二次元移流拡散方程式の有限要素法および 差分法による新しい陽的定式化* (誤差解析手法によるアプローチ)

松田 安弘^{*1}, 邵 長 城^{*2}

A New Explicit Formulation by the Finite Element Method and the Finite Difference Method for the Two-Dimensional Convection-Diffusion Equation (Approach by the Error Analysis Technique)

Yasuhiro MATSUDA and Changcheng SHAO

In our previous papers, the Modified Galerkin Method (MGM) was proposed for the one-dimensional and the two-dimensional convection-diffusion equations as one of the most efficient methods using the error analysis technique. In this paper, this approach was applied for two explicit finite element methods and eight explicit finite difference methods. The corresponding correction coefficients were obtained for these methods in order to improve their numerical accuracies. All of these newly formulated schemes were evaluated from the standpoints of phase error and dissipation error. From the error analysis results, we confirmed the higher accuracy of our proposed finite difference method for a convection dominated problem and our proposed finite element method for a diffusion dominated problem. Through numerical experiments using the explicit finite element schemes, we confirmed the effectiveness of our proposed method and the general correspondence between the error analysis and the numerical simulation.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Element Method, Finite Difference Method, Error Analysis, Two-Dimensional Convection-Diffusion Equation

1. 結 言

非定常移流拡散方程式は、熱流体解析の中で最も基本的な方程式の一つであり、その効率的な数値解法についての研究は重要である。本論文は、一次元⁽¹⁾、および二次元⁽²⁾ 移流拡散問題について提案した数値解法の補正方式の考え方を、陽的有限要素法および陽的差分法に適用したものである。すなわち、フーリエ級数による誤差解析手法を用いて既存の各種陽の数値解法に補正係数を導入し、有限要素法および差分法による新しい陽的定式化を提案し、誤差解析手法の観点から、各数値解法間の比較・検討を行った。とくに有限要素法の場合には数値実験結果との対応関係を含めて検討した。

なお、本論文では次の二次元非定常移流拡散方程式を対象としている。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad \cdots \cdots (1)$$

ただし、 t : 時間、 C : 濃度、 u, v : x, y 方向の流速、

K_x, K_y : 拡散係数である。

2. 誤差解析手法による数値解法の補正方法

2.1 一般解についての定式化

もし、 u, v, K_x および K_y がすべて定数である場合は式(1)は変数分離法によって解くことができるが、その一般解はフーリエ級数により表現され、その成分の一つは次式で表される。

$$C = A \exp[-(\beta_x^2 K_x + \beta_y^2 K_y)t + i\beta_x(x-ut) + i\beta_y(y-vt)] \quad \cdots \cdots (2)$$

ただし、 A : 複素定数、 β_x, β_y : 波数である。ここで $x = lh_x, y = mh_y, t = n\Delta t, b_x = u\Delta t/h_x, b_y = v\Delta t/h_y, r_x = K_x\Delta t/h_x^2, r_y = K_y\Delta t/h_y^2$ とすると、式(2)より次式を得る。ただし、 l, m, n : x 方向、 y 方向、および時間方向の添字、 h_x, h_y : x, y 方向のメッシュ幅、 Δt : タイムステップ、である。

$$C_{l,m}^n = A(\xi_A)^n \exp(i\beta_x lh_x + i\beta_y mh_y) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\xi_A = P_1 + iP_2 \quad \cdots \cdots (4)$$

$$P_1 = \exp[-(\beta_x h_x)^2 r_x - (\beta_y h_y)^2 r_y] \cos(b_x \beta_x h_x + b_y \beta_y h_y) \quad \cdots (5)$$

$$P_2 = -\exp[-(\beta_x h_x)^2 r_x - (\beta_y h_y)^2 r_y] \sin(b_x \beta_x h_x + b_y \beta_y h_y) \quad \cdots (6)$$

