有限体積型 TVD スキームによる
非定常斜め衝撃波のマッハ反射の数値解析*棚橋 隆彦^{*1}, 谷川 力造^{*2}
天野 真一^{*3}, 増永 晶久^{*3}Numerical Analysis of Nonstationary Oblique Shock Wave Reflections
over Compression Corner using TVD-FVMTakahiko TANAHASHI, Rikizou TANIGAWA,
Shinichi AMANO and Akihisa MASUNAGA

Numerical simulations of nonstationary oblique shock-wave reflections over compression corner have been conducted. The two-dimensional Euler and Navier-Stokes equations are solved numerically by a TVD scheme proposed by Harten with modified numerical flux function. The calculations have been carried out for various shock reflections. The present results show good agreement with the experimental results obtained by Deschambault and Glass. In particular, the viscous effect on the shock reflection process is significant in stimulating the lambda shock wave at the corner.

Key Words: Shock Wave Reflection, Mach Reflection, Compression Corner, Finite Volume Method, TVD Scheme, Navier-Stokes Equation

1. 緒言

衝撃波は、物体の壁面に達するとその方向を変え、もとの媒質中を新しい方向に進む。これを衝撃波の反射という。衝撃波の反射に関する研究は古くから行われていたが、特に1878年のMachによる反射形態(マッハ反射)の発見が重要である。そして、1940年代になると、正常反射に対する二衝撃波理論およびマッハ反射に対する三衝撃波理論がNeumannやCourant-Fredricksらによって確立された⁽¹⁾⁽²⁾。特に進行衝撃波の傾斜面からの反射に関する研究は広く行われ、その結果、反射形状にも様々な種類があることが観察されている⁽³⁾⁽⁴⁾。そして現在、この場合に起こり得る反射形態は正常反射・単純マッハ反射・複合マッハ反射・二重マッハ反射の4種類に大分類されている。しかし、単純マッハ反射における反射衝撃波の反射角や正常反射からマッハ反射への遷移についての実験と理論との相違、あるいは複合マッハ反射や二重マッハ反射の発生原因やその条件および流動機構などに関して今なお現在よくわかっ

ていない⁽⁵⁾。そこで、本論文では数値解析によってマッハ反射の反射形態にともなう諸現象の解明を試みる。数値解析手法は、Harten-YeeらのTVDスキームを有限体積法に拡張した、二次精度の有限体積型TVDスキームを用いる。

2. 支配方程式

2.1 支配方程式 支配方程式として、保存形表示された2次元圧縮性の無次元化されたNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

を用いる。ここで、各ベクトル $\mathbf{U}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ は独立変数からなる組で

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ R_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

* 原稿受付 平成4年6月20日。

^{*1} 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 准員, 石川島播磨重工業(株) (〒188 田無市向台町3-5-1)。^{*3} 学生員, 慶應義塾大学大学院。

と表される。ここで、式中の R_4 と S_4 および各応力テンソルの成分はそれぞれ以下のように示される。

$$\begin{aligned} R_4 &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\mu}{P_r(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial x} \\ S_4 &= u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\mu}{P_r(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y \\ \tau_{xy} &= \mu(u_y + v_x) \\ \tau_{yy} &= (\lambda + 2\mu)v_y + \lambda u_x \end{aligned} \quad (3)$$

また、 ρ は密度、 u と v はそれぞれ x と y 方向の速度成分、 e は単位体積当たりの総エネルギーである。そして、圧力 p ・温度 T ・音速 a とこれらの独立変数の間には状態方程式と音速の定義式

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right) \quad (4)$$

$T = a^2 = \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right)$ が成立する。そして、 γ は比熱比、 μ および λ はそれぞれ第1粘性係数、第2粘性係数である。この両者の間には Stokes の仮定 ($3\lambda + 2\mu = 0$) が成り立つものとし、第1粘性係数 μ の決定には Sutherland の式を適用する。

なお、各物理量はすべて代表長 $\bar{l}$ 、一様流密度 $\bar{\rho}_0$ 、一様流の音速 $\bar{a}_0$ 、一様流の第1粘性係数 $\bar{\mu}_0$ を用いて以下のように無次元化が施されている。ただし、“-” は単位をもつ有次元量を表す。

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}/\bar{a}_0, \quad v = \bar{v}/\bar{a}_0, \quad x = \bar{x}/\bar{l}, \quad y = \bar{y}/\bar{l} \\ \rho &= \bar{\rho}/\bar{\rho}_0, \quad t = \bar{t}/(\bar{l}/\bar{a}_0), \quad p = \bar{p}/(\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2) \\ e &= \bar{e}/(\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2), \quad \mu = \bar{\mu}/\bar{\mu}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

