GSMAC 有限要素法による内部発熱を伴う電磁熱流体の 正方形 Cavity 内自然対流解析*

(第2報, 磁場解析スキームの改良, エンストロフィー,
流体磁気クロスヘリシティ)

沖 良 篤^{*1}, 棚 橋 隆 彦^{*2}

Numerical Analysis of Natural Convection of Thermo-electrically Conducting Fluids in a Square Cavity under a Constant Magnetic Field (2nd Report, Improved Scheme for Magnetic Field Analysis, Enstrophy, Hydromagnetic Cross Helicity)

Yoshiatsu OKI and Takahiko TANAHASHI

In the previous paper, the natural convections of thermo-electrically conducting fluids in a square cavity under a constant magnetic field are calculated using GSMAC-FEM in conjunction with the so-called B method. This scheme satisfies conservation laws of both mass and magnetic flux efficiently. In the present paper, we modify the conventional B method to raise the efficiency of calculation, while retaining the accuracy of calculation. Hydromagnetic cross helicity is introduced as the new physical quantity which accounts for the effect of interactions between the magnetic field and the velocity field. Using hydromagnetic cross helicity, we evaluate the difference in performance between the conventional and modified B methods quantitatively.

Key Words: Thermo-electrically Conducting Fluid, Natural Convection, Square Cavity, GSMAC Finite Element Method, Modified B Method, Hydromagnetic Cross Helicity, MHD

1. 緒 言

電磁熱流体に磁場が印加された場合, Lorentz 力, 誘導加熱, 浮力を介して速度場, 電磁場, 温度場が共に連成し複雑な挙動を示す。前報⁽¹⁾では, 誘導加熱と誘起磁場を考慮し, 速度場と磁場のソレノイダル性を十分満足する電磁熱流体の非定常有限要素法解析スキームを提案した。さらに, 誘導加熱項が速度場, 温度場に与える影響を明らかにした。

そこで, 本論文では, 静止導体の磁場解析も可能にするため, 磁場解析スキームの汎用性を拡張させる。さらに, 磁束密度と速度の内積を流体磁気クロスヘリシティと定義し, これを用いて速度場と磁場の絡み具合を定量的に評価する。また, Von Neumann の安定性解析より, 電磁熱流体の数値解析において磁場の誘導方程式の拡散数の条件が, 時間刻み幅の決定に重大な影響を与えることを示す。

解析モデルは前報と同じく正方形 Cavity 内自然対流

問題を取り扱う。解析対象として空気, 熔融錫を用い, 斎藤⁽²⁾, 岡永⁽³⁾, Davis ら⁽⁴⁾および Wolff ら⁽⁵⁾の実験・数値解析結果と比較・検討して解析スキームの妥当性を示す。特に, 熔融錫のような低 Prandtl 数流体の速度場は, 時間依存性が強く乱流に遷移しやすい⁽⁶⁾。そこで, 低 Prandtl 数流体の速度場は Prandtl 数の大きい流体の場合と異なり, 磁場を印加することによってその速度場が容易に制御され定常流に遷移することを示す。

主な記号

- d : 速度勾配テンソル $= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$
 E_{ab} : 対流行列
 E_s : 全エンストロフィー $= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega^2 d\Omega$
 H_c : 全流体磁気クロスヘリシティ $\equiv \int_{\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} d\Omega$
 K : 全運動エネルギー $= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\Omega$
 Q : 総 Joule 発熱量
 Π : 誤差関数 $\equiv \frac{1}{Rem} \nabla \cdot \mathbf{B}$