ただし、 ξ_A は一般解の増幅因子である。

* 原稿受付 平成4年5月28日。

*¹ 正員、信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

*² 正員、信州大学大学院。

2・2 数値解についての定式化とその補正方法
 一方、式(1)にある数値解法を適用し、式(3)に示すように $C_{l,m}^n$ に $(\xi)^n \exp(i\beta_x l h_x + i\beta_y m h_y)$ を代入して整理すると数値解の増幅因子 ξ は一般的に次式により表される。

$$\xi = \frac{Q_1 + Q_2 + iQ_3}{Q_4 + Q_5 + iQ_6} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 Q_1, Q_3, Q_4, Q_6 は $b_x, b_y, \beta_x h_x, \beta_y h_y$ の関数で、 Q_2, Q_5 は $r_x, r_y, \beta_x h_x, \beta_y h_y$ の関数である。ここで精度の向上のために、次式で示すような二つの補正係数“ f ”と“ g ”を導入する。

$$\xi = \frac{Q_1 + fQ_2 + igQ_3}{Q_4 + fQ_5 + igQ_6} \dots\dots\dots (8)$$

すなわち、 f は拡散項の補正係数であり、 g は移流項の補正係数である。 f と g は式(4)と式(8)とを等置することにより求められるが、この際、 $\beta_x h_x$ や $\beta_y h_y$ に依存しない簡単な形で求めるために零の極限として考えている。

$$\left. \begin{aligned} f &= \lim_{\substack{\beta_x h_x \rightarrow 0 \\ \beta_y h_y \rightarrow 0}} \frac{(Q_3 - P_1 Q_6)(P_1 Q_4 - Q_1) - P_2^2 Q_4 Q_6}{(Q_3 - P_1 Q_6)(Q_2 - P_1 Q_5) + P_2^2 Q_5 Q_6} \\ g &= \lim_{\substack{\beta_x h_x \rightarrow 0 \\ \beta_y h_y \rightarrow 0}} \frac{P_2(Q_2 Q_4 - Q_1 Q_5)}{(Q_3 - P_1 Q_6)(Q_2 - P_1 Q_5) + P_2^2 Q_5 Q_6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

3. 陽的有限要素法による定式化とその補正

以下の検討では形状関数が三角形一次要素と四角形一次要素の場合を考える。

3・1 前進計算方式[EX]による定式化 式(1)を、境界条件を考慮してガレルキン法により定式化すると、マトリックス形で次のように表される。

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + \phi[\underline{D}] \right\} \{C\}^n = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1 - \phi)[\underline{D}] \right\} \{C\}^{n-1} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 ϕ ：タイムスキームパラメータ $[(\partial C / \partial t)]$ を差分化した際の重みパラメータ⁽¹⁾⁽²⁾であり、

$$\left\{ \begin{aligned} [P] &= \sum_{j=1}^M \int_{V_e} N_i N_j dx dy \\ [\underline{D}] &= \sum_{j=1}^M \int_{V_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} K_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} K_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + N_i u \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

V_e ：一要素の領域、 N_i ：形状関数、 M ：総要素数である。また $\sum$ は各要素マトリックスを足し加えて全体マトリックスをつくることを意味している。なお、 $\phi=0$ として、左辺のマトリックス $[P]$ を集中化させると、次式に示すような前進計算方式による定式化を得る。

$$[P]\{C\}^n = \{[P] - \Delta t[\underline{D}]\}\{C\}^{n-1} \dots\dots\dots (12)$$

いま、図1に示す三角形一次要素の節点 p_1 の節点

番号を k_1 、座標を $x = l h_x, y = m h_y$ とすると式(12)の第 k_1 代数方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} 8C_{l,m}^n &= [4 - 12(r_x + r_y)]C_{l-1,m-1}^{n-1} \\ &\quad + [1 + 3(r_x + r_y) - 2(b_x + b_y)]C_{l-1,m}^{n-1} \\ &\quad + [1 + 3(r_x + r_y) + 2(b_x - b_y)]C_{l-1,m+1}^{n-1} \\ &\quad + [1 + 3(r_x + r_y) + 2(b_x + b_y)]C_{l,m-1}^{n-1} \\ &\quad + [1 + 3(r_x + r_y) - 2(b_x - b_y)]C_{l,m+1}^{n-1} \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

式(13)の各 $C_{l,m}^n$ に $\xi^n \exp(i\beta_x l h_x + i\beta_y m h_y)$ を代入し、 ξ について整理すると、式(7)の $Q_1 \sim Q_6$ は、次式により表される。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 1 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) \\ Q_2 &= 3(r_x + r_y)[\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1] \\ Q_3 &= -2[b_x \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) \\ &\quad + b_y \cos(\beta_x h_x) \sin(\beta_y h_y)] \\ Q_4 &= 2, Q_5 = 0, Q_6 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