これらの代表量によって定義される3個の無次元数は Reynolds 数 $Re = \bar{\rho}_0 \bar{u}_0 \bar{l}/\bar{\mu}_0$ 、Prandtl 数 $Pr = \bar{C}_p \bar{\mu}_0/\bar{k}_0$ 、代表 Mach 数 $M_0 = \bar{u}_0/\bar{a}_0$ である。ただし、 k は熱伝導率、 C_p は定圧モル比熱、 u_0 は一様流の速度である。

2.2 座標変換 任意の曲線座標系に対応して数値計算をするために、座標変換

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

を用いる。chain rule と行列の演算によって、Jacobian と微分関係式

$$\begin{cases} J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \\ \xi_x = J \eta_y, \quad \xi_y = -J x_\eta \\ \eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi \end{cases} \quad (7)$$

が求まる。支配方程式を座標変換すると、

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \widehat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

となる。ただし、“ $\widehat{}$ ” は座標変換された物理量である。

3. 数値解析手法

3.1 有限体積法 一般座標系における ξ と η 方向をそれぞれ下付き添字 j と k に対応させると、支配方程式(8)の半離散化式は

$$\begin{aligned} (\widehat{U}_{j,k})_\tau &+ \widehat{E}_{j+1/2,k} - \widehat{E}_{j-1/2,k} + \widehat{F}_{j,k+1/2} - \widehat{F}_{j,k-1/2} \\ &= \frac{1}{Re} (\widehat{R}_{j+1/2,k} - \widehat{R}_{j-1/2,k} + \widehat{S}_{j,k+1/2} - \widehat{S}_{j,k-1/2}) \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。ここで、添字付きのある $\widehat{E}, \widehat{F}$ 等は計算セルの境界で評価される数値流束、 $\widehat{U}_{j,k}$ は各セルの中心で定義された保存変数の数値近似値を表す。また、半整数の下付き添字は計算セルの境界(セルサーフェス)を、整数の下付き添字は計算セル自身あるいはセル中心を表す。

式(9)で与えられた半離散化された保存則は、以下のような関係式を導入すると、有限体積的な離散化と見なすことが出来る。すなわち

$$\widehat{U}_{i,j} = U_{i,j} A_{i,j} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_{x,y}}{J} \right)_{j \pm 1/2} &= n_{x,y} \{ (k-1/2), (k+1/2) \}_{j \pm 1/2} \\ \left(\frac{\eta_{x,y}}{J} \right)_{k \pm 1/2} &= n_{x,y} \{ (j-1/2), (j+1/2) \}_{k \pm 1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

である。上式で、 A はセル面積、 $n_{x,y}\{a,b\}$ は、2点 a, b から成る面の法線要素ベクトル(長さが a, b 間の距離に等しく、線分 ab に垂直なベクトル)の x, y 成分を表す。

次に、セル面積と法線要素ベクトルの計算法を示す。まず、反時計まわりの4つの頂点 a, b, c, d で定義された4辺形セルの面積は次の公式で与えられる。

$$\begin{aligned} A(a, b, c, d) &= |x_a(y_b - y_d) + x_b(y_c - y_a) \\ &\quad + x_c(y_d - y_b) + x_d(y_a - y_c)|/2 \end{aligned} \quad (12)$$

頂点 a, b で構成される法線要素ベクトル $n_{x,y}\{a, b\}$ は、 a, b を昇順にとると、

$$\begin{aligned} n_x\{a, b\}_{k \pm 1/2} &= -(y_b - y_a)_{k \pm 1/2} \\ n_y\{a, b\}_{k \pm 1/2} &= +(x_b - x_a)_{k \pm 1/2} \\ n_x\{a, b\}_{j \pm 1/2} &= +(y_b - y_a)_{j \pm 1/2} \\ n_y\{a, b\}_{j \pm 1/2} &= -(x_b - x_a)_{j \pm 1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

3.2 壁面境界条件 壁面境界条件として Reddall による方法⁽⁶⁾を採用する。Reddall は壁の相互作用を一次元波の反射として取り扱うことによって、固体壁上の圧力を次のように定めた。

