曲がり管内生理的拍動流の数値解析*

(大動脈弓内流れのモデル計算)

駒井 豊^{*1}, 山崎 元^{*2}
大西 祥平^{*2}, 谷 下一夫^{*3}

Numerical Analysis of Physiological Flow in a Curved Tube

(Model of an Aortic Arch Flow)

Yutaka KOMAI, Gen YAMAZAKI,
Shohei ONISHI and Kazuo TANISHITA

Human aortic arch flow was regarded as an intermittent flow in a curved tube with large curvature ratio $\delta=1/3$. The waveform of aortic flow was obtained by means of Doppler echocardiography from both resting and post-exercise conditions of healthy human adults (age: 22~27). The result in the resting condition ($Re=2\,300$, $\alpha=13.34$) shows that the transverse flow field is characterized by the appearance of three vortices (residue vortex from the previous cycle, one generated near the Stokes layer, and one induced by development of axial velocity boundary layer in the systole). In the post-exercise condition ($Re=3\,400$, $\alpha=16.7$), a Lyne vortex appears in the end of systolic period and exists until the beginning of systolic phase, together with the vortices generated in the diastolic phase. Furthermore multiple period solutions were found numerically for several flow conditions. Our calculation indicates the aortic flow may have multiple period solutions, but its physiological significance is not yet clear.

Key Words: Curved Tubes, Physiological Flow, Secondary Flow, Numerical Analysis, Biological Engineering

1. 緒 言

アテローム性動脈硬化症は太い動脈の曲がり部および分岐部に多発的に現れることが臨床医学において知られており⁽¹⁾, 好発部位での局所的な血流分布によってもたらされる力学的要因と動脈硬化症の発生機構との間にさまざまな仮説が立てられている⁽²⁾⁽³⁾. そのため血流が血管壁に及ぼす最も直接的な因子である壁せん断応力の時間的および空間的な分布, また酸素や脂質などの物質輸送現象に関心が向けられている.

大動脈弓は, 曲率比(管半径/曲率半径)の大きな曲がり管と見なせるが, 曲率比が大きな曲がり管内流れでは血流波形に加え, 曲率比が流れ場に著しい影響を与えている⁽⁴⁾⁽⁵⁾. また, 大動脈内流れの流量波形は収縮期(拍出期)とそれに続く拡張期(静止期)を持つ周期的間欠流と見なされるが, 大動脈弓内では間欠性のパラメータ(収縮期/心拍周期)が流れの構造に大きく関し, 特に物質輸送と関連が深い二次流れ渦のパターンに変化をもたらしている⁽⁶⁾.

曲がり管内非定常流の解析的研究として, Lyne の振動流⁽⁷⁾, Smith⁽⁸⁾, Lin & Tarbell⁽⁹⁾ の拍動流の研究が主に摂動法によって行われているが, 摂動法の性格上, 解析結果は曲率比の無視し得る領域に限られ, 大動脈弓のような曲率比の大きな曲がり管内流れの特徴を再現しているとは言い難い. また, 実験的研究として, Talbot & Gong⁽¹⁰⁾, 角田ら⁽¹¹⁾ による研究があり, 曲率比の影響を考慮した研究としては成瀬ら⁽⁵⁾, Nishina ら⁽¹²⁾ により拍動流, 間欠流の報告がなされ, 大動脈弓内流れでは曲率比の影響が強く現れることが明らかにされた. しかしながら, 実験では二次流れの詳細を測定することが現状の計測精度では困難である. 数値計算に関しては Hamakiotes & Berger⁽¹³⁾, 高見ら⁽¹⁴⁾ の拍動流, Chang & Tarbell⁽¹⁵⁾ の冠状動脈流, 駒井ら⁽⁶⁾ の間欠流に関する計算が行われているが, 大動脈弓内の血流波形の特異性が及ぼす影響に関して十分な検討が行われていない.

そこで, 本研究では大動脈弓内流れの様子を明らかにすることを目的とし, 曲率比の大きな曲がり管内生理的流れの数値解析を行った. 血流量波形については心断層エコードップラー流速計でヒトの胸部大動脈の血流速の測定を行い, 安静時および運動時の血流波形の特徴を抽出して計算を行った.

* 原稿受付 平成4年5月12日.

^{*1} 正員, 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1).

^{*2} 慶應義塾大学スポーツ医学研究センター.

^{*3} 正員, 慶應義塾大学理工学部.

