a + (r_b - r_a) \times \left(1 + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \frac{e^c + 1}{e^c - 1} \right) \times \frac{1}{2} \quad \dots (4)$$

ただし $-c \leq x \leq c$ である。また $c = \log(1+b)/(1-b)$ であり, b は格子の集中度を決めるパラメータであり 1 より小さく 1 に近づくほど壁面に格子が集中することになる [この研究では, $b = 0.95$ とした]。

式(3)'の各項はすべて二次精度中心差分で近似した。一方式(2)については, 空間微分は非線形項を除き二次精度中心差分で近似し, 非線形項は三次精度上流差分

$$\begin{aligned} f \frac{\partial U}{\partial X} = f \frac{-U_{i+2} + 8(U_{i+1} - U_{i-1}) + U_{i-2}}{12 \Delta X} \\ + |f| \frac{U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2}}{12 \Delta X} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

で近似した。また時間積分は二次精度の Adams-Bashforth 法を用いて行った。すなわち $du/dt = f(u)$ に対して

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \{ 3f(u^n) - f(u^{n-1}) \} / 2 \quad \dots (6)$$

を用いた。

解を求める手順は, まず初期条件または前の時間ステップでの速度より式(3)'を差分近似した式の右辺を計算し, S. O. R. 法により圧力の Poisson 方程式を解き, 圧力を求める。次の時間ステップでの速度は, 得られた圧力と現在の速度より式(6)を参照して得られる式(2)の差分近似式より求める。この手続きを必要な時間ステップ繰返す。なお, 時間発展させるときに二次精度の Adams-Bashforth 法を用いたため, 式(6)よりわかるように一つ前の時間ステップでの f を記憶しておく必要がある。また最初のステップではこの方法は使えないため, このときに限り Euler 前進差分を用いた。格子システムは, 速度と圧力を同一点で評価する通常格子(図1)を用いた。

壁面での境界条件は, 速度に対しては粘着条件 ($V_\theta =$ 回転速度, $V_r = 0$) を用いる。また圧力の値は粘着条件を Navier-Stokes 方程式に代入して得られる

$$\partial P / \partial r = V_\theta^2 / r - 1/Re \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \quad \dots (7)$$

を差分近似した式より求める。ただし式(7)で2階微分を中心差分で近似するとき仮想点での値を決める必要が起こるので図1のように決めた。非線形項に三次精度の差分を用いたため, やはり仮想点での速度の値を必要とするのでこの場合も図1のように決めた。

他の面での境界条件は周期条件を課し, また初期条

件としては Couette 流の厳密解, 式(8), を用いた.

$$V_r = V_z = 0$$

$$V_\theta = \frac{(V_{\theta a} - V_{\theta b})r_a^2 r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} \frac{1}{r} + \frac{V_{\theta b}r_b^2 - V_{\theta a}r_a^2}{r_b^2 - r_a^2} r \quad \dots\dots\dots(8)$$

ただし $V_{\theta a}$, $V_{\theta b}$ は内外円筒の回転速度である.

3. 計算結果

3.1 計算条件 Taylor-Couette 流の流れのパターンを決めるパラメータは多数ありすべてを変化させて調べることは現実的でないため, 本研究では内円筒回転, 外円筒静止の場合のみ取扱う. これは, 理論的にも実験的にも数値的にも最もよく研究されているケースである. この場合, 流れの支配パラメータは内円筒と外円筒の半径比 r_b/r_a , 二円筒間の距離と円筒の高さ h の比 $h/(r_b - r_a)$ およびレイノルズ数 $Re = r_a V_{\theta a}(r_b - r_a)/\nu$ (ν : 動粘性係数) である. 本研究では Fenstermacher ら⁽⁶⁾ の実験に従い, $r_b/r_a = 1.14$, $h/(r_b - r_a) = 20$ に固定し, レイノルズ数を変化させて計算を行った. ただし, h とは, 本計算では軸方向にも周期条件を課しているため, 一周期の長さのことであり, 実験とは完全な対応はついていない. 底面をつけた計算を行うことは, 境界条件を少し修正すれば可能であるが, 周期条件を選んだ理由として(1)実験的に知られているように流れのパターンは履歴(ヒステリシス)にもよるのでたとえ底面をつけた計算を行ったとしても実験に完全に対応した計算が困難であること, (2)周期条件を課したため一応無限の長さの円柱の計算になっているが, 一つの周期内に 10 対程度の Taylor 渦が入り, 周期内での各 Taylor 渦の大きさの変動や個数の変化を取扱えるため, 一對の Taylor

渦のみの挙動を調べる Moser などの計算よりは実験に近くなっていること, (3)底面の影響を調べる場合の比較データになること, そして(4)本計算法で最も計算時間のかかる部分である圧力の Poisson 方程式の反復解法が, 周期条件を課したほうが収束が速いため, 同じ計算時間が許されているとき, より多くの格子点をとった計算ができることなどである. なお有限長の円筒を用いた影響は実験的に Cole⁽⁷⁾ により調べられ, wavy な Taylor 渦が発生する臨界レイノルズ数が, $h/(r_b - r_a) = 20$ のとき, 無限長とした理論計算の予測値に比べ 13% ほど高くなるという結果が得られている.