今、 $\mathbf{n}$ を壁に垂直な方向の単位法線ベクトル、 $\mathbf{u}_n$ を壁面に隣接する時刻 $n\Delta t$ のセルの速度ベクトル、 $\mathbf{u}_b$ を壁面上の速度ベクトルとすると、

$$\begin{aligned} w_b &= \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} = 0 \\ w_n &= \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで w_b と w_n はそれぞれの壁面方向の速度成分を表す。これを用いて壁面上の圧力 p_w と隣接セルの圧力 p_n との関係は

(1) $w_n > 0$ のとき、

$$\frac{p_w}{p_n} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \frac{w_n^2}{a_n^2} \left(1 + \left(1 + \frac{16}{(\gamma+1)^2} \frac{a_n^2}{w_n^2} \right)^{1/2} \right)$$

(2) $w_n = 0$ のとき、

$$p_w = p_n$$

(3) $w_n < 0$ のとき、

$$\frac{p_w}{p_n} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{w_n}{a_n} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (15)$$

で与えられる。ここで $a_n = \sqrt{\gamma p_n / \rho_n}$ である。

3.3 Harten - Yee 型 TVD スキーム 一般的に保存形式で書かれた Euler 方程式の差分近似表示は代表的に、

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \lambda (\tilde{\mathbf{E}}_{j+1/2} - \tilde{\mathbf{E}}_{j-1/2}) \quad (16)$$

と書ける。いま、考えている座標方向を ξ とすると、 $\mathbf{U}$ の上下添字 n と j は $\xi = j\Delta\xi$ と $t = n\Delta t$ で表され、また $\lambda = \Delta t / \Delta\xi$ である。 $\tilde{\mathbf{E}}_{j+1/2}$ は数値流束 (numerical flux) を表し、

$$\tilde{\mathbf{E}}_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_j + \mathbf{E}_{j+1} + R_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} / J_{j+1/2}) \quad (17)$$

と展開される。 $\tilde{\mathbf{E}}_{j-1/2}$ についても同様である。 $R_{j+1/2} = R(\mathbf{U}_{j+1/2})$ は行列 $\partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{U}$ から求まる固有値 a^m に対応する右固有ベクトル R^m を列要素とする行列 $R = (R^1, \dots, R^m)$ である。また、Harten - Yee 型 TVD スキームの場合⁽⁷⁾⁽⁸⁾ $\Phi_{j+1/2}^m$ は、

$$\begin{aligned} \Phi_{j+1/2}^m &= \sigma(a_{j+1/2}^m)(g_j^m + g_{j+1}^m) \\ &\quad - \psi(a_{j+1/2}^m + \beta_{j+1/2}^m) \alpha_{j+1/2}^m \end{aligned} \quad (18)$$

である。ただし

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \psi(z) \quad (\text{定常}) \quad (19)$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} [\psi(z) - \lambda z^2] \quad (\text{非定常}) \quad (20)$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \delta \\ (z^2 + \delta^2)/2\delta & |z| \leq \delta \end{cases} \quad (21)$$

$$\beta_{j+1/2}^m = \begin{cases} \delta(a_{j+1/2}^m)(g_{j+1}^m - g_j^m) / \alpha_{j+1/2}^m & \alpha_{j+1/2}^m \neq 0 \\ 0 & \alpha_{j+1/2}^m = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\alpha_{j+1/2}^m = (R_{j+1/2}^{-1})^m (\hat{\mathbf{U}}_{j+1} - \hat{\mathbf{U}}_j) \quad (23)$$

である。ここで、 $\hat{\mathbf{U}}_j = J_j \mathbf{U}_j$ 、 $R_{j+1/2}^{-1}$ は $R_{j+1/2}$ の逆行列、 δ は正定数で $0.1 \geq \delta \geq 0.001$ の範囲で選ばれる。 $\delta \geq 0.1$ も可能であるが、衝撃波遷移幅が広がるので可能な限り小さな値が望ましい。 g_j^m は流束制限関数

$$g_j^m = \text{mm}(\alpha_{j-1/2}^m, \alpha_{j+1/2}^m) \quad (24)$$

である。そして、mm は次の特性を持つ (通常 minmod と呼ぶ) 演算子である。

$$\text{mm}(x, y, \dots) = S \cdot \min(|x|, |y|, \dots) \quad (25)$$

$$\text{ここで、} S = \begin{cases} = \text{sgn}(x) & : \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y) = \dots \\ = 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

