管オリフィス流れの過渡特性に関する数値解析*

(第1報, 非定常流の時定数)

早瀬 敏幸^{*1}, 程 平^{*2}, 林 叡^{*1}

Numerical Analysis of Transient Flow through a Pipe Orifice (1st Report, Time Constant for the Settling Flow)

Toshiyuki HAYASE, Cheng Ping and Satoru HAYASHI

As a fundamental consideration in hydraulic valve dynamics, transient flow through a pipe orifice has been studied via numerical analysis. Steady axisymmetric viscous fluid flow was first investigated to confirm the present SIMPLER-based finite volume methodology. Time-dependent calculation for a suddenly imposed pressure gradient has shown two distinct characteristic time constants for the transient state. The first characteristic time constant is commonly considered corresponding to the flow rate change, while the second one concerning the variation of flow structure has not been investigated in earlier studies. The final settling of the flow is established through the second characteristic time which is almost ten times larger than the first one for the present condition.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Fluid Power Systems, Fluid Transients, Pipe Orifice, Time Constant, Flow Meter

1. 緒 言

流体制御系において、制御弁に代表される流路内絞りは、通常、静的要素としてモデル化されるが、近年の機器の高速化に伴い、その動特性が無視できない場合も多い。本研究では、流路内絞りの基本的要素である管オリフィスを対象として、管内の非定常流に関する数値解析を行って、その動特性について検討する。

管オリフィスは、流量計測における基本的な要素として、従来より機械工学の分野で実験的・理論的研究が盛んに行われている。最近では、数値解析による研究もなされており、定常流に関しては、流れ場の構造はよく理解されている。一方、オリフィスの非定常特性については、音響学の分野で古くから研究が行われており⁽¹⁾、また機械工学の分野においても、絞り流量計による脈動流量の測定などに関連して研究がなされている⁽²⁾。最近では、数値解析による検討も行われているものの⁽³⁾、複雑な非定常流の構造については未知の部分が多い。

本研究では、まず管オリフィス内の定常流について

計算を行って、数値解析手法の妥当性を検証する。次に、上流と下流の圧力差 Δp をステップ状に変化させた場合の非定常計算を行う。本報では特に、流れ場を代表する諸量の時間変化に注目し、それらの時定数を用いて、非定常過程の時間スケールの定量的評価を行う。本報で得られた結果は、複雑な幾何形状をもつ制御弁の動特性解析の基礎的知見となるのみならず、管オリフィスによる非定常流量の計測に際しても一つの指針を与えるものである。

主 な 記 号

$A(z)$: 遠方で管壁面に一致する流面の断面積

A_i : オリフィスの開口面積

A_o : 管路の断面積

h_r, h_z : r, z 方向の格子間隔

p : 圧力 $= \bar{p}/(\bar{\rho} \bar{v}^2/\bar{r}_o^2)$

p_w : 壁面上での圧力

q : 流量 $= \bar{q}/(\bar{v} \bar{r}_o)$

q_e : 流量係数を用いて計算された流量

r_i : オリフィス半径

r_o : 管半径

Re : レイノルズ数 $= 2\bar{w}_m \bar{r}_o/\bar{v}$

t : 時間 $= \bar{t}/(\bar{r}_o^2/\bar{v})$

* 原稿受付 平成4年8月31日。

^{*1} 正員, 東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

^{*2} 学生員, 東北大学大学院。

(u, w) : r, z 方向の速度成分 $= (\bar{u}, \bar{w}) / (\bar{\nu} / \bar{r}_0)$

$\bar{w}_m$: 断面平均軸速度

z_a : はく離流線の再付着点の z 座標

z_i : オリフィス下流端面の z 座標

z_{ai} : 再付着点距離 $= z_a - z_i$

Δp : 上流 ($z=0$) と下流 ($z=L$) の圧力差
 $= \Delta \bar{p} / (\bar{\rho} \bar{\nu}^2 / \bar{r}_0^2)$