同様にして、図1に示す三角形一次要素の節点 p_2 の場合における $Q_1 \sim Q_6$ は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 4 + 2 \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) + \cos(2\beta_x h_x) \\ &\quad + \cos(2\beta_y h_y) \\ Q_2 &= 6(r_x + r_y)[\cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) - 1] \\ &\quad + 3(r_x - r_y)[\cos(2\beta_x h_x) - \cos(2\beta_y h_y)] \\ Q_3 &= -2[2b_x \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) \\ &\quad + 2b_y \cos(\beta_x h_x) \sin(\beta_y h_y) + b_x \sin(2\beta_x h_x) \\ &\quad + b_y \sin(2\beta_y h_y)], Q_4 = 8, Q_5 = 0, Q_6 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

図2に示す四角形一次要素の節点 p_3 の場合における $Q_1 \sim Q_6$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y) + 2 \cos(\beta_x h_x) \\ &\quad + 2 \cos(\beta_y h_y), \\ Q_2 &= 6(r_x + r_y)[-2 + \cos(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y)] \\ &\quad + 6[(2r_x - r_y) \cos(\beta_x h_x) - (r_x - 2r_y) \cos(\beta_y h_y)], \\ Q_3 &= -b_x[6 \sin(\beta_x h_x) + 3 \sin(\beta_x h_x) \cos(\beta_y h_y)] \\ &\quad - b_y[6 \sin(\beta_y h_y) + 3 \sin(\beta_y h_y) \cos(\beta_x h_x)], \end{aligned}$$

図1 三角形一次要素の場合

$$Q_4=9, Q_5=0, Q_6=0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

3・2 前進計算補正方式 [EX(C)] による定式化

式(5), (6)および式(14)~(16)を式(9)に代入することにより, 補正係数 f と g は一般的に次式により表される.

$$f=a\left[1+\frac{1}{2}\frac{(b_x+b_y)^2}{r_x+r_y}\right]-\frac{b}{r_x+r_y}, g=1 \quad \dots (17)$$

ここで係数 a, b は表1に示されている. すなわち拡散係数 K_x, K_y は fK_x および fK_y となるが, とくに $K_x=K_y=K, h_x=h_y=h$ の場合には, 次式のような人工拡散係数となる.

$$\left. \begin{aligned} fK_x &= a\left[K+\frac{1}{4}\Delta t(u+v)^2\right]-\frac{bh^2}{2\Delta t} \\ fK_y &= a\left[K+\frac{1}{4}\Delta t(u+v)^2\right]-\frac{bh^2}{2\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

4. 陽的差分法による定式化とその補正

表2に本論文で取り上げた各種の差分法による定式化を示す. すなわち, 二次精度の中心差分法 (SCT), 対流方式⁽³⁾ (SCV), 二段 (Time splitting) 対流方式⁽⁴⁾ [SCV(2)], QUICK⁽⁵⁾ 方式, ゼロ平均方式⁽⁴⁾ (SZA) および二段 (Time splitting) ゼロ平均方式⁽⁴⁾ [SZA(2)], 三次精度の上流方式⁽⁶⁾ [TU], 四次精度のゼロ平均方式⁽⁷⁾ (FZA) の8種類を検討した (ただし, FZAでは, 簡単のために一次元問題についての定式化のみを示している) なお, 拡散項は次式により離散化されている.

$$D=r_x(C_{l-1,m}^n-2C_{l,m}^n+C_{l+1,m}^n)+r_y(C_{l,m-1}^n-2C_{l,m}^n+C_{l,m+1}^n) \quad \dots\dots\dots (19)$$

したがって, 式(7)と式(9)より, 各差分式に対して得られた Q_1, Q_3 および補正係数 f を表3に, Q_2, Q_4, Q_5, Q_6 および g を次式により表す (すなわち, 差分法の場合には Q_2, Q_4, Q_5, Q_6 および g は, 同じ結果となる).

図2 四角形一次要素の場合

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= 2r_x[\cos(\beta_x h_x)-1]+2r_y[\cos(\beta_y h_y)-1] \\ Q_4 &= 1, Q_5=Q_6=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$g=1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

表3より, SCV(2)法とSZA(2)法の補正係数 f は1となるので, 補正方式は存在しない. なお, 三次上流方式 (TU) は上流因子 $\alpha=0$ で四次精度の中心差分スキーム, $\alpha=1$ でUTOPIAスキーム, $\alpha=3$ で河村スキームとなる.