ただし, 上記以外の記号については前報⁽¹⁾を参照されたい。

* 原稿受付 平成4年12月24日。

^{*1} 正員, 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

^{*2} 正員, 慶應義塾大学理工学部。

2. 数値解析手法

2・1 支配方程式系 電磁熱流体の支配方程式系は6個で、電流密度 $\mathbf{J}$ の構成式 (Ohm の法則)、慣性項を回転形表示した Navier-Stokes 方程式、連続の式、磁場の誘導方程式、磁荷不在の法則およびエネルギー方程式である。以下に無次元化された支配方程式系を示す。用いられた無次元数 $Gr(= \beta_0 \Delta T g L_r^3 / \nu^2)$, $Ha(= \sqrt{\sigma_e / \rho \nu} B_0 L_r)$, $Rem(= \sigma_e \mu U_r L_r)$, $Ec(= U_r^2 / c_p \Delta T)$, $Pr(= \nu / \alpha)$, $Ra(= Pr \cdot Gr)$ は、それぞれ Grashof 数、Hartmann 数、磁気 Reynolds 数、Eckert 数、Prandtl 数、Rayleigh 数である。ただし、自然対流の代表速度は粘性力と浮力のつり合いから定めている。式 (7) の右辺第2項は粘性散逸項を表す (以下の仮定 (7) 参照⁽⁷⁾)。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad : \text{定義式} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{Gr} (\nabla^2 \mathbf{u} - T \mathbf{e}) + \frac{Ha^2}{Gr} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \Pi + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{1}{Rem} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) T + \frac{Ec}{Gr} \mathbf{d} : \mathbf{d} + \frac{1}{Ra} \nabla^2 T + \frac{Ha^2 Ec}{Gr} J^2 \quad (7)$$

仮定: 以下の仮定から方程式系を簡単にしている。
(1) 印加電磁場は直流とする。(2) 電磁熱流体は Newton 流体とする。(3) 浮力項の密度以外の物質定数の温度依存性を無視する (Boussinesq 近似)。(4) 流れ場は非圧縮・層流とする。(5) 変位電流を無視する。(6) Lorentz 力および浮力以外の外力を無視する。(7) 自然対流はゆっくりとした流れで、流体の慣性力は小さく加速度の発散が十分小さいとする。

また、式 (6) の右辺第1項すなわち回転零の成分を導出するために、以下のベクトル解析の公式を用いた。

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} \\ &\quad + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned} \quad (9)$$

式 (6) には GSMAC 有限要素法が適用でき、磁場のソレノイダル性を十分に満足しながら磁場解析を行うことができる。さらに、誤差関数 Π を用いる本解析手法は、流体磁気クロスヘリシティ (スカラー関数) を用いた従来の手法⁽¹⁾に比べて項が少なく、静止した導体にも適用可能である。

2・2 空間の離散化 式 (2) ~ (7) に対して、

Galerkin 法を用いて空間の離散化を行う。ここで、速度 $\mathbf{u}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ および温度 T に関して四角形双一次要素による補間関数、その他の変数については要素内一定の補間関数を適用する。さらに、式 (3) を速度について陽的に、Bernoulli 関数 H について陰的に時間前進させる。同様に、式 (6) も磁束密度について陽的に、誤差関数 Π について陰的に時間前進させる。その結果、以下の行列方程式系を得る。

・予測子ステップ ($\mathbf{u}_\beta^n, \mathbf{B}_\beta^n, T_\beta^n$ が既知)

$$\boldsymbol{\omega}_e^n = \frac{1}{\Omega_e} \mathbf{C}_\alpha \times \mathbf{u}_\alpha^n \quad (10)$$

$$\mathbf{J}_e^n = \frac{1}{\Omega_e} M_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha^n \times \mathbf{B}_\beta^n \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_\beta = \mathbf{u}_\beta^n + \frac{\Delta t}{M_{\alpha\beta}} [&\mathbf{C}_\alpha H_e^n + M_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\beta^n \times \boldsymbol{\omega}_e^n \\ &+ \frac{Ha^2}{Gr} \mathbf{J}_e^n \times \mathbf{B}_\beta^n) - \frac{1}{Gr} (D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n - M_{\alpha\beta} T_\beta^n \mathbf{e}) \\ &- \mathbf{S}_\alpha] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_\beta = \mathbf{B}_\beta^n + \frac{\Delta t}{M_{\alpha\beta}} [&\mathbf{C}_\alpha \Pi_e^n + (\mathbf{B}_e^n \cdot \mathbf{E}_{\alpha\beta}) \mathbf{u}_\beta^{n+1} \\ &- (\mathbf{u}_e^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{\alpha\beta}) \mathbf{B}_\beta^n - \frac{1}{Rem} D_{\alpha\beta} \mathbf{B}_\beta^n - \mathbf{S}_\alpha^*] \end{aligned} \quad (13)$$