$\bar{\nu}$: 流体の動粘度

$\bar{\rho}$: 流体の密度

τ_1, τ_2 : 流量の時間変化に対応する時定数

τ'_2 : 再付着点距離の時間変化に対する時定数

τ_z : τ_2, τ'_2 に対する理論値

τ_q : τ_1 に対する理論値

下付き添字

s : 定常値

上付き添字

$\sim$: 有次元量

2. 数 値 計 算 法

対象領域および座標系を図1に示す。長さ L の円管内に、厚さ b の矩形断面のオリフィスが設けられた場合を考える。軸対称円筒座標系 (r, z) をとり、対応する速度成分を (u, w) とする。旋回速度成分はないものと仮定する。流体は非圧縮とし、ナビエ・ストークス式と連続の式を基礎式にとる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

本論文では、長さの代表量を管半径 $\bar{r}_0$ 、速度の代表量を $\bar{\nu} / \bar{r}_0$ とし、これに流体の密度 $\bar{\rho}$ を代表量として加えて諸量を無次元化して示す [ただし、 $\bar{\nu}$ は動粘度、圧力の代表量は $\bar{\rho} (\bar{\nu} / \bar{r}_0)^2$ である]。時間の代表量は

図1 対象領域と座標系

$\bar{\nu}^2 / \bar{\nu}$ となるが、これは一定の圧力こう配の下で加速される円管内の層流が、定常状態に達するまでの時間のスケールである⁽⁴⁾。なお、本論文を通じて、有次元量はすべて $\sim$ を付して示した。

非定常計算の初期条件としては、初期時刻 $t=0$ において、すべての流体は静止しているものとした。流れ場の境界条件としては、壁面上では滑りなしの条件、上流と下流の断面には、各速度成分の z 方向のこう配が零であるとの条件を適用した。圧力については、上流と下流の境界の間に一定の圧力差 Δp を仮定した。なお管長 L は、上記の上流、下流境界条件が満足されるよう、十分大きな値を用いる必要がある。

以下に、本研究で用いた数値解析手法⁽⁵⁾について述べる。等間隔の矩形スタガード格子系を用い、有限体積法に基づいて基礎方程式を離散化する。得られた差分方程式群は SIMPLER 法⁽⁶⁾ に類似の手法により解かれる。本数値解析手法の主な特徴を列挙すると、

(1) 対流項の差分化に、物理的考察に基づき再定式化された QUICK スキームを用いた⁽⁷⁾。図2を参照して、コントロールボリューム境界における変数 ϕ の値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} \\ = \phi_i + 1/8(-\phi_{i-1} - 2\phi_i + 3\phi_{i+1}) \quad (u > 0) \\ \phi_{i+1} + 1/8(3\phi_i - 2\phi_{i+1} - \phi_{i+2}) \quad (u < 0) \\ \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、下線を付した項は生成項として取扱われ、反復計算の過程で前回の計算値を用いて評価される。従来の QUICK の表式との本質的な差異は、反復過程における境界面での流束の連続性を保証する上記の生成項の取扱いにある。その結果、数値計算全体の数値安定性が向上した。なお、固体境界近傍においては、Leonard による三次精度の補間式⁽⁸⁾を用いているが、これも上と同様な手法で再定式化した。

(2) 線形代数方程式の解法に、五重対角行列の陰解法 (MSI 法)⁽⁹⁾ を採用することにより、計算の効率化が図られた。

(3) 時間微分項の離散化に、二次精度の陰解法⁽¹⁰⁾を用いることにより、陽解法に比べ大きな時間刻みで計算を進めることができた。

図2 有限体積法における一次元スタガード格子系

3. 計算結果と考察

計算は、東北大学流体科学研究所 CRAY Y/MP 8 で行った。計算条件を表1に示す。計算格子系、非定常計算の時間刻み Δt および管の長さ L については、種々の値について予備計算を行ったうえで決定した。また、オリフィス半径 $r_i=0.2$ および、オリフィスの幅 $b=0.1$ については、上記の値に固定して計算を行った。