5. 各種陽解法についての誤差解析結果

5・1 誤差解析の前提条件

二次元問題での各種陽解法の増幅因子 ξ と一般解の増幅因子 ξ_A とを比較することにより, 各種の有限要素法や差分法の計算精度を検討した. 誤差解析では $k_x=2\pi/(\beta_x h_x)=3, 4, 6, 8, 10$; $k_y=2\pi/(\beta_y h_y)=3, 4, 6, 8, 10$; $0 \leq r_x=r_y \leq 0.3$ の範囲を考えた ($k_x, k_y > 10$ では誤差の値は一般に非常に小さくなることが確認されているので誤差のまとめでは省略した⁽¹⁾⁽²⁾). また, $b_y=0$ および $b_y=b_x$ の二つの場合を考える. なお, 三次上流方式 (TU) および三次上流補正係数 [TU(C)] における上流因子 α は 0, 0.5⁽¹⁾, 1, 2 および 3 と変化させて, 理論誤差を検討した. 各種有限要素法や差分法の評価には, $|\xi|_{\max} \leq 1$ の安定条件と次式の誤差指標 E_t を用いている.

$$E_t=\sqrt{E_A^2+E_P^2} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ただし, E_A と E_P は, それぞれ散逸誤差と位相誤差に対応しており, 次式で表される.

$$E_A=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(|\xi|-|\xi_A|)^2} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$E_P=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_A}-1\right)^2} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここで, $\Delta\phi=\tan^{-1}[\text{Im}(\xi)/\text{Re}(\xi)]$, $\Delta\phi_A=-2\pi(b_x/k_x+b_y/k_y)$, $N=(k_x \text{ の数}) \times (k_y \text{ の数}) \times (b_x \text{ の数})$ である. 図1に示す二つの三角形要素の節点 p_1, p_2 は数値計算の際, 同時に現れるので, これらの節点の誤差 $E_t(\boxtimes), E_t(\clubsuit)$ は, 次式のようにまとめて考える.

表1 補正係数 f の係数 a, b

Node	p ₁	p ₂	p ₃
Element	$\boxtimes$	$\clubsuit$	$\boxplus$
a	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
b	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

表 2 陽的差分法における差分式

Scheme	Discretization
S C T	$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - [b_x(C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n) - b_y(C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n)]/2 + D$ (20)
S C V	$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - [b_x(C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n) - b_x^2(C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n)]/2 - [b_y(C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) - b_y^2(C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n)]/2 + D$ (21)
S C V (2)	$\tilde{C}_{i,j}^n = C_{i,j}^n - [b_x(C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n) - b_x^2(C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n)]/2$ $C_{i,j}^{n+1} = \tilde{C}_{i,j}^n - [b_y(\tilde{C}_{i,j+1}^n - \tilde{C}_{i,j-1}^n) - b_y^2(\tilde{C}_{i,j+1}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i,j-1}^n)]/2 + D$ (22)
Q U I C K	$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - b_x(C_{i+2,j}^n - 7C_{i+1,j}^n + 3C_{i,j}^n + 3C_{i-1,j}^n)/8 - b_y(C_{i,j+2}^n - 7C_{i,j+1}^n + 3C_{i,j}^n + 3C_{i,j-1}^n)/8 + D$ (23)
S Z A	$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n + \frac{b_x^2 - b_x}{4} C_{i-2,j}^n - \frac{b_x^2 - 5b_x}{4} C_{i-1,j}^n - \frac{b_x^2 + 3b_x}{4} C_{i,j}^n + \frac{b_x^2 - b_x}{4} C_{i+1,j}^n + \frac{b_y^2 - b_y}{4} C_{i,j-2}^n - \frac{b_y^2 - 5b_y}{4} C_{i,j-1}^n - \frac{b_y^2 + 3b_y}{4} C_{i,j}^n + \frac{b_y^2 - b_y}{4} C_{i,j+1}^n + D$ (24)
S Z A (2)	$\tilde{C}_{i,j}^n = C_{i,j}^n + \frac{b_x^2 - b_x}{4} C_{i-2,j}^n - \frac{b_x^2 - 5b_x}{4} C_{i-1,j}^n - \frac{b_x^2 + 3b_x}{4} C_{i,j}^n + \frac{b_x^2 - b_x}{4} C_{i+1,j}^n + \frac{b_y^2 - b_y}{4} \tilde{C}_{i,j-2}^n - \frac{b_y^2 - 5b_y}{4} \tilde{C}_{i,j-1}^n - \frac{b_y^2 + 3b_y}{4} \tilde{C}_{i,j}^n + \frac{b_y^2 - b_y}{4} \tilde{C}_{i,j+1}^n + D$ (25)
T U	$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{b_x}{12} [(1+\alpha)C_{i-2,j}^n - (8+4\alpha)C_{i-1,j}^n + 6\alpha C_{i,j}^n + (8-4\alpha)C_{i+1,j}^n - (1-\alpha)C_{i+2,j}^n] - \frac{b_y}{12} [(1+\alpha)C_{i,j-2}^n - (8+4\alpha)C_{i,j-1}^n + 6\alpha C_{i,j}^n + (8-4\alpha)C_{i,j+1}^n - (1-\alpha)C_{i,j+2}^n] + D$ (26)
F Z A*	$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n + b_x(C_{i-3,j}^n - 7C_{i-2,j}^n + 26C_{i-1,j}^n - 10C_{i,j}^n - 11C_{i+1,j}^n + C_{i+2,j}^n)/24 + b_x^2(-C_{i-3,j}^n + 3C_{i-2,j}^n + 22C_{i-1,j}^n - 50C_{i,j}^n + 27C_{i+1,j}^n - C_{i+2,j}^n)/48 + b_y^2(-C_{i,j-3}^n + 7C_{i,j-2}^n - 14C_{i,j-1}^n + 10C_{i,j}^n - C_{i,j+1}^n - C_{i,j+2}^n)/24 + b_x^2(C_{i-3,j}^n - 3C_{i-2,j}^n + 2C_{i-1,j}^n + 2C_{i,j}^n - 3C_{i+1,j}^n + C_{i+2,j}^n)/48 + D$ (27)

