2次元非圧縮性粘性流に対する各種数値解法の比較*

木村 彰 男^{*1}, 柳 浩 敏^{*2}, 黒河 通 広^{*3}
里 深 信 行^{*4}, 森 西 晃 嗣^{*4}, 西 田 秀 利^{*4}Comparison of Several Numerical Methods
for Solving Two-Dimensional Incompressible Viscous FlowsAkio KIMURA, Hirotoshi YANAGI, Michihiro KUROKAWA,
Nobuyuki SATOFUKA, Koji MORINISHI and Hidetoshi NISHIDA

This paper presents a comparative study of several numerical methods which have been proposed for solving two-dimensional incompressible viscous flows. These methods are the vorticity stream function method, the MAC method on a staggered grid, Chorin's artificial compressibility method with/without convergence acceleration and Abdallah's method on a non-staggered grid. The steady laminar flow in a square driven cavity and a two-dimensional channel with 90° bend are chosen as test problems. It is found that all of the methods give practically the same computed results except for the pressure distributions in the two-dimensional channel problem obtained by the vorticity stream function method. The numerical experiments show that the artificial compressibility method with convergence acceleration has the best convergence rate.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Viscous Flow, Internal Flow, Incompressible Flow, Pressure Poisson Equation

1. 緒 論

非圧縮性粘性流の解析は工学の広い分野において実用上重要であり、したがって、従来から多種多様な数値解法が提案されている。

非圧縮性流体の流れは速度と圧力が未知量となり、質量の保存を表す連続の式とニュートンの運動の第2法則を表すナビエ・ストークス方程式により支配されるが、連続の式が発展型ではないために計算上の困難が生じ、これらの方程式系に対して代数的操作を行って得られる数学的に等価な圧力に対するポアソン方程式を放物型のナビエ・ストークス方程式と連立して用いることがよく行われる。このような圧力と速度を未知量とする方程式に対する数値解法として最も古典的なものは Harlow と Welch⁽¹⁾ により提案された MAC 法であり、連続の式を差分方程式として満足さ

せるために圧力と速度成分が格子上の異なる点で定義される、食違い格子を用いる点に特徴がある。MAC 法はその後多くの改良がなされ、今日でも標準的な方法の一つとして広く応用されているが、最近では非食違い格子を用いる方法も提案されている⁽²⁾。

Chorin⁽³⁾ は連続の式に圧力の時間微分項を付加して発展型とし、定常状態において非圧縮性の条件を満足させる、擬圧縮性法を提案した。この方法は解くべき方程式が発展型のみとなるので圧縮性流れに対して確立された数値解法がそのまま適用できる利点があるが、非定常問題への拡張に際しては各時間段階での反復計算が必要となる⁽⁴⁾。

二次元流においては流れ関数を導入することにより連続の式を直接取扱う必要をなくすことができ、さらに速度の回転により定義される渦度を用いると流れ関数の満足する方程式はポアソン方程式となり、ナビエ・ストークス方程式は渦度輸送方程式となる。この流れ関数-渦度法では、方程式の数がほかの方法に比べて一つ少なくなり、計算効率や記憶容量の面で有利であるため、従来多くの問題に応用されてきたが、三次元流への拡張は流れ関数が存在しないため直接的でない。このように非圧縮性流体の流れに対する数値解法は、従来多数提案されているが、それらの方法相互

* 原稿受付 平成4年5月13日。

^{*1} 正員、(株)クボタパルプ研究部 (☎573 枚方市中宮大池1-1-1)。^{*2} 正員、日立造船(株)技術研究所 (☎554 大阪市此花区桜島1-3-22)。^{*3} 正員、三洋電機(株)制御システム研究所 (☎573 枚方市走谷1-18-13)。^{*4} 正員、京都工芸繊維大学工学部 (☎606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

の精度や計算効率の系統的な比較はほとんど行われておらず、与えられた問題に対してどの方法を採用すればよいかの選択は多分に研究者の好みとなっているのが現状である。したがって本論文では、二次元の非圧縮性流れを対象として、流れ関数-渦度法、MAC法、擬圧縮性法、収束加速を行った擬圧縮性法および非食い違い格子法の5種類の数値解法を取り上げ、正方空洞内流れおよび90°曲がり管内流れを検定問題とし、各方法の精度、計算効率および数値計算上の特長を比較・検討し、各方法に対する総合的評価を行うことを試みた結果について報告する。なお、時間積分法は、おもに前進オイラー法を用い、擬圧縮性法については残差平均を組み込んだ有理ルンゲ・クッタ法⁽⁵⁾も試みた。また、数値計算はクボタコンピュータ製のTITAN 3000により行った。

