k - ϵ 乱流モデルによる圧力こう配を伴う流れの乱流解析*服部 博文^{*1}, 長野 靖 尚^{*1}**Calculations of Turbulent Flows with Pressure Gradients using a k - ϵ Model**

Hirofumi HATTORI and Yasutaka NAGANO

A k - ϵ turbulence model is developed to calculate wall turbulent shear flows under various pressure gradient conditions. In the present model, we set the dissipation rate of turbulent energy at a wall equal to zero, though the wall limiting behavior of velocity fluctuations is reproduced exactly. Thus, the model assures computational expediency and convergence. The proposed model is constructed to properly take into account the effects of pressure gradients on shear layers. It was found by Nagano et al. (1992) that in adverse pressure gradient flows the Van Driest damping constant decreased with increasing dimensionless pressure gradient parameter P^+ . Therefore, the present model has introduced the modified Van Driest damping function which is a function of P^+ . The proposed model was tested by application to a turbulent channel flow and boundary layers with $P^+ < 0$, $P^+ = 0$ and $P^+ > 0$. The model predictions indicate that agreement with the experiment and the direct simulation data is very good over a wide range of pressure variations.

Key Words: Turbulent Flow, Computational Fluid Dynamics, Turbulence Model, Pressure Gradient, Wall Limiting Behavior, Dissipation Rate

1. 結 言

k - ϵ モデルは、乱流数値解析でその記述の簡便さ予測精度の良さなどから、現在最も用いられている乱流モデルである。低レイノルズ数形 k - ϵ 乱流モデルには、大別すると次の3種類がある。(1) Jones-Launder (JL)⁽¹⁾, Nagano-Hishida (NH)⁽²⁾ らに代表されるタイプ、(2) Nagano-Tagawa (NT)⁽³⁾, Myong-Kasagi (MK)⁽⁴⁾ らに代表されるタイプ、そして(3) 最近の直接数値シミュレーション(DNS)の結果⁽⁵⁾ による ϵ の乱れの壁面漸近挙動の違いを修正したモデル⁽⁶⁾ である。(1)のモデルは、壁面での ϵ の境界条件が零となるように補正項を付加し計算が容易に行えるようになっているが、乱れの壁面漸近条件が満たされていないため、例えば高プラントル数流体の熱伝達のように壁の極近傍の乱流諸量に支配される現象の解析では予測精度が悪くなる。(2)のモデルはその欠点を修正、発展させたモデルであり、乱れの壁面漸近挙動が再現されるようにモデル化が施されている。(3)のモデルは、DNSにより得られた ϵ の壁面漸近挙動の結果を再現するように修正されたものであるが、モデルの形

は(1),(2)と比べるとより複雑なものとなっている。

乱れの漸近挙動を考慮したモデルは、数値計算上不安定になりやすいといわれる。それに対し、(1)の JL⁽¹⁾, NH⁽²⁾ のモデルでは ϵ を壁で零にする操作が行われており、数値計算アルゴリズムでの都合の良さ、収束性の良さと優れている反面、乱れの壁面漸近挙動が満たされていないため、前述のような問題が起こる。

一方、圧力こう配のかかった流れへの k - ϵ モデルの適用では、代数応力モデル(ASM)の援用により逆圧力こう配流の予測精度が向上することが、Nagano-Tagawa⁽³⁾ らによって示された。また、最近の Nagano ら⁽⁷⁾ の実験により、逆圧力こう配流れでは普遍速度分布が存在しないことが明らかにされ、そのモデルへの対応が急務となっている。

本研究は、前述の(1),(2)のモデルの利点を考慮して、乱れの壁面漸近条件を満たし、かつ計算が簡便となる ϵ の壁面境界条件を零にするモデルを構築するものである。その際、圧力こう配の壁近傍の乱流構造への影響をモデルに反映させる。また、圧力こう配流でのモデルの予測精度は、DNS と最近の実験結果を基に検証する。