以上が、Harten - Yee 型の TVD スキームのアルゴリズムである。注意しなければならないのは、ここでは局所特性 (local characteristic) 法が使われており、ベクトルであった Euler 方程式が $W = R^{-1} \Delta \hat{\mathbf{U}}$ なる特性変数に関して分解され、スカラーの連立方程式に帰着していることである。その特性変数の差が $\alpha_{j+1/2}^m$ で表されている。この事は W の成分毎にスキームを変え得ることを意味する。そして、一般に非線形場には式 (24) の流束制限関数が有効であるとされている。

図1 傾斜直線壁からの反射形態の領域⁽⁹⁾
(RR: 正常反射, SMR: 単純マッハ反射,
CMR: 複合マッハ反射, DMR: 二重マッハ反射)

図2 マッハ反射形態と等密度線の比較 (Euler 方程式 ; 実験結果と解析結果の比較)

3.4 時間進行法 空間微分項の離散化により基礎方程式は形式的に次のような連立常微分方程式に帰着する。

$$\frac{du}{dt} = W(u) \quad (26)$$

上の常微分方程式を n ステップ目の時刻から $n+1$ ステップ目の時刻まで計算を、4段階 Runge-Kutta 法で進める。この方法は時間のきざみ幅 Δt に関して四次の精度を持ち、非定常計算において有効な時間進行法である。

4. 計算結果および検討

計算には支配方程式として、二次元の Euler 方程式と Navier-Stokes 方程式を用いる。数値解析法として、対流項には Harten-Yee の有限体積型 TVD スキームを適用し、粘性項には中心差分型有限体積法を適用する。

4.1 反射形態と領域 種々の反射形態が観察される作動条件を、入射衝撃波 Mach 数 M_s と壁面傾斜角 θ_w を、それぞれ横軸と縦軸にとった $M_s - \theta_w$ 平面上に領域分けし、空気 ($\gamma = 1.4$) の場合を示すと図 1 のようになる。曲線 1 は入射衝撃波による流れの偏角 θ_1 と反射衝撃波による流れの偏角 θ_2 が逆で大きさが等しい条件 $\theta_1 + \theta_2 = 0$ による離脱基準の値で、これより上はマッハ反射、下は正常反射の領域である。曲線 2 はマッハシステムが流れに垂直になる力学的平衡基準の値で、これより上はマッハ反射、下は正常反射の領域である。曲線 3 は三衝撃波理論で三重点に対する相対 Mach 数 $M_{3f} = 1$ の条件を満足する値で、これより左側は単純マッハ反射、右側は複合マッハ反射の領域である。曲線 4 は三衝撃波理論とキंक点に対する相対 Mach 数 $M_{3k} = 1$ を用い、 $M_{3f} = 1$ を満足する値を求めたもので、これより左側は複合マッハ反射、右側は二重マッハ反射の領域である。なお、これらの理論はいずれも完全気体の仮定の基に計算されている。

4.2 Euler 方程式による衝撃波の反射形態の解析 ここでは、衝撃波反射に見られる 4 つの反射形態である正常反射、単純マッハ反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射の各々を、それぞれ代表的な条件のもとで Euler 方程式を解くことによって解析する。解析結果は以下のとおりである。

4.2.1 反射形態 作動気体としてアルゴン ($\gamma = 5/3$) を用いる。図 2 は、Euler 方程式を用いて解析した各反射形態の等密度線を、BenDor-Glass(1980)⁽¹⁰⁾ による実験値と比較したものである。その結果、反射衝撃波・マッハシステムおよび滑り面の形状はかなりの良い一致がみられる。特に、図 2 (b) と図 2 (c) で観察さ

表 1 解析条件と三重点軌跡角の関係

	M_s	θ_w	χ
RR	2.03	60.0°	-
SMR	2.82	20.0°	14.0°
CMR	5.29	30.0°	11.1°
DMR	7.03	50.0°	4.7°

れる滑り面の巻き上がりも、等密度線の巻き上がりによって、かなり顕著に捕らえることが出来た。

ただし、入射衝撃波 Mach 数 M_s が大きくなるにつれ、壁面近傍、特にマッハシステム背後の壁面近傍に大きな数値的振動が生じている。これが原因で二重マッハ反射のマッハシステムは形が崩れ、滑り面、第 2 衝撃波の区別が困難である。また、基礎方程式が Euler 方程式なので、実験結果にあるようなコーナー部の剥離によって生じるラムダ衝撃波もここでは見られない。