・同時緩和反復ステップ ($\tilde{\mathbf{u}}_\beta^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}_\beta, H_e^{(0)} = H_e^n, \tilde{\mathbf{B}}_\beta^{(0)} = \tilde{\mathbf{B}}_\beta, \Pi_e^{(0)} = \Pi_e^n$ を初期値とする)

$$\phi_{He}^{(k)} = -\lambda \mathbf{C}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{(k)} \quad (14)$$

$$H_e^{(k+1)} = H_e^{(k)} + \phi_{He}^{(k)} / \Delta t \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\beta^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{u}}_\beta^{(k)} + \mathbf{C}_\alpha \phi_{He}^{(k)} / M_{\alpha\beta} \quad (16)$$

$$\phi_{\Pi e}^{(k)} = -\lambda \mathbf{C}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{B}}_\alpha^{(k)} \quad (17)$$

$$\Pi_e^{(k+1)} = \Pi_e^{(k)} + \phi_{\Pi e}^{(k)} / \Delta t \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_\beta^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{B}}_\beta^{(k)} + \mathbf{C}_\alpha \phi_{\Pi e}^{(k)} / M_{\alpha\beta} \quad (19)$$

(収束値を $\tilde{\mathbf{u}}_\beta^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_\beta^{(k+1)}, H_e^{n+1} = H_e^{(k+1)}, \tilde{\mathbf{B}}_\beta^{n+1} = \tilde{\mathbf{B}}_\beta^{(k+1)}, \Pi_e^{n+1} = \Pi_e^{(k+1)}$ とする)

・エネルギー方程式

$$\begin{aligned} T_\beta^{n+1} = T_\beta^n + \frac{\Delta t}{M_{\alpha\beta}} [&-(\mathbf{u}_e^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{\alpha\beta}) T_\beta^n - \frac{1}{Ra} (D_{\alpha\beta} T_\beta^n - S'_\alpha) \\ &+ M_\alpha (\frac{Ha^2 Ec}{Gr} \mathbf{J}_e^{n2} + \frac{Ec}{Re} \boldsymbol{\omega}_e^{n2})] \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、下添字 α, β は要素内局所節点を表し、本論文で用いた4節点双一次要素では1から4の値をとる。下添字 e は要素内一定を意味する。時間前進のアルゴリズムは前報⁽¹⁾と同じである。また、計算容量を低減させるために係数行列に一点求積法を用いている。しかし、一点求積法を拡散行列に適用すると hourglass 不安定性という数値振動が発生するので、本論文では

hourglass 不安定性が発生しない解析公式を適用する⁽⁸⁾。式(10)から式(20)の各要素係数行列と境界積分項の具体的表示は以下の通りである。ここで、 i, j, Ω^e は、それぞれ x, y 方向の単位ベクトル、要素面積とする。

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\Omega^e}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \frac{\Omega^e}{4} \delta_{\alpha\beta} \quad (22)$$

$$C_\alpha = \Delta y \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} i + \Delta x \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} j \quad (23)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{\Omega^e}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/6 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \frac{\Omega^e}{(\Delta y)^2} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$E_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega^e = \Delta y \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \\ -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \\ -1/12 & 1/12 & 1/6 & -1/6 \\ -1/12 & 1/12 & 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} i + \Delta x \begin{bmatrix} -1/6 & -1/12 & 1/12 & 1/6 \\ -1/12 & -1/6 & 1/6 & 1/12 \\ -1/12 & -1/6 & 1/6 & 1/12 \\ -1/6 & -1/12 & 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} j \quad (25)$$

$$S_\alpha = \int_{\Gamma_i^e} N_\alpha (H_e^n \mathbf{n} - \frac{1}{Gr} \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n}) d\Gamma_i^e \quad (26)$$

$$S_\alpha^* = \int_{\Gamma_i^e} N_\alpha (\Pi_e^n \mathbf{n} - \frac{1}{Rem} \frac{\partial \mathbf{B}^n}{\partial n}) d\Gamma_i^e \quad (27)$$

$$S_\alpha' = \int_{\Gamma_i^e} N_\alpha \frac{\partial T^n}{\partial n} d\Gamma_i^e \quad (28)$$

ただし、 $\bar{M}_{\alpha\beta}$ は対角化された質量集中行列とする。

3. 計算条件

3・1 計算モデル 液体金属のような電磁熱流体の多くは低 Prandtl 数流体であり、空気や水と異なった流れを示す。作動流体として、Prandtl 数が1に近い