* 原稿受付 平成4年8月28日。

^{*1} 正員、名古屋工業大学(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

2. 記 号

- D, E : k 式および ε 式の補正項
 f_w, f_u, f_ε : 乱流モデル関数
 h : チャネル半幅
 k : 乱流エネルギー $= \overline{u_i u_i} / 2$
 $\bar{P}$: 圧力の時間平均値
 P^+ : 無次元圧力こう配 $= \nu(d\bar{P}/dx)/\rho u_\tau^2$
 Re : レイノルズ数
 R_t : 乱流レイノルズ数
 $\bar{U}, u$: x 軸方向の時間平均速度および速度乱れ
 $\bar{U}_i, u_i$: x_i 方向の時間平均速度および速度乱れ
 $\bar{U}_e, \bar{U}_o, \bar{U}_m$: 境界層外速度, 入口速度および断面平均速度
 $\bar{U}^+$: 無次元速度 $= \bar{U}/u_\tau$
 u_τ : 摩擦速度 $= \sqrt{\tau_w/\rho}$
 v : y 方向の速度乱れ
 x, y : 流れ方向および壁面に垂直方向の座標
 y^+ : 壁からの無次元距離 $= u_\tau y / \nu$
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ
 ε : 乱流散逸 $= \nu(\partial u_i / \partial x_j)(\partial u_i / \partial x_j)$
 ν, ν_t : 動粘性係数および渦粘性係数
 ρ : 流体の密度
 τ : 時間
 τ_a, τ_w : 全せん断応力および壁面せん断応力
 $(\quad)$: 時間平均値
- 添 字
- $f_{,i}$: 変数 f の x_i による微分
 $(f_{,i} = \partial f / \partial x_i, f_{,ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \text{ など})$
 w : 壁面

3. モ デ リ ン グ

3・1 基礎方程式 低レイノルズ数形 k - ε 乱流モデルの基礎方程式は, 渦粘性係数 ν_t を用いた次式で与えられる^{(1)~(4)}.

$$Dk/D\tau = \{(\nu + \nu_t/\sigma_k)k_{,j}\}_{,j} - \overline{u_i u_j} \bar{U}_{i,j} - \varepsilon + D \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$D\varepsilon/D\tau = \{(\nu + \nu_t/\sigma_\varepsilon)\varepsilon_{,j}\}_{,j} - C_{\varepsilon 1}(\varepsilon/k)\overline{u_i u_j} \bar{U}_{i,j} - C_{\varepsilon 2}f_\varepsilon \varepsilon^2/k + E \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで,

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t(\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) - (2/3)\delta_{ij}k \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2/\varepsilon \quad \dots\dots\dots (4)$$

また, $D/D\tau$ は実質微分を表す.

式(1)~(4)と, 次の連続の式と運動方程式を連立させることによって乱流諸量が求められる.

$$\bar{U}_{i,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$D\bar{U}_i/D\tau = -\bar{P}_{,i}/\rho + \nu\bar{U}_{i,jj} - (\overline{u_i u_j})_{,j} \quad \dots\dots\dots (6)$$

3・2 モデル化 JL, NH モデルのように, k 方

程式(1)に補正項 $D = -2\nu(\sqrt{k}_{,y})^2$ を用いて ε の壁面境界条件を零とすると, 壁近傍での ε の漸近挙動は $y \rightarrow 0$ で $k \propto y^2$ より,

$$\varepsilon = 2\nu b y + O(y^2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる⁽²⁾.

一方, NT, MK モデルのように D 項を付加せず ε を壁面で $\varepsilon = \nu(k_{,yy})$ と置くと, ε の壁面漸近挙動は,

$$\varepsilon = 2\nu a + 6\nu b y + O(y^2) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる⁽³⁾. ここで, a, b は x, z (流れ方向とスパン方向の座標)の関数である. また, 壁近傍では $-\overline{uv} \propto y^3$, $\nu_t \propto y^3$ が成立する⁽³⁾. したがって, 式(4)へ式(7)の ε を用いた場合は, 乱れの壁面漸近挙動を満たすために, モデル関数 f_μ は $f_\mu \propto y^0$ が要求され, 式(8)を用いた場合は, $f_\mu \propto y^{-1}$ が要求される. Nagano-Tagawa⁽³⁾ は, 式(8)の ε を用いた次式を提案した.