2. 基礎方程式

非圧縮性粘性流体の2次元流れは、次のような連続の式およびナビエ・ストークス方程式で記述される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

ここで、 u 、 v は速度の x 、 y 方向成分、 p は圧力、 Re は基準レイノルズ数である。

いま、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega \dots\dots\dots (2)$$

で定義される流れ関数 ψ と渦度 ω を導入すると、次のような渦度輸送方程式と流れ関数に対するポアソン方程式を得る。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \dots\dots\dots (4)$$

また、Chorin⁽³⁾により導入された擬圧縮性法では、連続の式を次のように変形する。

$$\left(\frac{1}{x} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 x は擬圧縮性のパラメータである。この方法では、定常状態においてのみ元の連続の式が満たされる。

複雑な形状の流れ場への適用に際しては、デカルト座標 (x, y) から一般曲線座標 (ξ, η) へ座標変換を行う。この一般曲線座標系で連続の式とナビエ・ストークス方程式をベクトル表示すると、次のようになる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \dots\dots\dots (6)$$

$$q = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

$$E = J^{-1} \begin{bmatrix} U \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \end{bmatrix}, \quad F = J^{-1} \begin{bmatrix} V \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \end{bmatrix},$$

$$R = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha u_\xi + \beta u_\eta \\ \alpha v_\xi + \beta v_\eta \end{bmatrix}, \quad S = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta u_\xi + \gamma u_\eta \\ \beta v_\xi + \gamma v_\eta \end{bmatrix}$$

ここで、添字は偏微分を示し、

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$\alpha = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad \beta = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad \gamma = \eta_x^2 + \eta_y^2 \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

である。

また、一般曲線座標系での渦度輸送方程式と流れ関数に対するポアソン方程式は、次のように示される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J \left(\phi_\eta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \phi_\xi \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \dots\dots\dots (8)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \dots\dots\dots (9)$$

ただし、

$$\nabla^2 = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma = J^2(\xi_{xx} + \xi_{yy}), \quad \tau = J^2(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \dots\dots\dots (11)$$

である。

なお、擬圧縮性法では、式(6)の q を次のように変える。

$$q = J^{-1} \begin{bmatrix} x^{-1} p \\ u \\ v \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

3. 数値計算法

3.1 流れ関数-渦度法 ここでは、流れ関数-渦度表示の基礎方程式に対して、最も簡単な数値計算法を採用する。すなわち、渦度輸送方程式の空間微分項をすべて2次精度中心差分法により離散化し、時間積分には前進オイラーを用いる。また、流れ関数に対するポアソン方程式の解法にはSOR法を用いる。

3.2 MAC法 ここでは、図1に示すようなデカルト座標系のスタガード格子系で導き出される標準

的 MAC 法を用いる。すなわち、 x 方向速度成分 u に対する離散化は、次のように行う。

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j}^{n+1} = & u_{i+1/2,j}^n - \lambda[(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i,j}^n)^2] \\ & - \lambda[(uv)_{i+1/2,j+1/2}^n - (uv)_{i+1/2,j-1/2}^n] \\ & - \lambda[p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n] \\ & + \frac{\nu}{Re}[u_{i+3/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n + u_{i+1/2,j+1}^n + u_{i+1/2,j-1}^n \\ & - 4u_{i+1/2,j}^n] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし、簡単のため、

$$\Delta x = \Delta y, \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \nu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \dots\dots\dots (14)$$

とした。

また、圧力 p に対するポアソン方程式は次のように離散化される。

$$\begin{aligned} & p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 4p_{i,j} \\ = & -[u_{i+1,j}^2 - 2u_{i,j}^2 + u_{i-1,j}^2 + v_{i,j+1}^2 - 2v_{i,j}^2 + v_{i,j-1}^2] \\ & - 2[(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,j-1/2} - (uv)_{i-1/2,j+1/2} \\ & + (uv)_{i-1/2,j-1/2}] - \frac{1}{\nu} D_{i,j} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで、 D は次式で定義される n 時間段階での発散量である。

$$D_{i,j} = \frac{1}{\Delta x}[u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j} + v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}] \dots\dots\dots (16)$$

なお、変数が定義されていない点での値は、平均化操作により、たとえば、次のように求めるものとする。

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{2} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} & (uv)_{i+1/2,j+1/2} \\ = & \frac{u_{i+1/2,j+1} + u_{i+1/2,j}}{2} \frac{v_{i+1,j+1/2} + v_{i,j+1/2}}{2} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