空気 ($Pr=0.71$) と Prandtl 数が非常に小さい熔融錫 ($Pr=0.011$) を取り扱う。本論文では、前報⁽¹⁾と同じく左壁面を急に加熱したときの電磁熱流体の正方形 Cavity 内自然対流問題を、スキームの検証用モデルとする。Wolff ら⁽⁵⁾の熔融錫の実験の場合、融点が232.5℃(室温)であるので外気温の影響は避けられない。また、上下面の断熱が難しく高温壁からの熱の流入が考えられる。そこで、熔融錫の解析の場合、容器内温度の初期条件を0.5とする。ただし、空気の場合は従来通り0.0とする。

3・2 安定性解析 移流拡散方程式の Von Neumann の安定性解析により時間刻み幅を決定していく。ここでの移流拡散方程式は Navier-Stokes 方程式、エネルギー方程式、磁場の誘導方程式である。特に、電磁熱流体の場合、低 Prandtl 数流体 ($Pr \ll 1$) であるので、Grashof 数 $\geq$ Rayleigh 数 $\geq$ 磁気 Reynolds 数の順に小さくなる。ゆえに、移流項の影響が大きいのは Navier-Stokes 方程式、拡散項の影響が大きいのは磁場の誘導方程式となる。前者より Courant 条件が、後者より拡散数の条件が得られ、両者のうち小さい方の時間刻み幅が解析の際に用いられる。すなわち、

$$\Delta t = \min \left[c \cdot \frac{\Omega_{\min}^e}{u_{\max} \Delta x_m + v_{\max} \Delta y_m}, d \cdot \frac{Rem(\Omega_{\min}^e)^2}{\Delta x_m^2 + \Delta y_m^2} \right] \quad (29)$$

となる。ここで、 c は Courant 数で1以下の正数、 d は拡散数で0.5以下の正数、 Δx_m と Δy_m はそれぞれ x と y 方向の最小格子幅である。特に、 x と y 方向の最小格子幅および最大流速が等しく、 $\Delta r_{\min}$, $U_{\max}$ の場合、式(29)は以下のように簡略化される。

$$\Delta t = \min \left[c^* \cdot \frac{\Delta r_{\min}}{U_{\max}}, d^* \cdot Rem \Delta r_{\min}^2 \right] \quad (30)$$

式(30)中の c^* は0.5以下の正数、 d^* は0.25以下の正数である。本論文では $c^*=0.1$, $d^*=0.22$ で解析している。電磁熱流体の自然対流問題において $U_{\max}=10^{-5} \sim 10^{-7}$ で、磁気 Reynolds 数が大きいとき時間刻み幅は大きくとれ数値解は安定化する。

3・3 計算条件 計算条件を表1に示す。本論文では、解析対象とあるので、式(30)より磁場の誘導

表1 計算条件

Case	Pr	Gr	Ra	Ha	Rem	Ec	Δt	ε_u	ε_B	$N_x \times N_y$	$\Delta r_{\min}$	t_{end}
1	0.71	1.408×10^6	1.0×10^6	—	—	0.0001	10.0	10^{-7}	—	50×50	6.52×10^{-3}	40.0×10^4
2	0.011	3.326×10^7	3.659×10^5	—	—	9.1	2.0	10^{-10}	—	40×40	6.79×10^{-3}	10.0×10^4
3	0.011	3.326×10^7	3.659×10^5	28.3	1.0×10^5	9.1	2.0	10^{-9}	10^{-7}	30×30	9.23×10^{-3}	10.0×10^4
4	0.011	3.326×10^7	3.659×10^5	56.6	1.0×10^5	9.1	2.0	10^{-9}	10^{-7}	30×30	9.23×10^{-3}	10.0×10^4
5	0.011	3.326×10^7	3.659×10^5	192.6	1.0×10^5	9.1	2.0	10^{-9}	10^{-7}	30×30	9.23×10^{-3}	10.0×10^4
6	0.011	3.326×10^7	3.659×10^5	452.5	1.0×10^5	9.1	2.0	10^{-9}	10^{-7}	30×30	9.23×10^{-3}	10.0×10^4

方程式の拡散数の条件が支配的となる。その結果として空気と熔融錫を想定している。空気の場合、斎藤⁽²⁾、岡永⁽³⁾、Davis ら⁽⁴⁾の実験・数値解析結果と比較するため、また、熔融錫の場合、Wolff らの実験結果⁽⁵⁾と比較するため、計算条件を同じくする。特に、熔融錫に磁場を印加した場合、Hartmann 数を 28.3, 56.6, 192.6, 452.5 とした。これは、8.89cm(縦)×8.89cm(横)×12.6cm(奥行き)の正方形 Cavity に磁場を約 0.01, 0.02, 0.07, 0.15T ほど印加した場合に相当する。