$$f_\mu = \{1 - \exp(-y^+/A^+)\}^2 (1 + B_{\mu 1}/R_t^{3/4}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで, $A^+ = 26$, $B_{\mu 1} = 4.1$ であり, 乱流レイノルズ数は $R_t = k^2/\nu\varepsilon$ と定義している. Jones-Launder⁽¹⁾ は式(7)の ε を用い, 次式を提案した.

$$f_\mu = \exp\{-2.5/(1 + R_t/50)\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

この場合 $y \rightarrow 0$ で $f_\mu \propto y^0$ となるので, 式(10)は条件を満たしている. しかし, このモデルは壁乱流に適用した場合あまり良い予測値を与えないことが知られている⁽²⁾.

本研究では, NH モデルと同様に, 式(1), (2)で補正項 D, E を付加し, ε の壁面境界値を零と置く. ただし,

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + 2\nu(\sqrt{k}_{,y})^2 \quad (\sqrt{k}_{,y} \geq 0) \quad \dots\dots\dots (11)$$

として, これを用いて ν_t, R_t を以下のように定義する.

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2/\tilde{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$R_t = k^2/\nu\tilde{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(11)の $\tilde{\varepsilon}$ の漸近挙動は, $\tilde{\varepsilon} = 2\nu a + 6\nu b y + O(y^2)$ であるので, $y \rightarrow 0$ での漸近挙動は式(8)と一致し, 式(12), (13)を用いれば式(9)と同じモデル化で漸近挙動が満たされる.

一方, 急激な圧力こう配がある流れでは, Van Driest 定数 A^+ は, 圧力こう配の大きさに伴って変化することが Nagano ら⁽⁷⁾ の逆圧力こう配乱流境界層の実験により示された. 式(4), (12)の ν_t の減衰関数 f_μ に Van Driest 関数を用いたモデルでは, A^+ を定数と置くと, 緩和層から乱流域にかけての速度分布の変化

が圧力こう配のない流れと類似のものになりこの実験結果と合致しない。Cebeci⁽⁸⁾ および Launder⁽⁹⁾ らは、原形の Van Driest 関数は壁面せん断応力のみに依存して圧力こう配による混合距離の変化が表しきれないとして、全せん断応力 $\tau_a = \mu \partial \bar{U} / \partial y - \rho \overline{uv}$ を用いて混合距離のモデル化を行った。本研究ではそれらを参考にして、式(12)中の長さスケールに対するモデル関数 f_μ を式(9)の代わりに次式のように置く。

$$f_\mu = \{1 - \exp(y^+/A^+)\}^2 \times [1 + (B_{\mu 1}/R_i^{3/4}) \exp\{-(R_i/B_{\mu 2})^2\}] \quad \cdots \cdots (14)$$

ここで $A^+ = A_0^+/\tau^+$, $\tau^+ = \tau_a/\tau_w \simeq 1 + y^+ P^+$ である。本モデルでは τ^+ の式の y^+ に代表値を取り、

$$\tau^+ = 1 + 11.8 P^+ \quad \cdots \cdots (15)$$

とモデル化する。定数 11.8 は、Cebeci ら⁽⁸⁾ のモデル定数と一致している。また、式(14)中の $\exp\{-(R_i/B_{\mu 2})^2\}$ の項は、 f_μ が 1 を超えないための補正項である。

式(14)中のモデル定数 A_0^+ , $B_{\mu 1}$ は、以下の条件と DNS のデータより最適値を求めた。壁近傍のレイノルズ応力は、式(3), (12), (14)を用いて次のように表される。

$$-\overline{uv}^+ = -\overline{uv}/u_\tau^2 \simeq C_\mu (B_{\mu 1}/A^+)^2 y^{+2} R_i^{1/4} \cdots (16)$$

DNS データ⁽⁵⁾ ($Re = 2\bar{U}_m h/\nu = 13750$) の $y^+ \simeq 1$ で $R_i \simeq 5 \times 10^{-2}$, $-\overline{uv}^+ \simeq 1 \times 10^{-3}$ より、 $(B_{\mu 1}/A^+)^2 \simeq 2.3 \times 10^{-2}$ となる。これらの条件を考慮して $A_0^+ = 30$, $B_{\mu 1} = 20$ と定めた。また、 $B_{\mu 2}$ は数値最適化より求め、ほかのモデル定数とモデル関数は、NH モデルと同じものを採用した。