表 3 陽的差分法における Q_1 , Q_3 および補正係数 f

Scheme	Q_1 , Q_3	f
S C T	$Q_1 = 1$ $Q_3 = -b_x \sin(\beta_x h_x) - b_y \sin(\beta_y h_y)$	$1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y)^2}{\Gamma_x + \Gamma_y}$ (28)
S C V	$Q_1 = 1 - b_x^2 [1 - \cos(\beta_x h_x)] - b_y^2 [1 - \cos(\beta_y h_y)]$ $Q_3 = -b_x \sin(\beta_x h_x) - b_y \sin(\beta_y h_y)$	$1 + \frac{b_x b_y}{\Gamma_x + \Gamma_y}$ (29)
S C V (2)	$Q_1 = \{1 - b_x^2 [1 - \cos(\beta_x h_x)]\} \{1 - b_y^2 [1 - \cos(\beta_y h_y)]\}$ $-b_x \sin(\beta_x h_x) b_y \sin(\beta_y h_y)$ $Q_3 = -b_x \sin(\beta_x h_x) \{1 - b_y^2 [1 - \cos(\beta_y h_y)]\}$ $-b_y \sin(\beta_y h_y) \{1 - b_x^2 [1 - \cos(\beta_x h_x)]\}$	1 (30)
Q U I C K	$Q_1 = 1 - b_x [\cos(2\beta_x h_x) - 4\cos(\beta_x h_x) + 3]/8$ $-b_y [\cos(2\beta_y h_y) - 4\cos(\beta_y h_y) + 3]/8$ $Q_3 = -b_x [10\sin(\beta_x h_x) - \sin(2\beta_x h_x)]/8$ $-b_y [10\sin(\beta_y h_y) - \sin(2\beta_y h_y)]/8$	$1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y)^2}{\Gamma_x + \Gamma_y}$ (31)
S Z A	$Q_1 = 1 + b_x \cos(\beta_x h_x) + b_x [(b_x - 1) \cos(2\beta_x h_x) - b_x - 3]/4$ $+ b_y \cos(\beta_y h_y) + b_y [(b_y - 1) \cos(2\beta_y h_y) - b_y - 3]/4$ $Q_3 = b_x (b_x - 3) \sin(\beta_x h_x)/2 - (b_x^2 - b_x) \sin(2\beta_x h_x)/4$ $+ b_y (b_y - 3) \sin(\beta_y h_y)/2 - (b_y^2 - b_y) \sin(2\beta_y h_y)/4$	$1 + \frac{b_x b_y}{\Gamma_x + \Gamma_y}$ (32)
S Z A (2)	$Q_1 = \{1 + b_x \cos(\beta_x h_x) + b_x [(b_x - 1) \cos(2\beta_x h_x) - b_x - 3]/4\}$ $\{1 + b_y \cos(\beta_y h_y) + b_y [(b_y - 1) \cos(2\beta_y h_y) - b_y - 3]/4\}$ $- \{b_x (b_x - 3) \sin(\beta_x h_x)/2 - (b_x^2 - b_x) \sin(2\beta_x h_x)/4\}$ $\{b_y (b_y - 3) \sin(\beta_y h_y)/2 - (b_y^2 - b_y) \sin(2\beta_y h_y)/4\}$ $Q_3 = \{b_x (b_x - 3) \sin(\beta_x h_x)/2 - (b_x^2 - b_x) \sin(2\beta_x h_x)/4\}$ $\{1 + b_y \cos(\beta_y h_y) + b_y [(b_y - 1) \cos(2\beta_y h_y) - b_y - 3]/4\}$ $+ \{b_y (b_y - 3) \sin(\beta_y h_y)/2 - (b_y^2 - b_y) \sin(2\beta_y h_y)/4\}$ $\{1 + b_x \cos(\beta_x h_x) + b_x [(b_x - 1) \cos(2\beta_x h_x) - b_x - 3]/4\}$	1 (33)
T U	$Q_1 = 1 - b_x \alpha [\cos(2\beta_x h_x) - 4\cos(\beta_x h_x) + 3]/6$ $- b_y \alpha [\cos(2\beta_y h_y) - 4\cos(\beta_y h_y) + 3]/6$ $Q_3 = -b_x [8\sin(\beta_x h_x) - \sin(2\beta_x h_x)]/6$ $- b_y [8\sin(\beta_y h_y) - \sin(2\beta_y h_y)]/6$	$1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y)^2}{\Gamma_x + \Gamma_y}$ (34)
F Z A*	$Q_1 = 1 + [(-20b_x - 50b_x^2 + 20b_x^3 + 2b_x^4)$ $+ (30b_x + 49b_x^2 - 30b_x^3 - b_x^4) \cos(\beta_x h_x)$ $+ 2(-6b_x + b_x^2 + 6b_x^3 - b_x^4) \cos(2\beta_x h_x)$ $+ (2b_x - b_x^2 - 2b_x^3 + b_x^4) \cos(3\beta_x h_x)]/48$ $Q_3 = [(-74b_x + 5b_x^2 + 26b_x^3 - 5b_x^4) \sin(\beta_x h_x)$ $+ 4(4b_x - b_x^2 - 4b_x^3 + b_x^4) \sin(2\beta_x h_x)$ $+ (-2b_x + b_x^2 + 2b_x^3 - b_x^4) \sin(3\beta_x h_x)]/48$	$1 + \frac{b_x b_y}{\Gamma_x + \Gamma_y}$ (35)