3・1 定常計算 本計算条件の中で最も大きな圧力差に相当する $\Delta p[\Delta \bar{p}/(\bar{\rho} \bar{v}^2/\bar{r}_0^2)]=352\,000$ の場合の定常計算を種々の格子系について行った。平均格子間隔 $h_{\text{mean}}=\sqrt{h_r h_z}$ と再付着点距離 $z_{\text{ais}}=z_{\text{as}}-z_i$ (図1, 添字 s は定常値を示す) の関係を図3に示す。図3には、対流項の差分化に本計算で用いた三次精度の QUICK スキームに加えて、比較のため二次精度の中心差分、および一次精度の風上差分と中心差分を組合せた HYBRID スキームを用いた場合の結果も同時に示してある。図3より、本計算で用いた QUICK スキームでは、 $h_{\text{mean}}=0.05$ で z_{ais} の値が一定値に収束しているが、他の差分スキームでは、いまだ収束してお

らず、さらに小さな格子間隔を用いる必要があることがわかる。

次に、次式で表される流量係数 c_d について検討する。

$$c_d = q / \{ \pi r_i^2 \sqrt{2(p_u - p_d)} \} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 q は無次元流量、 p_u と p_d は、それぞれオリフィスから、上流と下流側に $h_z/2$ だけ離れた壁面上での圧力である。3種類の差分スキームについて結果を比較したものを、横軸に r 方向の格子間隔 h_r をとって図4に示す (z 方向の格子間隔 h_z は 0.05 に固定)。有限体積法の定式化において、階段状の軸速度分布を仮定して式(3)中の流量 q が計算されるため、半径方向の格子間隔 h_r の二次のオーダーの誤差が生じる。そのため、流量係数については、QUICK スキームの結果は、 $h_r=0.05$ においてもいまだ収束していない。この場合の c_d に対する誤差は、3種類の格子間隔に対する結果を外挿することにより、約 13% と見積もられる。

上記の考察と計算時間を考慮し、以後の計算では、 $h_r=h_z=0.05$ なる格子系を用いることとした。オリフィス流量計に関連して、流量あるいは流量係数の精度の高い結果を得るためには、半径方向にさらに細かい格子系を用いる必要があるが、本研究が目的とする格子点上の速度および圧力の評価と、対応する流れ場の構造の理解に対しては、上記の格子系で十分信頼できる結果が得られる。

圧力差 Δp を種々に変化させて定常計算を行った。図5に、 Δp が 1, 32 000, 352 000 の場合の流線図を z 方向に 1/4 に圧縮して示した。 Δp が増すとはく離流線の再付着点位置もそれにつれて下流に移動する。図5中の Re はレイノルズ数で、次式で定義される。

表1 計算条件

	Steady	Transient
Pipe length L	32	16
Orifice location z_i	4	4
thickness b	0.1	0.1
radius r_i	0.2	0.2
Grid number $N_r \times N_z$	20x640	20x320
size $h_r \times h_z$	0.05x0.05	0.05x0.05
Time increment Δt	10^{10}	0.0005
Total residual at convergence	10^{-4}	10^{-2}
CPU time for one time step on CRAY Y/MP	500s	40s

図3 はく離流線の再付着点距離 z_{ais} と平均格子間隔 $h_{\text{mean}}=\sqrt{h_r h_z}$ との関係 (定常計算, $\Delta P=352\,000$)

図4 流量係数 c_d と半径方向の格子間隔 h_r との関係 (定常計算, $\Delta P=352\,000$, $h_z=0.05$)

$$Re = 2\bar{w}_m \bar{r}_o / \bar{\nu} = 2q/\pi \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $\bar{w}_m$ は断面平均軸速度、 q は無次元流量である。