ところで、DNS データより壁近傍の ε の漸近挙動は壁に向かって増加するという結果が示されたが⁽⁵⁾⁽⁶⁾、これまでの代表的なモデルはこれをモデル化していない。本モデルでも、 ε の壁面漸近挙動を DNS データとは一致させていない。最近の研究⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ によると、 ε の壁面漸近挙動を DNS のデータと合せるためには、 k 方程式および ε 方程式にさらにいくつかの補正項を付加しなければならない、モデルがいつそう複雑になる。本研究のモデルは、主として工学・技術計算に容易に適用できることを主目的としているため、旧来のモデルの骨子をできる限り保持した。さらに、DNS データと ε の漸近挙動を合せると数値計算上不安定になる場合もある⁽¹⁰⁾ との報告もあり、その点からも本モデルでは簡易さを旨とした。したがって、当然壁のごく近傍の k , ε の本モデルによる予測値は DNS データと合っていないが、レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ の予測値みると本モデルでも DNS データと非常に良く一致している(後述の図 2 参照)。つまり、 k と ε の壁近傍の

予測精度を多少犠牲にしても、技術計算ではレイノルズ応力 $-\overline{uv}$ と平均速度 $\bar{U}$ の分布の予測精度のほうが重要であると考え、これらが正しく計算できることを第一義とした。

以上のようにモデル化した速度場 k - ε モデルのモデル定数とモデル関数を、以下にまとめる。

$$\left. \begin{aligned} C_\mu &= 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.45, C_{\varepsilon 2} = 1.9 \\ \sigma_k &= 1.4, \sigma_\varepsilon = 1.3 \\ f_\mu &= \{1 - \exp(y^+/A^+)\}^2 \\ &\quad \times [1 + (B_{\mu 1}/R_i^{3/4}) \exp\{-(R_i/B_{\mu 2})^2\}] \\ f_\varepsilon &= 1 - 0.3 \exp(-R_i^2) \\ D &= -2\nu(\sqrt{k})_y^2 \\ E &= \nu\nu_\varepsilon(1 - f_w)(\bar{U}_{yy})^2 \\ f_w &= \{1 - \exp(-y^+/30)\}^2 \\ A^+ &= 30/(1 + 11.8 P^+), B_{\mu 1} = 20, B_{\mu 2} = 120 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (17)$$

ここで、モデル定数は標準値を用いているが、 σ_k についてのみ NT モデルの成果を入れている。

4. 計算結果および考察

4.1 数値解法 本研究で用いた計算手法は、有限体積法を基にしている。偏微分方程式の離散化は、Patankar⁽¹²⁾, Leschziner⁽¹³⁾ らの方法によった。計算格子は、Nagano ら⁽²⁾⁽³⁾ と同一のものをを用いた。格子点数は y 方向に 201 点で、壁近傍で格子間隔が細くなっており、格子間隔に依存しない解が得られていることは確認されている。

境界条件は、 $y=0$ (壁面) で、 $\bar{U}=k=\varepsilon=0$ 、内部流れでは、対称軸上で $\bar{U}_{,y}=k_{,y}=\varepsilon_{,y}=0$ 、外部流れの場合は、境界層外で $\bar{U}=\bar{U}_e$, $k=\varepsilon=0$ とした。また収束判定条件は各未知量 $X(=\bar{U}, k, \varepsilon)$ に対し、

$$\max |X^{(i+1)} - X^{(i)}| / \max |X^{(i)}| < 10^{-5} \quad \cdots \cdots (18)$$