(* For simplicity, only the one-dimensional form is given here.)

$$E_t(T) = \sqrt{\frac{1}{2} [E_t^2(\boxtimes) + E_t^2(\boxplus)]} \dots\dots\dots (41)$$

誤差解析による理論誤差 E_t は、三角形要素と四角形要素について、与えられた計算領域内で同じ節点数 [すなわち、 $h_x(T) = h_x(R)/\sqrt{2}$ 、 $h_y(T) = h_y(R)/\sqrt{2}$] となる条件のもとで比較した。ここで、 $h_x(T)$ 、 $h_y(T)$ および $h_x(R)$ と $h_y(R)$ は三角形要素 (図1) および四角形要素 (図2) のメッシュ幅である。また、 r_x 、 r_y 、 b_x 、 b_y は四角形要素のメッシュ幅 $h_x(R)$ と $h_y(R)$ を

もとに定義した。

5.2 誤差解析の結果 図3に、 $|\xi|_{\max} \leq 1$ すなわち安定条件内での b_x の最大値を示す。ここで EXR と EXT は、それぞれ四角形要素と三角形要素による前進計算有限要素法を示し、記号“(C)”は各解法の補正方式であることを示している。また、 $b_y=0$ の場合には、SCV(C)法と SCV(2)法は、それぞれ式(29)と式(30)より SCV法と同じ式に、SZA(C)法と SZA(2)法は、それぞれ式(32)と式(33)より SZA法と同