主 記 号

- a : 管半径 11 mm
 Hr : 心拍数 回/min
 Q : 流量
 Q_0 : 心拍出量 1/min
 r : 半径座標
 R : 曲率半径
 Re : レイノルズ数 $\equiv aU/\nu$
 t : 無次元時刻 $\equiv 2\pi \times t'/t'_c$
 t_c : 心拍周期
 T_w : 解の周期
 u : 半径方向の流速
 U : 断面平均有次元流速の最大値 cm/sec
 v : 円周方向の流速
 w : 軸方向の流速
 z : 軸方向座標
 α : 周波数パラメータ $\equiv a\sqrt{\omega/\nu}$
 δ : 曲率比 $\equiv a/R=0.3$
 θ : 軸方向角度
 τ' : 壁せん断応力 $\equiv \frac{\nu\rho U}{a} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \text{ dyn/cm}^2$
 κ : ディーン数 $\equiv Re\sqrt{\delta}$
 ν : 動粘性係数 $=0.0548 \text{ cm}^2/\text{sec}$
 ω : 角振動数 $\equiv 2\pi/t'_c$
 ρ : 密度 $=1.0575 \text{ g/cm}^3$
 ϕ : 円周座標
 Ψ : 二次流れ流れ関数値

添 字

- max: 最大値
 min: 最小値
 ' : 有次元

2. 数 値 手 法

本研究では図1に示す曲がり管座標系を用いた。支配方程式は同座標系で表した運動方程式を用い、軸方向の発達を仮定した。式の離散化は有限差分法、圧力項の扱いはSIMPLER法⁽¹⁶⁾を用いた。また、空間は 22×22 格子点、時間は1周期を128分割した。本研究で用いた手法は、著者らの曲がり管内間欠流の数値解析と同じ手法を用いているため、運動方程式、格子系、境界条件等の詳細は割愛する。

3. 血 流 波 形 の 測 定

ヒトの胸部大動脈の血流条件を模擬するために、心断層エコー Doppler (Hewlett Packard 77020A

Ultrasound System) を用いて血流速度の測定を行った。被験者は20代の正常男性で安静時(心拍数70~90回/分)および軽い運動後(80~130回/分)の胸部上行および下行大動脈の血流波形を胸骨上窩アプローチにより計測した。また、計測後に大動脈弓部の心断層図、1周期中の大動脈径をモニタした。

図2に胸部上行大動脈内の血流波形、心電図(ECG)、心音図を示す。時刻は左から右へ進行し、血流波形は上方が末梢(大動脈弓部)へ向う流れを示している。超音波ドップラー流速計による体外からの計測では特定の座標、時刻での速度成分を定量的に得るには限界があるが、心拍波形の特徴は十分に捕えられている。心拍周期は収縮期、拡張期の2相に分けられるが、収縮期は電氣的に心電図P波で始まり、約0.25秒後に機械的収縮(心室)、僧帽弁閉鎖(第I音)、心内圧上昇、肺動脈弁、大動脈弁が開放する。そして弁開放とほぼ同時刻に大動脈血流の収縮期(拍出期)が開始される。一方拡張期では心電図T波が心室筋収縮の終了を示し、同時刻に大動脈弁閉鎖(第II音)が起き、左心室からの血液拍出が終了する。単に収縮期、拡張期と呼ぶ場合、通常は左心室の収縮期、拡張期を指すが、本研究では大動脈内血流の拍出期および静止期とする。また、これらの位相、特に血流停止時刻は血流波形より特定することは困難であるため、大動脈弁の開閉時刻を心音より決定し、それぞれの位相とした。この測定された血流波形から数値解析で用いる連続な流量波形を構成するために、以下の仮定を行った。

(1) 収縮期中の血流分布は振動境界層が薄く平坦な分布となるため、断面を通過する総血流量 $Q'(t)$ は最大流速 $W_{\max}(t)$ と断面積 πa^2 の積で表される。

$$Q'(t) = \pi a^2 W_{\max}(t) \quad \cdots \cdots (1)$$

(2) 拡張期に入った後は、断面平均流量に大規模な逆流順流は存在しない。

図1 曲がり管座標系

表 1 計算条件

	Hr(/min)	Q ₀ (l/min)	U(cm/sec)	Re	α	Condition	T _w	
Run.1	81.6	2.0	102	2050	13.7	resting	8 π	—
Run.2	77.6	2.8	106	2130	13.4	resting	2 π	Fig.5
Run.3	71.0	5.1	103	2210	12.8	resting	2 π , 4 π	—
Run.4	83.2	3.2	110	2230	13.9	post-exercise	4 π	Fig.11
Run.5	102.1	3.5	114	2290	15.4	post-exercise	8 π	—
Run.6	77.0	3.0	117	2300	13.3	resting	2 π	—
Run.7	136.3	3.3	123	2475	17.8	post-exercise	4 π	—
Run.8	120.0	12.7	158	3170	16.7	post-exercise	2 π	Fig.7