とした。ここで i は繰返し回数を示す。数値計算は、

図 1 管内流の普遍速度分布

TITAN 3000 および PC 386 で行った。

4.2 管内流 本モデルの検証を, Kim⁽⁵⁾ の DNS のデータと比較して行った。図 1 に普遍速度分布を示す。チャンネル流では次の対数則

$$\bar{U}^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

が DNS のデータから得られているが, 本モデルでもそれを良く再現している。

壁近傍のレイノルズ応力の分布を図 2 に示した。既存の補正項 D を用いたモデル⁽²⁾ では再現されなかった壁面漸近挙動 $-\overline{uv}^+ \propto y^{+3}$ を, 本モデルは再現している。また, 壁近傍の予測値は DNS データとほぼ一致している。

図 3 は壁近傍の $k^+ = k/u_\tau^2$ と $\tilde{\varepsilon}^+ = \nu \tilde{\varepsilon}/u_\tau^3$ の分布である。モデル化で壁近傍の $\tilde{\varepsilon}$ を DNS データと一致させていないため, 壁近傍では必然的に小さい予測値を与えるが, 高レイノルズ数領域ではほぼ両者は一致している。

4.3 境界層流 本モデルの外部流れの解析に対

図 2 壁近傍のレイノルズ応力分布

図 3 壁近傍の乱流エネルギー分布とその散逸率

する有効性を検証するために, まず初めに零圧力こう配流 ($P^+=0$) を解析し, Nagano ら⁽⁷⁾ の実験値 ($R_\theta=1620$) および Spalart⁽¹⁴⁾ による DNS ($R_\theta=1410$) と比較した。図 4 は平均速度分布の比較であるが, 全域にわたって非常に良い一致をみせている。また, レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ の予測値を図 5 に示したが, 実験値および DNS データと比較してもそんな色ない結果となっている。乱流エネルギー k の分布は, 図 6 に示したように, ピーク値から外側にかけては DNS⁽¹⁴⁾ と定量的にも良く一致している。

次に圧力こう配がかかった外部流れにおける本モデル

図 4 境界層流れの普遍速度分布

図 5 境界層流れのレイノルズ応力分布

図 6 境界層流れの乱流エネルギー分布

ルの予測精度を調べるために、 $P^+ > 0$ の逆圧力こう配流れについて Nagano ら⁽⁷⁾ の実験に合せて計算を行った。計算に際しては Nagano-Tagawa⁽³⁾ で示されたように代数応力方程式(ASM)を援用した。ただし、本モデルに合せて ASM 中の ε を $\bar{\varepsilon}$ にすべて置き換えた。モデル定数と関数は、Nagano-Tagawa⁽³⁾ とすべて同じである。図 7 に速度分布を示す。明らかに、 A^+ を定数として計算した結果は、壁領域で零圧力こう配流での普遍速度分布に近い値を予測している。それに対し、本モデルから得られる速度の分布形は実験結果に全域で非常に良く一致している。また、レイノルズ応力の測定値との比較を図 8 に示したが、 P^+ の増加

に伴い外層で $-\overline{uv}/u_\tau^2$ が増加し、零圧力こう配流にみられるような定応力層の分布形がないという現象⁽⁷⁾ を定量的にも良く再現している。さらに、 k の分布も実験値と比較してほぼ満足のいく結果が得られている(図 9)。

最後に、 $P^+ < 0$ の順圧力こう配流を、Spalart⁽¹⁵⁾ の DNS の条件に合せて本モデルで解析した。 $P^+ = -1.2 \times 10^{-2}$ と $P^+ = -1.9 \times 10^{-2}$ の二つの条件について解析を行い、その結果を $P^+ = 0$ の結果と合せて図 10 に速度分布、図 11 にレイノルズ応力の分布を示した。速度分布が P^+ の変化に伴って層流化していく様子が、

図 7 逆圧力こう配流の平均速度分布

図 9 逆圧力こう配流の乱流エネルギー分布

図 10 順圧力こう配流の平均速度分布

図 8 逆圧力こう配流のレイノルズ応力分布

図 11 順圧力こう配流のレイノルズ応力分布

表 1 計算収束速度

Initial data $Re = 10,000$ (pipe flow)				
Re	NT model		Present(HN)	
	CPU time(sec)	(No. itera.)	CPU time(sec)	(No. itera.)
20,000	27	(54)	24	(41)
30,000	26	(53)	25	(42)
40,000	31	(63)	25	(42)
50,000	34	(68)	25	(43)
100,000	38	(78)	25	(43)
500,000	40	(81)	25	(39)
				time ratio (HN/NT)
				0.889
				0.962
				0.806
				0.735
				0.658
				0.625