(a) $b_y=0$ の場合

(b) $b_y=b_x$ の場合

図3 各種陽解法の $b_{x\max}$

表4 各種陽解法の理論誤差 $E_t(b_y=b_x)$

Parameters Methods		$b_x = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$					$b_x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$				
		$r_x = r_y$					$r_x = r_y$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.3	0	0.05	0.1	0.2	0.3
FEM	EXR(C)	0.447	0.364	0.262	0.220	3.255	0.401	0.283	0.182	0.346	1.536
	EXR	0.438	0.417	1.571	6.073	8.241	—	—	0.664	2.255	3.162
	EXT(C)	—	0.446	0.366	0.336	4.897	—	0.359	0.279	0.479	—
	EXT	0.475	0.423	3.161	7.219	—	—	—	1.174	2.741	—
F	SCT(C)	0.314	0.195	0.088	2.074	—	0.242	—	—	—	—
	SCT	—	0.250	0.111	1.882	5.351	—	—	—	—	—
	SCV(C)	0.314	0.195	0.088	2.074	—	0.242	—	—	—	—
	SCV	—	0.221	0.076	1.975	5.452	—	—	—	—	—
	SCV(2)	0.330	0.219	0.073	2.008	—	0.316	0.184	0.073	—	—
	QUICK(C)	0.177	0.094	0.345	2.412	—	—	—	—	—	—
	QUICK	—	0.074	0.213	2.227	—	—	—	—	—	—
	SZA(C)	0.124	0.222	0.573	2.663	—	—	—	—	—	—
D	SZA	—	0.165	0.495	2.571	—	—	—	—	—	—
	SZA(2)	0.141	0.152	0.489	2.640	—	0.194	0.168	0.420	—	—
	TU(C)	0.145	0.071	0.254	2.088	—	—	—	—	—	—
	($\alpha_{opt}=1$)	(1)	(0)	(0)	(0)	—	—	—	—	—	—
	TU	—	0.059	0.188	1.917	5.180	—	—	—	—	—
	($\alpha_{opt}=1$)	—	(1)	(0)	(0)	(0)	—	—	—	—	—
	FZA(C)	0.079	0.164	0.473	2.380	—	—	—	—	—	—
	FZA	—	0.122	0.410	2.292	—	—	—	—	—	—

じ式になる。さらに、SCV(C)法は、 $b_y = b_x$ の場合には式(29)と式(28)より、式(8)の最終的な ξ がSCT(C)法と同じになる。

なお b_x を 0.1 から 1 まで 0.1 きざみで増して安定域を検討した。[ここで TU(C) および TU 法では、 $\alpha = 1$ の場合のみを示している]。また、図 3 (b) 中の EXT(C) 法では、 $r_x = r_y = 0$ での安定域が $0.3 \leq (b_x = b_y) \leq 0.6$ となる。図 3 より、 $r_x = r_y \leq 0.1$ での補正解法は、補正なしの解法に比べて、一般に大きな安定域をもつことがわかる。

表 4 は、 $b_y = b_x$ 、 $0 < b_x \leq 0.5$ での誤差 E_t である。なお、 $b_y = 0$ の場合は紙面の都合上省略したが、基本的には $b_y = b_x$ の場合とほぼ同様の結果が得られた。なお、表 4 中下線を付したデータは、その $r_x = r_y$ での E_t の最小値であることを示しており、“—” はこの b_x の範囲では不安定となったことを示している。また、TU(C) 法および TU 法における α_{opt} は α を種々変化させた際の、最小の E_t を与える値である。これより、 $r_x = r_y \leq 0.05$ の場合には FZA(C) 法、TU 法および SZA(2) 法などが、 $r_x = r_y = 0.1$ の場合には SCV(2) 法が、 $r_x = r_y = 0.2, 0.3$ の場合には EXR(C) 法が高精度となることがわかる。なお、 $r_x = r_y \geq 0.1$ での陽的有限要素法は、補正係数の導入により精度が大幅に改善されることを示している。

(なお、以上の誤差解析では $\beta_x h_x$ と $\beta_y h_y$ を零の極限として導出した補正係数 [式(9)] を用いているが、その理論誤差は 6 章で紹介するように、数値誤差とも比較的良く対応していることがわかった。この結果は、逆に式(9)の考え方の妥当性を示しているといえよう)。

6. 陽的有限要素法による二次元移流拡散問題の数値計算例

6.1 計算条件 有限要素法は数値解法としての汎用性が高いので、本論文では EX(C) 法と EX 法に

図 4 数値解の初期条件 ($y=0$)

による二次元移流拡散問題の数値計算を行った。 $(2 \cdot Dx) \times (2 \cdot Dy)$ の長方形範囲内に一定濃度 C_B を最初に瞬間的に与え、無限遠での濃度を零とする条件での二次元非定常移流拡散問題は解析的に解くことができる。ただし、このような階段状に変化する初期濃度分布を精度良く扱うために図 4 に示すようにまず微小時間 δt だけ移流拡散させた後の濃度分布を解析解より計算し、それを初期濃度分布とした数値計算を行った。この場合の解析解の初期条件と境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} C(x, y, -\delta t) &= C_B, |x + U^*| \leq Dx, |y + V^*| \leq Dy \\ C(x, y, -\delta t) &= 0, |x + U^*| > Dx, |y + V^*| > Dy \\ C(\infty, \infty, t) &= 0, t \geq -\delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