図 2 超音波パルスドップラ法による血流波形

前者は最大流速より血流量 $Q'(t)$ を計算するため高く見積る原因となるが、波形より算出された心拍出量 Q_0 (表 1 参照) は十分妥当な範囲に収まっている。また、後者は大動脈弁が正常な状態では拡張期中の心拍出量が零であることは自明であり妥当と思われる。

以上の点に留意し出力波形をトレースし 50 前後の位相で速度を読取った。そして、離散データをフーリエ級数に展開し、10 次の成分まで用い離散化した。

$$Q'(t) = \sum_{k=0}^{10} P o_k \sin(k(t + \tau_k)) \dots\dots\dots (2)$$

また、本研究では流れ場を層流として取扱った。胸部大動脈では直円管内定常流の乱流遷移レイノルズ数よりも高くなり、計測された上行大動脈血流には正常時でも乱れが観測されている⁽¹⁷⁾。しかしながら、本研究におけるレイノルズ数の最大値は 3170 であり、曲率の影響が流れを安定化する点を考慮して⁽¹⁸⁾、乱れの発生がないとして計算を行った。

大動脈弓の形状は心断層写真より曲率比 $\delta=0.3$ とした。また、動脈径はおおよそ 22 mm で 1 周期の間に 1 mm 以上の変位は認められなかった。このため流れ場に与える影響は弱いとし剛体管として扱った。

4. 結果および考察

本論文で解析を行った血流条件の一部を表 1 に示す。血流波形の測定は上行部および下行部で行ったが、下行部では幾分滑らかな波形を取る。また、下行部では分岐のため血流量が数 10% 減少し、計測においては超音波の行路が左総頸動脈等の胸部分岐と交差し被験者によっては信号が不鮮明になる。このため、本論中では上行部での計測波形による結果を参照した。しかしながら、下行部においても流れ場の構造変化に至る差は現れなかった。

4・1 流れ場 計測した流量波形および計算結果を図 3～11 に示す。図 5, 7, 11 の流速分布は上半断面に二次流れ流線、下半断面に軸方向流速の等速度線図を示す。流線は流れ関数の等値線で描き、流れ関数は壁で零、凸が反時計回り、凹が時計回りの渦を示す。また、それぞれの流量波形は図 3, 6, 9 に示し、矢印は参照した位相に対応する。

図 3～5 に安静時 (Run. 2, 心拍数 $Hr=77.6$) を模擬した結果を示す。流量波形は急速な拍出期、最大流量、遅い拍出期によって構成され、収縮前期にピーク値を迎える三角波、または台形波となる。また、その周波数成分は基本周波数 (心拍周期) が最も強く、高次の成分ほど弱くなり、それに加え定常成分が 1 次、2 次成分と同程度のオーダーで含まれる (図 4)。この性質は心拍数、個体差によらず共通して認められた。

図 5 の下図の軸方向流速分布は流量波形の周波数第 1 成分 ($\alpha=13.4$) に代表される中 α の特徴が収縮期に認められ、定性的には中 $\alpha(=8\sim16)$ 、高 $\delta(=1/7\sim)$ 、高 $Re(=500\sim)$ の曲がり管内振動流⁽⁴⁾、間欠流⁽⁶⁾ と一致するが、前周期より残存する軸方向流速分布および二次流れの高い加速により管壁に沿い薄い振動境界層が生成される。しかしながら、管中央の大部分を占める非粘性部では $t=0$ の分布が維持され中央部はくぼ

み、等速度線は曲げられている ($t=0.094\pi$)。収縮中期からは内壁側に位置していた最大流速が外壁側へと移動し、また管壁に沿い内壁へと向かう二次流れにより軸方向流速の運動量が運ばれ、C型の分布となり、いわゆる“double peak”が現れている ($t=0.547\pi$)。収縮後期より逆流域が内壁隅に現れ、収縮末期には内壁半面に広がる ($t=0.844\pi$)。その後拡張期では境界層の発達に伴い絶対値が減衰し、正の領域は二次流れにより管壁に沿い伸ばされ、中央部では負の領域が外壁へ