4.2.2 三重点軌跡角 表 1 は、各反射形態の入射衝撃波 Mach 数 M_s 、傾斜壁角度 θ_w 、傾斜壁から測った三重点軌跡角 χ をまとめたものである。この表からも分かるとおり本結果では M_s 、 θ_w が大きい程 χ は小さくなることがわかる。この χ は、レイ・ショック理論あるいは三衝撃波理論を用いて理論的にも求めることが出来る。

4.2.3 擬定常性 折れ曲がり平板の角に発達する衝撃波は相似条件を満足しながら時間発展する。これを擬定常性と呼ぶ。図 3 は入射衝撃波 Mach 数 $M_s = 2.03$ 、傾斜壁角度 $\theta_w = 60^\circ$ の正常反射の擬定常性を示している。他の反射形態に関してもこのような擬定常性を確認している。しかし、粘性を考慮すると反射形態は場所によって異なりこの擬定常性は現れない。

4.2.4 滑り面 単純マッハ反射における滑り面を正確にとらえるために、傾斜壁の角度を $\theta_w = 35^\circ$ 、入射衝撃波 Mach 数 $M_s = 1.72$ の場合の計算結果を図 4 に示す。小さな M_s では滑り面は滑らかに接し、巻き上がりは観察されない。解析結果は Aso ら (1990) の実験結果⁽¹¹⁾ともよく一致している。

4.3 N-S 方程式による衝撃波の反射形態の解析

4.3.1 Euler 方程式と Navier-Stokes 方程式の比較 入射衝撃波 Mach 数 $M_s = 2.75$ 傾斜壁角度 $\theta_w = 42.5^\circ$ において見られる代表的な二重マッハ反射を、Euler 方程式と Navier-Stokes 方程式の両方を用いて解析し、その結果を比較する。コーナーから傾斜壁に沿って測った入射衝撃波到達地点までの距離を代表長さとした Reynolds 数は $Re = 1.093 \times 10^4$ である。

(i) 現象解析 : 図 5(a),(b) はそれぞれ (a) Euler 方程式、(b) Navier-Stokes 方程式を基礎方程式として解析し

図3 正常反射の擬定常性

図5 Euler方程式とNS方程式の圧力線図の比較

(b) Experiment by Aso et al. (1990)

図4 単純マッハ反射の滑り面の比較

た結果である。両結果とも反射衝撃波、マッハステム、第2反射衝撃波および滑り面の構造をよく捕らえている。ただし、第2反射衝撃波は、前後の圧力差が小さいので、反射衝撃波と比べるとそれほど顕著でない。実験結果に見られたコーナー付近に生じるラムダ衝撃

表2 二重マッハ反射における三重点と第2三重点軌跡角

	χ	χ'
Euler	4.1°	7.9°
Navier-Stokes	3.3°	6.1°

波も Euler 方程式の解析結果には見られないが、Navier-Stokes 方程式の結果では観察することができる。

(ii) 三重点と第2三重点：二重マッハ反射では、反射衝撃波と第2反射衝撃波との間に第2三重点が生じる。本解析結果でもこの第2三重点は捕らえられた。表2は、各方程式における傾斜壁から測った三重点軌跡角 χ と第2三重点軌跡角 χ' を比較したものである。

4.3.2 衝撃波の反射形態 前節までに得られた経験に基づいて、本節ではマッハ反射の4形態について、Navier-Stokes の方程式を用いて解析をおこなう。これらの解析条件は、比較のため、全て Deschambault-Glass (1983)⁽¹²⁾による実験結果に合わせてある。なお、 Re 数はコーナー頂点から傾斜壁に沿って測ったマッハステムの最終到達点までの距離を代表長さとし、入射衝撃波前方の状態の各物理量を代表物理量として求めている。

(i) 正常反射：図6(a)は本解析結果を実験結果と比較したものである。反射衝撃波形状はほぼ同等な結果を得ることができたが、内部の密度分布の詳細な情報、およびラムダ衝撃波の大きさの点で実験値とはかなり異なった結果を得た。

密度分布：密度の内部情報の違いについては、メッシュ依存性がかなりの比重を占めるものと思われる。一方、ラムダ衝撃波の大きさ、つまりコーナー部の剥離

(a) Regular Reflection

(b) Single Mach Reflection

(c) Complex Mach Reflection

(d) Double Mach Reflection

Present Numerical Results

(a) Regular Reflection

(b) Single Mach Reflection

(c) Complex Mach Reflection

表3 三重点軌跡角の時間変化(複合マッハ反射)

t	χ
0.16	11.0°
0.20	12.3°
0.251	13.0°

の大きさの違いについては理由が定かではない。明らかにコーナー部における境界層の状態が、実験とは異なっているのではあるが、これを合わせるためには、さらに境界条件に検討を加える必要がある。また、コーナー部の剥離を抑えるもう1つの方法として、乱流モデルを導入する方法が考えられる。