DNS データと同様に良く再現されている。また、壁近傍でのレイノルズ応力の分布も DNS と非常に良く一致し、 P^+ が負となる場合にレイノルズ応力が減少していく様子を正しく予測している。

4.4 モデルの計算収束性 ε の壁面境界条件を零とすることによる数値計算上の効果を、あるレイノルズ(ここでは $Re=10,000$)を初期値としレイノルズ数を順次増加させた円管内乱流の計算に要した計算収束時間(使用計算機 PC 386)および繰返し回数を比較することにより調べた。比較対象は、ほぼ同じ予測精度を持ち、散逸 ε の壁面境界条件を $\varepsilon_w = \nu(k_{yy})_w$ とする NT モデルである。本研究のモデルは、表 1 に示したように、レイノルズ数にほとんど依存せず安定した計算が行え、高レイノルズ数になるほど NT モデルより時間の消費が少ない。この差異の最大の原因は、NT モデルでは散逸の壁面境界値が乱流エネルギーの壁面への拡散によりレイノルズ数に応じて決まるのに対し、本モデルでは常に定数(=0)で変化しないためである。

5. 結 言

ε の壁面境界値を零とし、なおかつ壁乱流の乱れの漸近挙動を満たすモデルを構築した。また、渦粘性 ν_t に圧力こう配の影響を陽的に取り入れたモデル化を行い、種々の圧力こう配を伴う乱流の計算をして、実験値および DNS データと比較した。本研究の結果は、

以下のように要約される。

(1) 乱れの壁面漸近挙動を再現しかつ壁面での散逸率を零にするためには、乱流レイノルズ数 Re 、渦粘性 ν_t で $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon} [= \varepsilon + 2\nu(\sqrt{k_{yy}})^2]$ と置くことによりそれらが満たされる。

(2) Van Driest 形減衰関数中の A^+ を、 $A^+ = A_0^+/(1+11.8P^+)$ と置くことにより、2 方程式乱流モデルでも P^+ の正負にかかわらず良い結果をもたらすことを示した。特に、逆圧力こう配流($P^+ > 0$)では、 P^+ の変化により乱流諸量の分布形が著しく変化するため、本モデルの関数形の効果は大きい。

(3) 壁面散逸率を零と置くことにより、境界条件が k に依存しなくなるため、計算上の収束性が大幅に良くなる。

文 献

- (1) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **15**(1973), 1119.
- (2) Nagano, Y. and Hishida, M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **109**(1987), 156.
- (3) Nagano, Y. and Tagawa, M., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **112**(1990), 33.
- (4) Myong, H. K. and Kasagi, N., *JSME Int. J., Ser. II*, **33**(1990), 63.
- (5) Kim, J., Personal communication, (1991).
- (6) Rodi, W. and Monsour, N. N., (Gatski, T. B., Sarker, S. and Speziale, C. G., 編), *Studies in Turbulence*, (1992), 17, Springer-Verlag.
- (7) Nagano, Y., Tagawa, M. and Tsuji, T., *Turbulent Shear Flows*8, (1992), 7, Springer-Verlag.
- (8) Cebeci, T., Smith, A. M. O. and Mosinskis, G., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **92**(1970), 133.
- (9) Launder, B. E., *Proc. 1980-1981 AFOSR-HTTM-Stanford Conf. Complex Turbulent Flows*, **2**(1981), 691.
- (10) 河村・羽田, 第 29 回日本伝熱シンポジウム講論集, (1992), 380.
- (11) 長野・島田, 機論, **59-559**, B(1992), 742.
- (12) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), Hemisphere.
- (13) Leschziner, M. A., *An Introduction and Guide to the Computer Code PASSABLE*, (1982), UMIST.
- (14) Spalart, P. R., *J. Fluid Mech.*, **187**(1988), 61.
- (15) Spalart, P. R., *J. Fluid Mech.*, **172**(1986), 307.