と輸送される。

一方二次流れは1周期中にさまざまな分布を持ち、さらに興味深い現象となっている。ここで二次流れとは断面内流れを示し、2方向成分 (r, ϕ 方向または x, y 方向) を含むが、個々の流速ではなく渦を単位として流れの挙動を捕らえる。渦は1周期中に生成、消失を繰返すが、周期の開始を $t=0$ とすれば、断面中央に前周期から残留する渦 (以後渦 A と呼ぶ) が存在している。この渦強度は最大時 ($t=0.359\pi$) の約 45% を維持している。そして、血流の駆動が始まり振動境界層

図 3 流量波形 (Run. 2)

図 4 周波数成分の強度 (Run. 2)

図 5 断面内流れの分布 (Run. 2)

(上半断面：二次流れの流線, 下半断面：軸方向の等速度線図, I ：等速度線の間隔)

に新たな渦 (渦 B, $t=0.094\pi$) が出現し, 流量の加速と共に成長する. この渦は内壁側に寄っているが, これは曲率比の大きな非定常流の特徴として, 振動流⁽⁴⁾, 間欠流⁽⁶⁾でも認められている. この過程で渦 A と渦 B は同方向に回転する渦であるために, その間に逆回転の付加渦 (渦 C, $t=0.125\pi$) が生成され, 対称面近傍内壁側にはよどみ領域が現れる. しかしながら, この付加渦が存在するのは短い期間のみで渦 A が渦 B に取込まれ始めると渦 C は消失する ($t=0.438\pi$). そ

図 6 流量波形 (Run. 8)

して, 軸方向流速の逆流が現れる位相 ($t=0.547\pi$) では新しい渦 (渦 D) が型作られる. ほぼ, この位相で渦 B が渦 A を吸収または合併が終了される. その後渦 D は軸方向流速のこう配のきつい部位で新しく誘起される二次流れを取込みながら半断面中央へと移動し, この行程で渦 B を吸収し一つの渦へと移行する. このようにヒトの安静時の条件では断面内流れは残存する渦 (渦 A), 振動境界層に発生する渦 (渦 B), ストップ流れの境界層の発達に誘起される渦 (渦 D) に支配され, これらの相互作用により付加渦が出現する.

次に軽い運動後 (Run. 8, $Hr=120$) の計算結果を図 7 に示す. 流量条件は安静時に比べ, α , Re 共に大きくなり, 1 周期に占める拡張期の比率は低くなる. この変化は安静時に認められた二次流れ渦の構造 (渦 A ~ D) に新たな逆回転渦の出現をもたらし, 軸方向流速分布にも大きな影響を及ぼしている. この渦 (渦 E) は収縮後期に外壁角で発達し, 収縮末期には主渦と匹敵する強度まで成長する. その後, 拡張期に入ると渦 D とは対照的に一意的に減衰を見せ, 次の周期までにほぼ消失する. この渦 E の発生については, 収縮中期に管中央に出現したよどみ領域 ($t=0.593\pi$) が外角へと移動し, 先駆となることが認められた. 必ずしも, このよどみ領域は渦 E の発生には必須ではないが, 他の流

図 7 断面内流れの分布 (Run. 8)

(上半断面: 二次流れの流線, 下半断面: 軸方向の等速度線図, I : 等速度線の間隔)

量条件でのよどみ領域を伴わない渦Eの出現に比較し、発生位相を早めた。また、この逆回転渦は高 α 、低 δ の振動流で出現する典型的なLyne型渦の分布⁽⁷⁾と異なり、二つの順回転渦を伴い外角へ押寄せられているが、高 δ の振動流でも同位置によどみ領域が出現することより⁽⁴⁾、Lyne型渦と考えられる。

4・2 壁せん断応力 図8に壁せん断応力の軸方向成分の時間変化を示す。図は横軸が時刻、縦軸が円周位置($\phi=0$ が曲がりの外側に対応)を示す。また、等値線は均一に10 dyn/cm²間隔で破線が0、実線が正(下流)、一点鎖線が負(上流)を表わす。