また、水平流体層の線形安定性理論⁽⁹⁾より、以下の条件で対流は抑制される。

$$Ra \leq \pi^2 Ha^2 \quad (31)$$

本論文では、 $Ha \geq 192.6(0.07T)$ の場合に対流が完全に抑制される。また、磁気 Reynolds 数は 17.61 であるが、式(30)より 10^5 と意図的に大きな値を用いる。ここで、 N_x と N_y はそれぞれ x 方向と y 方向の分割数、 $\Delta r_{\min}$ は最小格子幅、 ϵ_u と ϵ_B はそれぞれ速度場と磁場の収束判定基準、 Δt と t_{end} はそれぞれ時間刻み幅と計算終了無次元時間を表す。また、速度場と磁場の Poisson 方程式の最大反復回数は 1500 回とした。

4. 計算結果および検討

4・1 熱特性 図1に磁場無しの場合 (Case 2) の $t=90,000$ における x 方向温度分布を、Wolff ら⁽⁵⁾($Pr=0.011$) の計測データと比較して示す。 $y=0.5$ 上の温度分布線で低温側において温度が上昇する現象が見られる。これは、対流により運ばれた高温の流体が低温壁面に沿って下降していくために生じる。本解析結果は上記の実験結果と良好に一致している。

図2に空気と熔融錫の壁面平均 Nusselt 数の経時変化を示す。空気の場合、高温側と低温側の壁面平均 Nusselt 数が $t=150,000$ で一致しており、以後振動もしていない。よって、熱的には $t=150,000$ で定常となる。本解析の壁面平均 Nusselt 数は 8.895 であり、岡永の数値解(8.806)、Davis らの数値解(8.800)、斎藤らの実験結果(8.7126)と相対誤差 1~2.1%以内におさまる良好に一致している。また、熔融錫の場合、 $Ha=28.3$ (Case 3)、56.6(Case 4)、192.6(Case 5)と磁場が強くなるにつれて、熱振動がなくなり定常運動に近づく。また、磁場強度が大きくなるほど壁面平均 Nusselt 数が 1 に近づき、Lorentz 力で対流が抑制され伝導によって熱は移動される。Case 2, 3 の過渡状態 ($t=10,000 \sim 30,000$) においてオーバーシュートが生じている。この現象は、対流により高温流体が低温壁にぶつかり急激に下降し、また低温流体が高温壁にぶつかり急激に上昇することにより生じる。

図1 x 方向温度分布 (熔融錫の場合)

(a) 空気の場合

(b) 熔融錫の場合

図2 壁面平均 Nusselt 数の経時変化

図3 総 Joule 発熱量の経時変化

図3にHartmann数が28.3, 56.6, 192.6, 452.5の場合の総Joule発熱量を示す。 $Ha=28.3$ の場合は熱振動を起こして周期流であるが、Hartmann数が大きくなるにつれて熱振動がなくなり定常流に近づく。 $Ha=56.6$ の場合に総Joule発熱量が最大となっている。理由は以下の通りである。総Joule発熱量 Q のオーダーは、 $Q \sim J_z^2 \sim (\sigma_e u_x B_0)^2$ に等しい。低Hartmann数の場合、 x 方向の流速は大きい弱磁場なので総Joule発熱量が小さい。高Hartmann数の場合、強磁場によるLorentz力の対流抑制効果が強く総Joule発熱量が小さくなる。よって、総Joule発熱量のHartmann数依存性には極大値が存在する。

4・2 流動特性 図4, 5に空気, 熔融錫の場合の全運動エネルギー K , 全エントロフィー E_s の経時変化を各々示す。エントロフィーは渦度強度の総量を表し、粘性散逸による運動エネルギーの減少率に比例する⁽¹¹⁾。空気の場合、全運動エネルギー、全エントロフィーは最初急激に増大するが、 $t=60,000$ 以降では一定値となり定常流が実現している。次に、熔融錫のような低Prandtl数流体の場合を考察する。磁場無しの場合、全運動エネルギーは最初急激に増大するが、 $t=30,000$ 以降振動しながら徐々に増加していることがわかる。同様に全エントロフィーも時間とともに周期的に振動して周期流であることがわかる⁽¹⁰⁾。これは、低Prandtl数流体が時間依存性が強い乱流に移移しやすいというKrishnamurtiの結果⁽⁶⁾を裏付けている。一方、磁場を印加した場合、全運動エネルギー、全エントロフィーは磁束密度の増加と共に減衰して小さくなり時間の経過と共に一定値に近づく。これは、速度場の時間依存性が減少し定常流が実現していることを示す。特に、初期状態で全運動エネルギーと全エントロフィーは急激に増加する。この時間範囲は強磁場ほど短くなる。これは、強磁場ほどLorentz力の対流抑制効果が大きくなるからである。