Re 数と再付着点距離 $z_{ais}(=z_{as}-z_i)$ の関係を図 6

図 5 定常流の流線

図 6 再付着点距離 z_{ais} とレイノルズ数 Re との関係 (定常計算)

図 7 流量係数 c_d とレイノルズ数 Re との関係 (定常計算)

に示す。図 6 より、再付着点距離は Re 数にほぼ比例して変化している。

流量係数 c_d と Re 数との関係を図 7 に示す。この結果は、後に非定常過程の時定数の見積もりの際に用いるが、すでに述べたように、流量の計算で生じる誤差のため、これらの値は、最大 10% 程度の誤差を含んでいることに注意を要する。

3.2 非定常計算

3.2.1 非定常過程の時定数 時刻 $t=0$ において、すべての流体が静止しているとして、圧力差 Δp を零から 32 000 にステップ状に変化させた場合の非定常計算を行った。流線の時間変化を、 z 方向を 1/2 に圧縮して図 8 に示す。時間 t が小さい間は、はく離は生じていないが [図 8 (a)], やがてオリフィスの下

図 8 流線の時間変化 ($\Delta P=32000$)

図 9 流量 q/q_s と再付着点距離 z_{ai}/z_{ais} の時間変化 (添字 s は定常値を表す, $\Delta P=32000$)

流側面からはく離渦が発生し、次第に成長して管壁に達する[図8(b)]. 時間の経過とともに渦領域が拡大し[図8(c)], 最後に定常状態となる[図8(d)]. 図8(c)を図8(d)と比較すると, $t=0.03$ において流量はほぼ定常値に達しているが, 渦領域はいまだ発達途中であることがわかる.

流量 q と再付着点距離 $z_{ai}(=z_a-z_i)$ の時間変化を, それぞれの定常値(添字 s を付した)で正規化して図9に示す. 流量 q は速やかに定常値に達するが, z_{ai} の変化はそれに比べて緩やかであり, 流量がほぼ一定値に達した後も変化を続けている. このことは, オリフィスの非定常特性に関して二つの時間スケールが存在する可能性を示唆している.

そこで, 上のデータを用いて, 流量および再付着点距離のそれぞれの定常値からの偏差を, 対数軸上にプロットした(図10). 図10より, $t<0.01$ では, 流量は急激に定常値に接近するのに対し, 再付着点距離はほとんど変化しない. 一方, $t>0.01$ では, 流量, 再付着点距離ともに, ほぼ同じ割合で指数関数的に定常値に漸近している. 流量の変化を, 時刻 $t=0.01$ 付近を境にして二つの異なった時定数 τ_1, τ_2 をもつ指数関数 $[\exp(-t/\tau_i), i=1, 2]$ で近似すると, それぞれの時定数の値は次のようになる.

$$\tau_1=0.0037 \quad (t<0.01)$$

$$\tau_2=0.035 \quad (t>0.01) \quad \dots\dots\dots(5)$$

なお, $t>0.01$ における再付着点距離 z_{ai} の変化より求めた時定数 $\tau'_2=0.046$ も上の τ_2 とほぼ同程度の値となった.

以下に, 二つの時間スケールについて考察する. まず, $t<0.01$ における流量の変化に対応する時定数 τ_1 は, 従来のオリフィス非定常特性の解析で考慮されているものであり⁽²⁾, 近似的に次式で与えられる(導出

および記号の意味については付録を参照).

$$\begin{aligned} \tau_q &= c_d l \sqrt{2/\Delta p} \\ &= 4c_d^2 A_l I / (\pi Re) \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

本計算の条件で τ_q の値を求めると, $\tau_q=0.0048$ (無次元) となり, 式(5)の $\tau_1(0.0037)$ とほぼ一致する.