安静時(Run. 2)、運動後(Run. 8)ともに収縮初期に内壁からわずかに外れた位置に最大値(安静時136.2 dyn/cm²、運動後232.5 dyn/cm²)を取り、収縮末期に内壁角 $\phi=\pi$ に最小値(-35.6 dyn/cm²、-86.0 dyn/cm²)が現れる。そして拡張期では外壁側が正、内壁側が負となり、特に安静時には10 dyn/cm²以下の低い値が続く。Ku.ら⁽³⁾により壁せん断応力の方向変化と動脈硬化症の相関性が示され、特に拡張期での変化が重要になっている。しかしながら最も興味深い点は外壁側のLyne型渦の出現に伴い境界層の厚さが増し、その領域で壁せん断応力が低下することである(例えば図7, $t=1.093\pi$, $(\phi, r)=(0\sim0.1\pi, 0.7\sim1.0)$, および図8(b), $t=0.6\pi\sim$)。生体内では酸素を初めとする諸物質の血流組織間の授受に壁せん断応力は強

く寄与する。

4・3 多周期解 本研究で行った流量条件において、流量変動の周期($t=0\sim2\pi$)で現象が繰返される解(Run. 2, Run. 6, Run. 8)を取らずに、その2倍($t=0\sim4\pi$, Run. 4, Run. 7)、4倍($t=0\sim8\pi$, Run. 1, Run. 5)の周期性を持つ解(多周期解と呼ぶ)に収束する条件が認められた。また、流量条件Run. 3では1周期解と2周期解の2解が存在することが認められた(二重解)。本計算では計算時間を節約するために粗い格子系の解を初期データとして用いたが、予備格子(15×15節点以下)には多周期解が現れなかった。このため、Rest. 3では流れが静止した状態からの計算では2周期解に収束したが、粗い格子から徐々に格子を細かくすることで一周期解が得られた。このため、今回の計算ではすべての条件について同様に2通りの手続きを取ったが、二重解が得られたのは1条件のみで他の条件では初期データに依存せずに特定の値に収束した。

図11に2周期解の流れ場を示す。流量条件は軽い運動後(Run. 4)で流れ場は4 π 周期で繰返されている。

(a) Run. 2: $\tau_{w\max}=136.2$ $\tau_{w\min}=-35.6$

(b) Run. 8: $\tau_{w\max}=231.7$ $\tau_{w\min}=-86.0$

図8 壁せん断応力 (τ : 10 dyn/cm²)

図9 流量波形 (Run. 4)

図10 流れ関数の最大値, 最小値 (Run. 4)

Inside

Outside

図 11 断面内流れの分布 (Run. 4)

 (上半断面：二次流れの流線, 下半断面：軸方向の等速度線図, I : 等速度線の間隔)

便宜上 $t=0\sim 2\pi$ を奇周期, $t=2\pi\sim 4\pi$ を偶周期とすれば, 対応する位相で, 特に二次流れ分布および断面内対流によりゆがめられた等速度線の差は明確に現れている。最も特徴的な例は収縮後期の外壁隅に現れる Lyne 型渦 (渦 E) であるが, 出現する位相に明らかな差が認められる。この差は前周期より残存する渦 A によって説明される。奇周期では $t=0$ で渦 A が内壁に寄り, そのために収縮初期の外壁側によんだ領域を広く作り, 渦 E の発生を早めている。同様に $t=0.438\pi, 2.438\pi$ では奇周期で渦 A が渦 B に取込まれ, ほぼ消失しているのに対し, 偶周期では渦 A が外壁角にまで勢力を維持している。これらの渦の挙動は二次流れの流れ関数の最大値 $\Psi_{\max}$, 最小値 $\Psi_{\min}$ の時間変化を調べることでより明らかとなる。図 9 に同条件の $\Psi_{\max}$, $\Psi_{\min}$ を示すが, これらは渦中心と管壁を結ぶ線を通して二次流れの流量を示し, 順回転 (図 11 中の実線渦) では正の値, 逆回転渦 (同破線) では負となる。図 10 での $\Psi_{\max}$ は $t=0\sim 2\pi$ (または $2\sim 4\pi$) で二つのピークを持ち, 前者は渦 B, 後者は渦 D の強度を示し, $\Psi_{\min}$ は渦 E の発達の様子を示している。 $\Psi_{\max}$ は渦 B の発達に伴い増加し, 流量最大値とほぼ同一の位相で最大値を取る。そして, 減少が始まり $t=1/2\pi$ 前後で変曲点を持つが収縮期終了位相まで一意的に減少する。拡張期では軸方向流速の境界層発達により渦 D が作られる。そして境界層がほぼ構成されると $\Psi_{\max}$ は減衰へと向う。一方, 渦 E は図 10 に示したように渦 A の存在する位置により発生する位相を異とするが, ほぼ収縮中期より発達が開始される。ここで興味深いのは偶周期の渦 E は発生位相が遅れるが最終的な強度は強いことである。そして, 奇周期では収縮後期, 偶周期では末期より渦 E の減衰が始まる。拡張期中の Lyne 型渦 E の差が再び渦 D (渦 A) の位置を決め, 異なる周期を迎える。