計算に用いた格子数は仮想点まで含めると軸方向に 203, 周方向に 64, 半径方向に 23 点である (ただしレイノルズ数が 110 の場合のみ, それぞれ 43, 45, 23 である). 計算での時間刻みは 0.001 で, レイノルズ数が 110, 131, 179, 238 の場合を行った. なお理論的に予測される臨界レイノルズ数 (Taylor 渦が発生するレイノルズ数) Re_c は 119 であるので上記の値はそれぞれ Re_c の 0.92, 1.1, 1.5, 2.0 倍となっている.

3.2 計算結果の表示法 Taylor 渦や wavy な Taylor 渦をわかりやすく表示するため, ある面を固定してその面に射影した速度 (非定常の場合はある瞬間の速度を凍結して用いる) で marker 粒子を移動させてできる軌跡 (すなわち, Trace of Projected Velocity の意味で以後 TPV と呼ぶことにする) を用いることにする. 例えば図 2 (a) は定常な Taylor 渦がある場合, $r = \text{const.}$ の面内に速度を射影したときの TPV (TPV_r と略記, 同様に $\theta = \text{const.}$ の場合は TPV_θ と略記) を描いたもので, この場合, 内側に流れがひきこまれる線に沿って粒子が集まるので, 黒いすじができると考えられる. このときすじとすじの間に一對の Taylor 渦が存在することになる. またもし流れが wavy になればすじも波うつと考えられる (これが Cole などの実験で撮られている可視化写真に最も近いと思われる). なお, 定常な Taylor 渦の場合でも, 速度の 3 成分を用いて描いたふつうの意味での particle path をつくるとらせん軌道を描くため, 二次元的に表示すると波うつに見える. したがってこの場合, particle path を用いた表示はあまり適当ではない. 次に wavy な Taylor 渦の存在をより直接的に示すため, 流れの中に特定の点を指定して, その点での半径方向の速度の時間変化 (Time history) も表示した. 本研究では r, θ は同じで軸方向の距離 z の値が異なる 3 点での V_r を表示した. もし定常な Taylor 渦が存在すれば, V_r はそれぞれの 3 点で時間的に変化

図 1 格子システムと境界条件

しないある一定値をとるが、もし wavy になっていたとすると速度の異なった流体が周期的に来ることになり、 V_r は周期的に変化するある値をとることになる。図 2 (b) はもし Taylor 渦が波うって “wavy” な構造を持つようになった場合、 V_r がどのような変動をするかを模式的に示した図である。ただし、この場合渦対は固定し観測点を正弦的に動かしている。点の位置や変動幅により種々の波形が得られることがわかる (実際には Taylor 渦により生成される二次的な渦も存在するものと考えられるため、波形はさらに複雑になると考えられる)。なお、 V_r の時間変化図の周期を測ることにより進行波の速度を計算することができる。

3.3 計算結果 最初にテスト計算として Re より低いレイノルズ数で、格子数も少ない計算を行った。この場合に限り初期条件は静止とした。図 3 に軸

(a) Trace of Projected Velocity 定常な Taylor 渦の場合 (左: $\theta = \text{const.}$ 面, 右: $r = \text{const.}$ 面, $r \approx r_o$ では射影された速度場による軌跡は外円筒のはく離線近くに集まる)

(b) 速度成分 V_r の時刻歴. “wavy” な Taylor 渦の場合 (渦が z 方向に振動するとき、空間に固定されたある点における v_r の時間変化を模式的に示す)