図6に $t=90,000$ の時のCase 2, 4, 5の場合の流線, 等圧線, 等エントロフィー線, 等温線を各々示す。特に、Case 2の場合に主渦の中に双子渦が発生している。一方、Case 4, 5の場合は印加磁場のLorentz力の対流抑制効果により主渦の中の双子渦が減衰している。Ozoeら⁽¹²⁾は、熔融シリコン($Pr=0.054$)について差分法解析を行い、同様の結果を得ている。

4・3 磁気特性 磁束密度と流速の内積の領域積分により全流体磁気クロスヘリシティ H_c

$$H_c \equiv \int_{\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (32)$$

が定義される。全流体磁気クロスヘリシティは磁場と速度場の結合の程度を定量的に評価する物理量であ

(a) 空気の場合

(b) 熔融錫の場合

図4 全運動エネルギーの経時変化

(a) 空気の場合

(b) 熔融錫の場合

図5 全エントロフィーの経時変化

Case 2 ($Ha=0.0$) Case 4 ($Ha=56.6$) Case 5 ($Ha=192.6$)(a) 流線 ($\Delta\zeta = 0.5 \times 10^{-6}$) Case 2 ($Ha=0.0$) Case 4 ($Ha=56.6$) Case 5 ($Ha=192.6$)(b) 等圧線 ($\Delta p = 0.1 \times 10^{-8}$) Case 2 ($Ha=0.0$) Case 4 ($Ha=56.6$) Case 5 ($Ha=192.6$)(c) 等エントロフィー線 ($\Delta E_s = 0.2 \times 10^{-6}$) Case 2 ($Ha=0.0$) Case 4 ($Ha=56.6$) Case 5 ($Ha=192.6$)(d) 等温線 ($\Delta T = 0.1$)図 6 流動特性 ($t=90,000$ の場合)

表 2 改良前後における計算精度の比較

Case	Conventional ⁽¹⁾		Modified		error (%)	
	B_x	B_y	B_x	B_y	B_x	B_y
3	0.31704	-0.99343	0.30896	-0.95417	2.55	3.95
4	0.13561	-0.95872	0.13433	-0.95606	0.94	0.28
5	-7.8462×10^{-3}	-1.004922	-7.9165×10^{-3}	-1.004918	0.89	3.9×10^{-4}
6	-8.9456×10^{-4}	-1.000344	-8.9185×10^{-3}	-1.000329	0.31	1.5×10^{-3}

(a) Case 3 ($Ha=28.3$, $Rem = 10^5$) (b) Case 4 ($Ha=56.6$, $Rem = 10^5$) (c) Case 5 ($Ha=192.6$, $Rem = 10^5$) (d) Case 6 ($Ha=452.5$, $Rem = 10^5$)

図 7 全流体磁気クロスヘリシティの経時変化 (Hartmann 数依存性)

図 8 全流体磁気クロスヘリシティの経時変化 (磁気 Reynolds 数依存性)

表3 改良前後における計算時間の比較

Case	Conventional ⁽¹⁾ (sec)			Modified (sec)			Decrement (%)	
	1 Step	t_{end}	(average)	1 Step	t_{end}	(average)	1 Step	t_{end}
3	0.3315	9482.1396	(0.2107)	0.3180	9146.0167	(0.2032)	4.1	3.5
4	0.3304	6102.4500	(0.1356)	0.3187	5795.1602	(0.1288)	3.5	5.9
5	0.3303	3904.1602	(0.0868)	0.3186	3528.8829	(0.0784)	3.5	9.6
6	0.3297	2700.6557	(0.0600)	0.3174	1965.4683	(0.0437)	3.7	27.2