この多周期解については, Hamakiotes & Berger⁽¹³⁾ の曲がり管内脈動流 ($Re=300\sim 400$, $\alpha=15$, $\delta=1/7$) で 3 周期解の存在が報告され, 曲がり管内周期流れの新しい問題として注目されている。

5. 結 言

胸部大動脈弓内流れを発達した曲がり管内非定常流とモデル化し, 特に血液波形の特異性を心断層エコー Doppler 流速計の実測値を用いることで再現した。

また, このモデルを数値的に解析することで以下の結論を得た。

(1) 安静時を模擬した条件では, 軸方向流速分布は同条件の曲がり管内間欠流と類似した分布となる。一方二次流れ分布は主に三つの渦に支配される。

(2) 運動後の条件では安静時の流れ場に加え, 収縮後期より外壁側に Lyne 型渦が出現する。

(3) 壁せん断応力の分布は収縮初期に内壁側に最大値を取り, また収縮末期に内壁側に最小値が現れ, 拡張期中の分布は特に安静時では円周に渡り 10 dyn/cm^2 以下の低い値になる。また, Lyne 型渦の出現に伴い, 外壁側の壁せん断応力値は低下する。

(4) 安静時, 運動後の流量条件に限らず多周期解が得られた。また, 二重解の存在も認められた。これらの解では基本的な流れの構造は共通しているが, 大動脈弓内流れは安静時でも不安定であることを示唆した。

数値計算については, 宇都宮大学, 秋山光庸教授のご助言を頂いた。本研究の数値計算は (株) 大和総研の協力によって行われた。

文 献

- (1) Wesolowski, A. S., Fries, C. C., Sabini, A. M. and Sawyer, P. N., *Surgey*, **57-1** (1965), 155.
- (2) Levesque, M. J., Sprague, E. A., Schwartz, C. J. and Nerem, R. M., *Biotechnology Progress*, **5-1** (1989), 1.
- (3) Ku, D. N., Giddens, D. P., Zarins, C. K. and Glagov, S., *Arteriosclerosis*, **5-3** (1985), 293.
- (4) 駒井・谷下, 機論, **58-546**, B (1992), 343.
- (5) 成瀬・ほか 3 名, 機論, **56-529**, B (1990), 2562.
- (6) 駒井・谷下, 機論, **58-552**, B (1992), 2398.
- (7) Lyne, W. H., *J. Fluid Mech.*, **45-1** (1970), 13.
- (8) Smith, F. T., *J. Fluid Mech.*, **71-1** (1975), 15.
- (9) Lin, J. Y. and Tarbell, J. M., *AIChE J.*, **21-1** (1980), 165.
- (10) Talbot, L., and Gong, K. O., *J. Fluid Mech.*, **127** (1983), 1.
- (11) 角田・須藤, 機論, **52-474**, B (1984), 926.
- (12) Nishina, Y., Gotoh, F. and Tanishita, K., *Proc. World Congress on Medical Physical Engrg.*, **29-2** (1991), 689.
- (13) Hamakiotes, C. C. and Berger, S. A., *J. Fluid Mech.*, **210**, (1990), 353.
- (14) 高見・ほか 2 名, 機論, **50-452**, B (1984), 926.
- (15) Chang, L. J. and Tarbell, L. M., *J. Fluid Mech.*, **161** (1985), 175.
- (16) Patankar, S. V., *Num. Heat Tran.*, **4** (1981), 689.
- (17) Stein, P. D., and Sabbah, H. N., *Circ. Res.*, **3-1** (1976), 58.
- (18) Taylor, G. I., *Roy. Soc. Proc.*, **124**, A (1929), 243.