図 2 計算結果の表示方法

に垂直なある面での速度ベクトルを示すが、予想どおり Couette 流が実現されている。このことは、図 3 には示されていないが、 V_z も V_r も零であることや、どの断面でも速度分布が同じであることからわかる。次に図 4～8 に $Re=179$ の場合の計算結果を示す。図 4 は横軸に時間、縦軸に半径方向の速度成分 V_r をとった図で、 (r, θ) が一定で軸方向の距離の異なる 3 種類の固定点での V_r の時間変化を同じ図に描いている。図 4 の点 A までは V_r はほとんど零であり、Couette 流が実現していると考えられるが、点 A よりあとで V_r は値を持ち始め別の流れに移行するのがわかる。点 A を過ぎてしばらく (無次元時間 $T=80$ 程度まで) の間は V_r の値が時間的に変動するが、それを過ぎると V_r の値が時間的にほぼ一定の値を持つようになり、流れが定常に近づいたことを示している。図 5 は、図 4 で $T=300$ (内円筒が約 48 回転した時間で流れはほぼ定常) での速度を用いて描いた TPV_r, TPV_o を一つの図に表示したものである。この場合 11 対の渦対があり、各渦の大きさはほぼ一定であることがわかる。なお、 $T=600$ まで計算を続行したが、 $T=300$ の場合とほとんど差がなかった。次に、計算の初期

図 3 Couette 流の速度ベクトル図 ($Re=110=0.92Re_c$, $z=\text{const.}$ 面)

図 4 速度成分 V_r の時刻歴 ($Re=179=1.5Re_c$, V_r を表示する 3 種の固定点の位置は、 $r=1.108$, $\theta=0.625\pi$, z の位置は上から 4.926, 5.123, 5.320. 固定点の位置は以下の図でも同じ)

条件として、一様乱数を用いて主流の2.5%の大きさのじょう乱を発生させ、それに $T=300$ の計算結果を重ね合わせた速度分布を用いた計算を行った。図6はじょう乱を加えた時刻を零として、 $T=0\sim 300$ の V_r の時間変化を描いた図で、わかりやすくするため、各点につき原点を上下方向に0.15ずらせ、かつそれぞれにつき $V_r=0$ の線も表示した。なお縦軸の目盛はまん中の線を基準にとっている(以下の図も同様)。図6より、じょう乱が徐々に成長し、 $T=60$ 以降、 V_r に周期的な変動が見られるようになることがわかる。このことは図2で説明したように、Taylor渦が“wavy”な構造を持った渦に変化したことを示すものと考えられる。 $T=100$ において図5に対応する2種

図5 定常なTaylor渦流 ($Re=179=1.5R_c$, 図4の $T=300$ のデータを表示, 11対の渦対がある状態。)なお図中の X, Y, Z は図を表示するときの標準デカルト座標で、この場合 X 方向が円柱軸に対応している(図7, 8, 10, 11, 12も同様)

図6 速度成分 V_r の時刻歴 ($Re=179=1.5R_c$, 初期条件にじょう乱を加えた場合。ただし $T=100\sim 200$ の間は省略した)

類のTPVを描いた図を、図7(a)に示すが、図7(a)からもTaylor渦がwavyになっていることがわかる。なおTaylor渦は11対で個数には変化がない。図7(b)は円周をとりまく渦の個数をはっきりさせるために円周ひとまわり ($0\leq\theta\leq 2\pi$) について描いたTPVであるが、図7(b)より例えば波の山の数えることにより、一周の間に5個の波が存在していることがわかる[図7(b)の矢印]。この波の進行速度は図6より見積もることができる。すなわち図6の波形の5周期分の時間で進行波が一回転すること、および内円筒は 2π の時間で一回転することを用いると、進行波の速さはおおよそ内円筒の速さの0.45倍になっていることがわかる(図6の点B, Cより計算)。図8(a), (b)は $T=300$ でのTPVである。この場合特徴的なことは、この時刻において円周をとりまく波の個数が5から4に減っていることである。ただし波の進行速度は図6の点D, Eより見積もると内円筒の速さの0.45倍であり、変化はないことがわかる。

(a) $\theta=0$ 面と $r=1.13$ 面 ($\theta=0\sim\pi$)

(b) $r=1.13$ 面 ($\theta=0\sim 2\pi$)

図7 “wavy”なTaylor渦 ($Re=179=1.5R_c$, $T=100$. 11対の渦対と円周方向に5個の波の状態)

(a) $\theta=0$ 面と $r=1.13$ 面 ($\theta=0\sim\pi$)

(b) $r=1.13$ 面 ($\theta=0\sim 2\pi$)

図8 “wavy”なTaylor渦 ($Re=179=1.5R_c$, $T=300$. 11対の渦対と円周方向に4個の波の状態)

図 9 速度成分 V_r の時刻歴 ($Re=238=2R_c$, 初期条件にじょう乱を加えた場合, ただし $T=190\sim300$ の間は省略した)

図 10 “wavy” な Taylor 渦 ($Re=238=2R_c$, $T=120$. 12 対の渦対と円周方向に 5 個の波の状態)