反射衝撃波の形状 : 図6 (a) は本解析結果の衝撃波の反射形状を Deschambault-Glass(1983) の実験結果と比較したものである。図を見てわかるとおり、実験値がやや小さめに捉えてはいるが形状の結果にほとんど差はみられない。

(ii) 単純マッハ反射 : 図6 (b) は、単純マッハ反射の等密度線の比較を示している。ここでは正常反射で見られた等密度線の荒れはほとんどない。反射衝撃波、壁面に垂直なマッハステムおよび滑り面も良好に捉えている。反射衝撃波形状、滑り面位置および内部の密度分布の詳細な情報までかなり良く一致している。ただし、ラムダ衝撃波の大きさは Deschambault らの結果と比べると本解析結果はやや大きい。

(iii) 複合マッハ反射 : 図6 (c) には複合マッハ反射に特有のキंक点をはっきりと見られる。キंक点は、反射衝撃波の折れ曲がりが生じるところである。そして、等密度線には滑り面の激しい巻き上がりが見られる。マッハステムは傾斜壁を上昇する時、壁面と垂直を保って進むのが普通である。しかしこの複合マッハ反射では、明らかにマッハステムは全体として壁面と垂直ではない。ただし、壁のごく近傍では垂直性が保持される。このことは滑り面の巻き上がりとの深い関係がある。すなわち、滑り面の激しい巻き上がりがマッハステムを少し傾斜させると考えられる。参考までに三重点軌跡角の時間的変化を表3に示す。

(iv) 二重マッハ反射 : 図6 (d) には、二重マッハ反射特有の現象である、三重点と第2三重点、および第2反射衝撃波の様子がはっきりと捕らえられている。高マッハ数では壁面近くに数値振動が生ずる。またコーナー部での剥離が大きくなる。しかし、全体としては実験結果と良く一致している。

6. 結 言

有限体積型 TVD 法を用いて、衝撃波のマッハ反射に

関する研究を行った。その結果、以下のような知見を得た。

- (1) Euler 方程式を用いて傾斜壁を伝播する衝撃波を非定常解析し、理論値あるいは実験値と良好に一致する解を得ることができた。またこの問題に特有の擬定常性も確認することができた。
- (2) Navier-Stokes 方程式の解析の結果、粘性が衝撃波の反射形態に強い影響を及ぼすことが示された。
- (3) 粘性が反射形態に及ぼす影響は、剥離が生じるコーナー付近と傾斜壁上部で異なる。粘性を考慮した解析では衝撃波の反射形態は場所によって異なり、Euler 方程式の解析で観察された擬定常性はみられなかった。
- (4) 本解析で得られた衝撃波の反射形態を、ホログラフィー干渉計による実験結果と比較したところ、高い衝撃波 Mach 数、大きな壁面傾斜角になるほど、反射衝撃波の形状に隔たりが生じた。この原因には大きく2つが考えられる。1つは実在気体の効果を考慮していないこと、もう1つがコーナー部で捕らえる剥離が大きすぎることである。

文 献

- (1) BenDor, G., Shock Wave Reflection Phenomena, (1992), Springer-verlag
- (2) Glass, I.I. Shock Waves, 1, (1991), 75.
- (3) Colella, P. and Henderson, L.F. J. Fluid Mech. 213, (1990), 71.
- (4) 生井・松尾, 衝撃波の力学, (1983-4), コロナ社
- (5) 松尾・青木, 機論 (B), 54-501, (1988), 1027.
- (6) Courant, R. and Fredricks, K. O., Pure and Applied Mathematics, Vol. 1, Interscience Publishers, Inc., NY, (1943)
- (7) Harten, A., J. Comp. Phys. 49, (1983), 357.
- (8) Yee, H.C. and Warming, R.F., J. Comput. Phys. 57, (1985), 327.
- (9) 生井・ほか3名, 機論 (B), 48-426, (1982), 212.
- (10) BenDor, G. and Glass, I.I., J. Fluid Mech. 92-3, (1979), 459. and. 96-4, (1980), 735.
- (11) Aso, S. ほか3名, A.I.P., (1990), 630.
- (12) Deschambault, R.L. and Glass, I.I., J. Fluid Mech. 131, (1983), 27.