3.3 擬圧縮性法 擬圧縮性方程式に対する数値

図 1 スタガード格子

計算法としては、線の方法を用いる。すなわち、擬圧縮性方程式の空間微分項を 2 次精度中心差分法で離散化すると、次のような連立常微分方程式に帰着する。

$$\frac{dq}{dt} = Q(q) \dots\dots\dots (19)$$

この常微分方程式の積分には、前進オイラー法を用いる。

$$q^{n+1} = q^n + \Delta t Q(q^n) \dots\dots\dots (20)$$

また、擬圧縮性法では、時間発展的に u, v, p の定常解を求めるので、その収束を加速することが有効である。ここでは、その一例として、残差平均法(RA)を組込んだ有理ルンゲ・クッタ法(RRK)⁽⁵⁾を用いる。すなわち、式(19)の積分を次のように行う。

$$q^{n+1} = q^n + \bar{r} \dots\dots\dots (21)$$

$$[1 - \varepsilon_x \delta_x^2 - \varepsilon_y \delta_y^2] \bar{r} = r \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 δ^2 は 2 階差分演算子、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は残差平均の重み係数である。また、残差 r は、有理ルンゲ・クッタ法により次のように求める。

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{2g_1(g_1, g_3) - g_3(g_1, g_1)}{(g_3, g_3)} \\ g_1 &= \Delta t Q(q^n), \quad g_2 = \Delta t Q\left(q^n + \frac{g_1}{2}\right) \\ g_3 &= 2g_1 - g_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、たとえば、 (g_1, g_3) は、ベクトル g_1 と g_3 の内積を示す。

3.4 非食違い格子法 ここで用いる非食違い格子法は、Abdallah⁽²⁾ により提案され、その後 Mansour と Hamed⁽⁶⁾ により一般曲線座標系に拡張されたものである。その特徴は、圧力のポアソン方程式に対する境界条件に渦度を用い、適合条件を満足し、収束解を得ようとする点である。

最初に、式(6)の u, v に対して、次のような計算を行う。

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{n+1} = & q_{i,j}^n - \Delta t \frac{E_{i+1,j}^n - E_{i-1,j}^n}{2\Delta\xi} - \Delta t \frac{F_{i,j+1}^n - F_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \\ & + \frac{\Delta t}{Re} \left(\frac{R_{i+1/2,j}^n - R_{i-1/2,j}^n}{\Delta\xi} + \frac{S_{i,j+1/2}^n - S_{i,j-1/2}^n}{\Delta\eta} \right) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

次に、圧力 p は、次のポアソン方程式をガウス・ザイデル法で解くことにより求める。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\xi} J^{-1} \left(\alpha \frac{\partial p}{\partial\xi} + \beta \frac{\partial p}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} J^{-1} \left(\beta \frac{\partial p}{\partial\xi} + \gamma \frac{\partial p}{\partial\eta} \right) \\ = & \frac{D}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\xi_x \left(U \frac{\partial u}{\partial\xi} + V \frac{\partial u}{\partial\eta} \right) \right. \\ & \left. + \xi_y \left(U \frac{\partial v}{\partial\xi} + V \frac{\partial v}{\partial\eta} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\eta_x \left(U \frac{\partial u}{\partial\xi} + V \frac{\partial u}{\partial\eta} \right) \right. \end{aligned}$$

表 1 収束解までの時間段階数と計算時間

Schem Model	$\Psi - \omega$	A. C. (normal)	A. C. (RRK, RA)	MAC (staggered)	Non - staggered
2 - D Cavity Re = 10^3 Grid 65×65	3700 step 105 sec	114300 step 18410 sec	1184 step 231 sec	4337 step 10220 sec	4900 step 3602 sec
2 - D Curved pipe Re = 790 Grid 65×33	3780 step 77 sec	200000 step 14700 sec	1164 step 119 sec	—	8820 step 2252 sec

図 2 各計算法の収束履歴

図 3 中心線上の流速 u および v の分布

$$+ \eta_v \left(U \frac{\partial v}{\partial \xi} + V \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、境界条件として、たとえば、 η が一定の境界では、次式を与える。

$$J \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = \frac{D}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \eta_x \left(U \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \eta_v \left(U \frac{\partial v}{\partial \xi} + V \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad \dots\dots\dots (26)$$