図 11 “wavy” な Taylor 渦 ($Re=238=2R_c$, $T=160$. 9 対の渦対と円周方向に 5 個の波の状態)

図 12 “wavy” な Taylor 渦 ($Re=238=2R_c$, $T=460$. 9 対の渦対と円周方向に 5 個の波の状態)

表 1 計算結果 (表中, 波の進行速度は内円筒の速さを基準としている)

R/R_c	no disturbance	2.5% disturbance
0.92	Couette flow	Couette flow
1.1	Couette flow	Taylor vortex flow (10 pairs)
1.5	Taylor vortex flow (11 pairs)	Wavy vortex flow (11 pairs) Number of waves 5 → 4 Wave speed 0.45
2.0	Taylor vortex flow (12 pairs)	Wavy vortex flow (12 pairs → 9 pairs) Number of waves 5 Wave speed 0.4

次に $Re=238$ の場合の計算結果を示す。この場合も $Re=179$ の場合と同様に積極的にじょう乱を加えない限り, $T=600$ までの時間内では安定な Taylor 渦ができるだけで wavy にはならない。そこで初期条件として $T=40$ での計算結果に主流の 2.5% のじょう乱を加えた速度分布を用いて計算を行った。図 9 は図 4 と同じく V_r の時間変化を (r, θ) が一定で軸方向の距離の異なる 3 点について描いたものである。この場合, 波形は $T=50$ 以降, $T=120 \sim 160$ 間を除いて, 徐々に変化して, $T=400$ 以降はほぼ一定となる。図 10~12 に特徴的な時間である $T=120, 160, 460$ の場合の TPV を示す。図 10 は $T=120$ の場合で, 12 対の wavy な Taylor 渦が認められるが, 各 Taylor 渦ごとの大きさには少し差がある。図 11 は V_r の波形に変化が生じた後の $T=160$ での TPV である。特徴的なことは Taylor 渦が 9 対に減っていることで, $T=120 \sim 160$ での波形の変化は渦の個数の変化によるものと考えられる。なお $T=160$ において各渦の大きさがまちまちなのは, 渦の融合が終わって時間があまりたっていないためだと考えられる。図 12 は V_r の波形が最終的にほぼ定常になった時刻 ($T=460$) での TPV で, 図 12 より渦対はやはり 9 対で変化はないが, 各渦の大きさはほぼ一定になっていることがわかる。円周をとりまく波の個数は図 10~12 の下の図を見てもわかるようにすべて 5 個であり, $Re=179$ の場合とは異なり変化はない。なお波の進行速度は図 9 の点 F, G より見積もるとおよそ内円筒の速さの 0.40 倍である。

4. ま と め

三次精度の上流差分を用いて Taylor-Couette 流で外円筒静止, 内円筒回転の場合の数値シミュレーションを行った。その結果, レイノルズ数の値に応じて, Couette 流, Taylor 渦流, “wavy” な Taylor 渦流を数値的に得ることができた。ただし Taylor 渦流はかなり安定で, wavy な流れを比較的短時間の間に実現するためには, ある程度のじょう乱 (本研究では主流の 2.5% のじょう乱) を加える必要があった。また一度 wavy な流れになっても, それが必ずしも安定でなく, レイノルズ数の値によって, 進行波の個数が変化したり, Taylor 渦対の個数が変化したりすることが, 数値的に確かめられた。表 1 にこの計算で得られた結果をまとめて示す。

本計算で用いた三次精度の上流差分は, より高いレイノルズ数の流れに対しても安定に計算ができる。したがって Taylor-Couette 流などのスペクトル遷移形の乱流遷移の, より詳細な解明に有力な計算法になるものと期待される。

なお計算には, 計算流体力学研究所の NEC SX-2 を用いた。100 000 ステップ ($T=100$) をすすめるのに要した計算時間は約 3 時間であった。

文 献

- (1) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA Paper*, 85-0376(1985).
- (2) Taylor, G. I., *Philos. Trans. R. Soc. Ser., A*, **223**(1923), 289.
- (3) Moser, R. D., Moin, P. and Leonard, A., *J. comput. phys.*, **52**(1983), 524.
- (4) Marcus, P. S., *J. Fluid Mech.* **146**(1984), 65.
- (5) Harlow, F. H. and Welch, J. E., *Phys. Fluid*, **8**(1965), 2182.
- (6) Fenstermacher, P. R., Swinney, H. L. and Gollub, J. P., *J. Fluid Mech.*, **94**(1979), 103.
- (7) Cole, J. A., *J. Fluid Mech.*, **75**(1976), 1.