る。この積分は解析領域全体での積分である。ただし、これは磁気ベクトルポテンシャルと磁束密度との内積によって得られる磁気ヘリシティとは異なる⁽¹³⁾。

図7 (a)～(d)に、磁場解析スキームの改良前後における全流体磁気クロスヘリシティ経時変化の Hartmann 数依存性 ($Ha=28.3, 56.6, 192.6, 452.5, Rem=10^5$) を示す。弱磁場ほど速度場と磁場の結合の度合いが強く、磁場が自然対流の発達とともに乱される。また、強磁場ほど全流体磁気クロスヘリシティ値が0に近づき、速度場と磁場の結合の度合いが弱くなる。特に、磁場が強くなるほど、全流体磁気クロスヘリシティ値は一定となる。よって、全流体磁気クロスヘリシティは保存され速度場と磁場の結合関係は不変に保たれる。また、改良前後で比較すると磁場が強くなると解法の差は現れず、両者は良好に一致する。図8に、初期状態 ($t=20 \sim 100$) の全流体磁気クロスヘリシティ経時変化の磁気 Reynolds 数依存性 ($Ha=452.5, Rem=10^2, 10^4, 10^5$) を示す。低磁気 Reynolds 数ほど振動の波長が短く、高周波で減衰が遅い。

次に、改良前後の磁場解析スキームの性能を比較・検討する。Case 3～6の計算精度を、定常状態 ($t=90,000$) の図心 ($x=0.5, y=0.5$) での磁束密度を用いて評価する (表2参照)。ただし、各物理量 θ の相対誤差は $error(\%) = |\theta_c - \theta_m|/\theta_c \times 100$ で定義される。ここで、 θ_c, θ_m はそれぞれ改良前後の各物理量を表す。表2より相対誤差は大体1%以内におさまる改良前後で良好に一致している。さらに、Case 3～6の計算時間を改良前後で比較すると、3.5～27.2%ほど計算時間が短縮され計算効率が向上する (表3参照)。特に、磁場が強くなるほど改良後に解の収束性が向上し計算時間が大幅に短縮される。つまり、静止導体に近づくほど改良後の計算効率の向上が著しい。ただし、表3中の1Stepは1計算ステップ目の計算時間である。そして、averageは全計算時間を全計算ステップ数で割ったものである。なお、計算には慶應義塾大学計算センターの FACOM VPX220/10を使用した。

5. 結 言

本論文では、前報⁽¹⁾の磁場解析スキームを改良し、計算時間を約1割短縮した。特に、強磁場ほど計算効率の向上が顕著である。そして、改良後の磁場解析スキームの妥当性を示した。また、空気と一様磁場下の溶融錫の正方形 Cavity 内自然対流問題を解析し、以下の結言を得た。

- (1) 磁場無しの場合、本解析結果は過去の実験・数値解析結果と良好に一致し、本解析スキームの妥当性が保証された。
- (2) 全運動エネルギーと全エントロフィーの経時変化より、空気の場合と異なり溶融錫は周期流となることがわかる。しかし、磁場を印加すると Lorentz 力の対流抑制効果により周期流から定常流に移移する。
- (3) 全流体磁気クロスヘリシティの経時変化により磁場と速度場の結合の程度が定量的に評価できる。弱磁場下では自然対流の発達とともに磁場と速度場の結合が強くなる。しかし、磁場が強くなるにつれてその結合は弱くなり、全流体磁気クロスヘリシティは保存される。

参考文献

- (1) 沖・棚橋, 機論, 現在投稿中, 論文 No.92-1344.
- (2) 斎藤・広瀬, 第22回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1985), 437.
- (3) 岡永・棚橋, 機論, 56-530, B(1990), 2922.
- (4) Davis, G.D.V. and Jones, I.P., *Int. J. Num. Mech. Fluids*, 3(1983), 227.
- (5) Wolff, F., et al, *Exp. Thermal Fluid Sci.*, 1(1988), 83.
- (6) Krishnamurti, R., *J. Fluid Mech.*, 60(1973), 285.
- (7) 棚橋, 連続体の力学 (7), 理工学図書, (1991), 127.
- (8) 棚橋, GSMAC-FEM 数値流体力学の基礎と応用, アイビーシー, (1991), 735.
- (9) Chandrasekar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford, (1961), 171.
- (10) 木田・他2名, 京都大学数理解析研究所講義録, 637(1988), 89.
- (11) 棚橋, 連続体の力学 (8), 理工学図書, (1991), 53.
- (12) Ozoe, H., and Maruo, E., *JSMI Int. J.*, 30-263(1987), 774.
- (13) 半場, 京都大学数理解析研究所講義録, 677(1989), 167.