4. 計算結果

4・1 二次元正方空洞内流れ 最初に、非圧縮性流体に対する数値計算法の代表的な検定問題である二次元正方空洞内流れに対する計算結果を示す。取上げた計算法は、流れ関数-渦度法($\psi-\omega$)、MAC法、擬圧縮性法(A.C.)、収束加速を行った擬圧縮性法、および非食違い格子法の5種類である。ここではレイノルズ数 Re が1000の場合について 65×65 の等間隔格子

を用い、静止状態から上壁面が速度 $U=1$ で衝撃出発する条件で計算を行った。なお、擬圧縮性法では、計算の安定性や解の収束性を考慮して $\alpha=1$ とした。また、擬圧縮性法および非食違い格子法については、おもに上壁面両端の特異点まわりの圧力振動を防止する目的で4次精度の人工粘性項を付加している。

図2に各計算法の収束履歴を示す。ここでは収束性評価のパラメータとして、流れ関数-渦度法では渦度の、ほかの方法では速度の平均二乗残差を用いている。収束加速を行った擬圧縮性法および流れ関数-渦度法の収束性が優れている。擬圧縮性法は、収束加速の有無による収束性の差が顕著であり、適切な収束加速操作により収束効率を飛躍的に向上させることが可能であるという点が本法の特徴の一つであるといえる。

表1上段に各方法の収束解が得られるまでの計算ステップ数およびTITAN 3000による計算時間を示す。ここで収束解とは上記収束性評価パラメータが4けた下がった状態と定義している。MAC法については圧

力のポアソン方程式の収束状態が最終的な速度の収束性に影響を及ぼすことが判明したため、計算時間面では不利となるが、今回はポアソン方程式の残差の許容値を 1.0×10^{-10} に設定した。また、非食違い格子法の圧力のポアソン方程式は Abdallah の方法⁽²⁾ と同じく緩和係数を 1 とした SOR 法(ガウスザイデル法)にて繰返し計算数を 10 回に固定して解を求めた。

図 3 に中心線上の流速 u および v の分布を示す。計算法の違いによる計算結果の差はほとんど認められない。また、Ghia ら⁽⁷⁾ の 129×129 の格子を用いた信頼性の高い計算結果ともよく一致している。なお、擬圧縮性法については収束加速の有無による計算結果の違いが認められないため、収束加速を行った場合の計算結果を代表例として用いている(以下同様)。

図 4 は下壁面中央の圧力と代表速度により正規化し

図 4 中心線上の圧力係数 C_p 分布

図 5 2次元 90° 曲がり管モデル

た圧力係数 C_p の中心線上の分布を示す。流れ関数-渦度法における圧力は Abdallah の方法に従い、非食違い格子法と同一の圧力ポアソン方程式を用いて、速度場の定常解からポアソン方程式のソース項を算出し、SOR 法で解を求めている。計算結果には速度分布の場合と同様、計算法の違いによる差は認められない。

このように、二次元正方空洞内流れの定常解については、今回取上げた計算法のいずれによる解も十分な信頼性をもつといえる。

4.2 2次元 90° 曲がり管内流れ 次に、一般座標系における解析例として、流入、流出境界をもつ代表的な問題である二次元 90° 曲がり管内流れに対する計算結果を示す。計算に用いた曲がり管のモデルを図 5 に示す。対象とした計算法は、流れ関数-渦度法、擬圧縮性法、収束加速を行った擬圧縮性法および非食違い格子法の 4 種類である。計算はレイノルズ数 Re を 790、格子数は管軸方向、管断面方向に 65×33 とした。

図 6 各計算法の収束履歴

図 7 管軸方向速度分布

境界条件は流入条件として管入口部にポアズイユ流れを与え、入口圧力は線形外挿で求めている。流出条件は管出口部で自由流れとし、圧力を固定($p=1$)している。また、壁面は粘着壁としている。

図6および表1下段に収束履歴および計算時間を示す。表示方法等は前項と同一である。正方空洞内流れの場合と同様、収束加速を行った擬圧縮性法と流れ関数-渦度法の収束性が優れている。

図7に曲がり部入口($\theta=0^\circ$)、中央($\theta=45^\circ$)および出口($\theta=90^\circ$)の管断面内の管軸方向速度分布を示す。ここで、縦軸は $\eta=(r_0-r)/(r_0-r_i)$ で表される無次元数で各断面内での位置を示す。各断面とも計算法の違いによる速度分布の差はなく、軸方向速度の高速領域が、流れの進行につれて内壁側に移動し、出口部でまた中央部に戻る様子がよくわかる。