次に, $t>0.01$ における流量および再付着点距離の変化に対応する時定数 τ_2 および τ'_2 は, 流れ場の形成に関する時定数であるが, 対応する流量変化がわずかなことから, 従来のオリフィスの非定常特性解析では考慮されていない. この場合の時間スケールを, オリフィス開口部の平均流速で, 定常状態の再付着点距離まで到達するのに要する時間 τ_z として見積もらると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \tau_z &= z_{ais} / (q_s / A_i) \\ &= 2z_{ais} A_i / (\pi Re) \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

本計算の図6の傾きより τ_z を算出すると, $\tau_z=0.033$ (無次元) となり, 式(5)の $\tau_2(=0.035)$ および $\tau'_2(=0.046)$ とほぼ一致する. この τ_z および先に求めた τ_q が, 図9中に示してある.

次に, 二つの時定数 τ_q, τ_z の値を, 横軸に Re 数をとって図11に示す. すでに述べたように本論文の計算条件下では, 再付着点距離 z_{ais} と Re 数はほぼ比例関係にあるので(図6), 式(7)より導かれる流れ場の代表時間 τ_z は Re 数にかかわらずほぼ一定値をとる. 一方, 式(6)で与えられる流量変化の時定数は, Re 数の増加とともに減少する. 圧力差 $\Delta p=32\,000(Re=12.6)$ に加えて $\Delta p=192\,000(Re=35.5)$ の場合についても, 図10に対応する結果より時定数 τ_1, τ_2, τ'_2 の値を求め, 図11中に示した. 上の τ_q, τ_z と比較すると両者はよく一致しており, τ_q と τ_z はオリフィスの非定常特性を表す二つの時定数の評価として妥当なものであると考えられる.

図10 流量 q および再付着点距離 z_{ai} の定常値からの偏差の時間変化 (添字 s は定常値を表す, $\Delta P=32\,000$)

図11 時定数 τ とレイノルズ数 Re との関係

3・2・2 圧力の時間変化 種々の軸位置における、壁面上の圧力の時間変化を図12(a)に示す。時刻 $t < 0.01 = O(\tau_q)$ の範囲では、各位置の間に流体の加速に伴う圧力差が生じている。それ以降は、オリフィスの上流では圧力はほぼ一定値となっているが、オリフィス下流側では $O(\tau_q) < t < O(\tau_z)$ においても流れ場の変化に伴う圧力変化が存在する。図12(b)は、オリフィス下流側の圧力の時間変化を拡大して示したものである。初期の $t=0.01$ 付近においては、各軸位置で圧力の変化に大きな差はみられないが、上流位置から順次、それぞれ異なる変化傾向を示すようになる。図12中の t_a は、下流方向に移動する渦領域が各軸位置を通過する時刻であるが(図9)、これは上で述べた各位置がそれぞれ異なる圧力変化を開始する時刻と一致している。圧力の変化の幅自体は、5%程度と小さいものの、精密な流量測定においては、無視できない効果を与える。

最後に、 $O(\tau_q) < t < O(\tau_z)$ における流れ場の変化が、流量計測の精度に与える影響について検討する。オリフィスの直前の位置 ($z=3.875$) と、下流側の各位置に

(a)

(b)

図12 壁面上の圧力の時間変化 ($\Delta P=32\,000$, $z_i=4.0$)

おける圧力差と流量の計算結果から、式(3)を用いて流量係数の値を求めた。結果を図13中に示すが、各位置によって大きな差はみられない。さて、非定常過程において、この流量係数の値と、各時刻における圧力差から、式(3)より流量の推定値を求めたものを q_e とする。これと、実際の流量 q との差を、定常状態の流量 q_s で正規化して示したものが図13である。図13には現れていないが、 $t < O(\tau_q)$ では圧力差により流体が加速されるため、 q_e と q との間には大きな差異が生じることはよく知られている⁽²⁾。しかし、本計算結果は、 $O(\tau_q) < t < O(\tau_z)$ の範囲においても、 q_e と q との間には、値そのものは1%程度と小さいながらも差異が存在することを示している。また、この差異は下流ほど、長時間にわたって存在することもわかる。