(a) 347 節点, 304 要素

(b) 1295 節点, 1210 要素

図 5 計算領域の要素分割

図 6 陽的有限要素法による数値実験結果

(a) 理論誤差の変化

(b) 数値誤差の変化

図 7 理論誤差と数値誤差との対応関係

ただし

$$U^* = \int_{-\delta t}^0 u(t) dt, \quad V^* = \int_{-\delta t}^0 v(t) dt \quad \dots\dots\dots (43)$$

したがって、数値計算を開始する時点 ($t=0$) 以降の解析解は次式で表される。

$$\begin{aligned} C(x, y, t) = & \frac{C_B}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{Dx - (x - U)}{2(K_x t + K_x \delta t)^{1/2}} \right] \right. \\ & + \operatorname{erf} \left[\frac{Dx + (x - U)}{2(K_x t + K_x \delta t)^{1/2}} \right] \Big\} \\ & \times \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{Dy - (y - V)}{2(K_y t + K_y \delta t)^{1/2}} \right] \right. \\ & + \operatorname{erf} \left[\frac{Dy + (y - V)}{2(K_y t + K_y \delta t)^{1/2}} \right] \Big\}, \\ & (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, t \geq 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (44)$$

ただし

$$U = \int_0^t u(t) dt, \quad V = \int_0^t v(t) dt \quad \dots\dots\dots (45)$$

である。ここで数値計算における誤差の指標としては次式を考える。

$$E_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|C_{A_i}^j - C_i^j|}{C_{A_{\max}}^j} \times 100 \quad (\%) \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここで、添字“A”は、解析解であることを示し、 N は総節点数、 n は時間方向の計算繰返し回数、である。計算領域を半径がほぼ1となるような半円として考え、図5のような四角形一次要素を用いた陽的有限要素法EX(C)とEX法による数値実験を行った。境界条件はすべての境界で $\partial C / \partial n_B = 0$ ($\partial / \partial n_B$ は、境界での外向き法線方向の微分を示す) であり、 $u = 0.566$, $v = 0$, $C_B = 100$, $Dx = Dy = 0.05$ とした。また、式(44)での $K_x \delta t$ と $K_y \delta t$ は定数 (0.0005) とした。

6・2 計算結果と考察 図6は、1295節点でのEX(C)法とEX法による濃度 $C(y=0)$ の $t=0.5$ および $1 (\Delta t=0.0125)$ における分布を示している。これより、EX(C)法の精度はEX法に比べ大幅に改善されていることがわかる。図7に347節点、 $b_x=0.2$, $b_y=0$ におけるEX(C)法とEX法による E_t および E_r を示す。これより、(1)陽的な有限要素法では、補正係数の導入による精度が大幅に改善される、(2)誤差解析結果と数値実験結果とは良好な対応関係にある、ことがわかる。

7. 結 論

(1) 二次元非定常移流拡散方程式に2種類の陽的有限要素法および8種類の陽的差分法を適用した際の補正係数を誤差解析手法により導入し、新しい補正方式を提案した。

(2) 誤差解析の結果によれば、移流が支配的な場合 ($r_x = r_y \leq 0.1$) では差分法 [FZA(C)など] が、拡散が支配的な場合 ($r_x = r_y \geq 0.2$) では補正有限要素法の精度が高い。とくに補正した陽的有限要素法では、拡散が支配的な場合に精度が大幅に改善される。

(3) 陽的有限要素法の場合、数値実験結果と誤差解析結果とが良好な対応関係にあることを確認した。

文 献

- (1) 松田、機論, **56**-522, B (1990), 441.
- (2) 松田・邵・加藤、機論, **58**-556, B (1992), 3625.
- (3) Leith, C. E. (Alder, B., ほか2名編), *Methods in Computational Physics*, **4** (1965), 1, Academic Press.
- (4) Fromm, J. E., *J. Comput. Phys.*, **3**-2 (1968), 176.
- (5) Leonard, B. P., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **19** (1979), 59.
- (6) 松下・ほか2名、機論, **52**-480, B (1986), 2810.
- (7) Fromm, J. E., *Phys. Fluids Supplement*, **II** (1969), 3.