図8に管内周壁上、管軸中心および外周壁上の管軸

方向圧力分布を示す。図の横軸は管軸中心の曲がり部の長さで無次元化した管軸方向距離で、曲がり部入口を原点として表示している。流れ関数-渦度法における圧力は正方空洞内流れの場合と同様の方法を用いて速度場の定常解から計算しているが、計算結果は正方空洞内流れの場合と異なり、これ以外の2法による結果との間に良好な整合性がみられない。特に、非食違い格子法とは基本的に同一の圧力ポアソン方程式を用いて圧力を計算しているにもかかわらず、結果に差があることについては以下のように考えられる。

(1) 速度の定常解をポアソン方程式に代入しその解として圧力分布を求める場合、片方の境界では圧力を固定し、他方の境界では圧力を内点の値から外挿する条件は、ポアソン(だ円型偏微分)方程式の境界条件としては不十分である。速度と圧力を同時に解く、すなわち、連続の式または圧力のポアソン方程式とナビ

図8 管軸方向の圧力分布

図9 圧力ポアソン方程式の境界条件の比較

エ・ストークス方程式を連立して解く場合は、上流境界で流速分布を与え、圧力を内点の分布より計算し、下流境界では圧力を与え、流速分布は内点の分布より計算する境界条件で十分であるが、圧力をポアソン方程式の解として単独に求める場合は、両方の境界で圧力の値もしくはこう配を指定する必要がある。特に今回の解析事例では、管入口部および出口部周辺の直管部分で、圧力ポアソン方程式のソース項が非常に小さい値となり、不十分な境界条件が強調され、初期条件に依存した異なる解に収束した。

(2) 速度場の定常解に関してほかの2法の計算結果と大きな差がない場合でも、一般座標系においては圧力ポアソン方程式のソース項を算出する際に、メトリックスの計算誤差により速度分布のわずかな差が増幅されてしまう可能性がある。

以上の考察を確認するために以下の計算を行った。上記と同一の計算式を使用し、速度場の差の影響をなくするために擬圧縮性法で得られた速度場の定常解を用いて圧力ポアソン方程式のソース項を計算した。圧力の初期値も同じく入口部に擬圧縮性法による定常解の圧力値を、中間部には線形補完値(出口は1に固定)をそれぞれ与えた。そして、入口圧力の境界条件を固定した場合(CASE 1)および外挿した場合(CASE 2)の2種類で計算を行った。

図9に計算結果を擬圧縮性法の結果と比較して示す。CASE 1については入口、出口とも圧力が変化せず、かつ速度場の差もないことから、擬圧縮性法の結果とほぼ同一の結果が得られているのに対して、入口圧力を線形外挿としたCASE 2では圧力値に大きな差がでている。

5. 結 論

非圧縮性流れに対する代表的な陽的計算法について、二次元正方空洞内流れと90°曲がり管内流れに対

して適用し、以下の結論を得た。

(1) 正方空洞内流れおよび90°曲がり管内流れとも定常解の速度分布については、計算法の違いによる差はほとんど認められず、いずれも十分に信頼性が高いことが確認された。また、圧力分布についても90°曲がり管内流れで流れ関数-渦度法による速度場定常解から求めた圧力分布を除いて、計算法の違いによる差は認められない。

(2) 定常解に対する収束性については収束加速を行った擬圧縮性法と流れ関数-渦度法が優れている。特に、三次元問題への拡張を考えた場合に擬圧縮性法の収束加速に対する適応性の高さは重要な長所であると考えられる。

(3) 圧力の計算方法について、流れ関数-渦度法の速度場の定常解を用いてポアソン方程式より圧力を計算する方法は、正方空洞内流れのように簡単な形状の場合には問題ないが、一般には、適切な初期・境界条件の設定および圧力ポアソン方程式のソース項の計算精度に十分注意する必要がある、その適用には制限があると考えられる。

終わりに、本研究は社団法人大阪工業会が主催したCAE研究会の活動の一部として行われたものであることを記し、研究会の企画、推進に御尽力いただいた大阪工業会の杉山氏に感謝の意を表する。

文 献

- (1) Harlow, H. F. and Welch, J. E., *Phys. Fluids* 8(1965), 2185.
- (2) Abdallah, S., *J. Comput. Phys.* 70(1987), 182.
- (3) Chorin, A. J., *J. Comput. Phys.* 2(1967), 12.
- (4) Rogres, S. E. and Kwak, D., *AIAA J.* 28(1990), 253.
- (5) Morinishi, K. and Satofuka, N., *AIAA Paper* 90-3017(1990).
- (6) Mansour, M. L. and Hamed, A., *J. Comput. Phys.* 86(1990), 147.
- (7) Ghia, U., ほか2名, *J. Comput. Phys.* 48(1982), 387.