4. 結 言

ステップ状の圧力変化に対する、管オリフィス流れの非定常特性に関する数値解析を行って、以下の結論を得た。流量の整定時間は従来の非定常過程の解析結果でよく説明されるが、速度場および圧力場全体が整定する時間スケールは、流量のそれに比べてはるかに長い。本研究で導かれた流れ場の変化に関する時定数の評価は、本計算の範囲内で妥当な結果を与える。ま

図13 流量係数より求めた流量 q_e と実際の流量 q との差の時間変化 ($\Delta P=32\,000$)

図14 管内流れの模式図

た流れ場の変化に伴って流量もわずかに変化しており、オリフィスを用いた精密な流量計測に際しては注意を要する。今後の課題としては、 Δp が零以外の一定値からステップ状に変化する場合も含めた動特性の検討、ポペット弁、スプール弁など、より複雑な幾何形状に対する検討などを行いたい。

本研究で用いた、数値解析コードは、カリフォルニア大学バークレー校において、著者の一人および Humphrey, J. A. C., Greif, R. により作成された。また、本研究の遂行にあたって東北大学流体科学研究所飯村或郎助手より種々助言を得たことを記し謝意を表す。

[付 録 式(6)の導出]

図14を参照して、非定常のベルヌイ式は次式となる。

$$(I/A_i)dq/dt|_{t=0} = \Delta p \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで I は慣性長と呼ばれ、次式で表される。

$$I = A_i \int_1^2 \frac{dz}{A(z)} \doteq \delta + (L - \delta) \frac{A_i}{A_o} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式中の δ は、縮流部の等価的な長さであり、無限平板上のオリフィスに対して、理論的に次式で与えられている⁽¹¹⁾。

$$\delta = 16r_i/(3\pi) \quad \dots\dots\dots (10)$$

流体の加速に対する時定数 τ_q を、次式で見積もる。

$$\tau_q = q_s/(dq/dt|_{t=0}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(8)～(10)、(3)、(4)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau_q &= c_d I \sqrt{2/\Delta p} \\ &= 4c_d^2 A_i I / (\pi Re) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

本計算では $r_i=0.2$ としているので、式(9)、(10)より $\delta=0.34$, $I=0.97$ となる。さらに、 $c_d=0.62$ (図7), $\Delta p=32\,000$ として τ_q を求めると、 $\tau_q=0.0048$ となる。

文 献

- (1) Thurston, G. B. and Martin, C. E. Jr., Periodic Fluid Flow through Circular Orifices, *J. Acoust. Soc. Am.*, 25-1 (1953), 26.
- (2) 山口, オリフィスの非定常特性, ターボ機械, 7-2 (1979), 31.
- (3) Jones, E. H. Jr. and Bajura, R. A., A Numerical Analysis of Pulsating Laminar Flow through a Pipe Orifice, *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 113 (1991), 199.
- (4) Batchelor, G. K., 入門流体力学, (1972), 195, 東京電機大学出版局.
- (5) Hayase, T., Humphrey, J. A. C. and Greif, R., Mini-Manual for ROTFLO2, *Dept. Mech. Eng. Rep.*, # FM-90-1, Univ. Calif. Berkeley, (1990).
- (6) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), McGraw-Hill.
- (7) Hayase, T., Humphrey, J. A. C. and Greif, R., A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures, *J. Comput. Phys.*, 98-1 (1992), 108.
- (8) Leonard, B. P. (Taylor, C., 編), Locally Modified QUICK Scheme for Highly Convective 2-D and 3-D Flows, *Proceeding 5th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows*, (1987), 35, Pineridge Press, Swansea, U. K.
- (9) Schneider, G. E. and Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, *Numer. Heat Transf.*, 4 (1981), 1.
- (10) Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, 1 (1988), 302, Springer-Verlag.
- (11) Funk, J. E., Wood, D. J. and Chao, S. P., The Transient Response of Orifices and Very Short Lines, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 94-2 (1972), 483.