気泡流中における衝撃波の伝ば*

(第1報, 支配方程式の定式化, 基本関係の導出, 気液間のスリップの影響)

松本 洋一郎^{*1}, 亀田 正治^{*2}Propagation of Shock Waves in Dilute Bubbly Liquids
(1st Report, Governing Equations, Hugoniot Relations,
and Effect of Slippage between Two Phases)

Yoichiro MATSUMOTO and Masaharu KAMEDA

Propagation of shock waves in dilute bubbly liquids is investigated numerically. Governing equations for the bubbly liquid are formulated with emphasis on the radial and transverse motions of the bubbles. The conservation equations for mass, momentum and energy inside the bubbles are solved directly in order to precisely estimate the effects of internal phenomena on bubble motion. A numerical method, where individual bubbles are traced to estimate the effects of volumetric changes and relative motion on wave phenomena, is developed. For a wave process at steady-state conditions, simple relations, such as the propagation velocity, C_i , are derived. Numerical results under several conditions reveal that the terminal wave propagation velocity coincides with the velocity in the equilibrium condition, C_i . The slippage between bubbles and liquid has some influence on the time evolution of propagation velocity of the shock wave and the relaxation structure behind the wave. However, the slippage plays a minor role in the wave propagation processes.

Key Words: Multiphase Flow, Shock Wave, Bubble Dynamics, Numerical Analysis, Heat Transfer, Hugoniot Relation, Slippage between Bubble and Liquid

1. はじめに

液体中に気泡が分散して存在する気泡流中の圧力波の伝ばについては、圧力波と気泡運動との干渉などの点で興味を持たれ、数多くの研究がなされている。一般に気泡流中では、気体の持つ圧縮性と液体の大きな密度のため気体、液体それぞれの単相中に比べ、音速が非常に低下することが知られている。また、気泡流中における衝撃波については、いくつかの実験結果^{(1)~(3)}から、圧力の立上りがそれほど急峻ではなく、背後に緩やかな緩和振動を伴った圧力の上昇領域を持つことが明らかにされている。

van Wijngaarden ら⁽⁴⁾は、衝撃波背後の圧力の変動が気泡の振動によるものであることを見だし、実験結果と彼らの弱い衝撃波に対する摂動理論を比較し定性的な一致をみている。しかし、彼らは衝撃波の伝ばに伴う波頭圧力の減衰の主因を気液の速度差によるものであると結論づけ、気泡の膨張・収縮に伴って生じる気液間の温度非平衡によるエネルギーの散逸の影響を考慮していない。

これに対し、土方ら⁽²⁾、Beylich ら⁽³⁾、Nigmatulin ら⁽⁵⁾は、それぞれ、気泡からの熱・物質移動の影響をさまざまなモデルを用いて評価し、衝撃波の減衰過程において、気液間の速度差の影響は比較的小さく、気泡内に生じる温度分布による熱拡散の影響が最も大きいことを指摘している。しかし、気泡の膨張・収縮運動に伴う気泡内部の状態変化は非常に複雑であり、簡単なモデルでは十分に表現できないことが、最近著者の一人ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾によって明らかにされている。このほか、Prosperetti ら^{(8)~(10)}は、気泡内部の圧力分布一様の仮定の下に単純化したエネルギー方程式を数値的に解くことによって、気泡からの熱移動量を計算し、それが気泡流中を伝ばする音波や衝撃波に対する影響についての研究を行っている。

また、現実の気泡流では、気泡の数密度や初期気泡径に分布を持つことが考えられるが、著者の一人らはその影響についての数値解析を、個々の気泡をラグランジェ的に追跡する手法を用いて行い、気泡径に大きな分布のある場合は衝撃波の波形に影響が現れることを報告している⁽¹¹⁾。ただし、ここでは、気泡内部の状態変化については等温変化が仮定されている。

本研究では、不凝縮ガス気泡からなる気泡流中の衝撃波の伝ば過程に対する、さまざまな因子の影響を系

* 原稿受付 平成5年1月11日。

*¹ 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。*² 正員, 東京大学大学院。

統的に明らかにすることを目的とした数値解析を行った。

本報では、まず、気泡流中の波動現象に対する支配方程式を、気泡内ガスの密度・圧力・温度分布、および、気液間のスリップを考慮して定式化し、衝撃波伝ば挙動の時間発展に対する散逸機構の影響について述べた後に、気液間のスリップの影響について報告する。続いて次報では、気泡の膨張・収縮運動に伴って気泡内部に生じる密度、圧力、温度分布の影響について報告する。

気泡の内部現象の影響を正確に評価するために、気泡流中に存在する個々の気泡に対して、気泡内ガスの密度、運動量、エネルギーの各保存式を差分近似し、直接数値的に解いて気泡運動を計算し、その結果を気泡流全体と併せる方法を数値解法として採用した。

その結果、気泡流中の衝撃波の伝ば挙動に関し、ステップ状の圧力波形から定常状態への遷移過程が詳細に計算でき、以下のことが明らかとなった。気泡流中における定常衝撃波の伝ば速度は、等温平衡衝撃波の伝ば速度に一致する。衝撃波の伝ば過程において、気液間のスリップは、液体の粘性係数が十分大きいのか、含まれる気泡の気泡径が十分小さくない限り無視できないが、衝撃波波形そのものに与える影響は小さい。

2. おもな記号

C_D : 抵抗係数
c_v : 定積比熱
dV : セル体積
e : 比内部エネルギー
K : セルに含まれる気泡個数
P : (気泡流における) 圧力
p : (気泡内部における) 圧力
R : 気泡半径
r : (気泡内部における) 半径方向の座標
Re : レイノルズ数
$\mathcal{R}$: ガス定数
T : 温度
t : 時間
U : (気泡流における) 速度
u : (気泡内部における) 速度
x : (気泡流における) 座標
α : ボイド率
β : 仮想質量の係数
κ : 比熱比
λ : 熱伝導率
μ : 粘性係数

ρ : 密度
 σ : 表面張力係数

添字など

0 : 初期状態
 g : 気相
 H : 高圧
 i : 第 i 番めのセル
 l : 液相
 k : 第 k 番めの気泡
 L : 低圧
 N : 時間ステップ
 w : 気泡壁
 $*$: 無次元
 $\cdot$: 時間微分

3. 基礎方程式

3・1 仮定 現象の支配方程式を定式化するに当たり、以下の仮定を行った。

(1) 気泡流は、流れの代表長さに比べて十分小さな気泡が分散して存在する流れであるとする。すなわち、全体としては連続体として取扱う。

(2) 本研究で取扱う気泡流のボイド率は1%のオーダーである。したがって、気相の持つ質量、運動量は、液相のそれらに対して十分小さい。すなわち、気泡流の質量 ρ_m 、運動量 $(\rho U)_m$ は、

$$\rho_m = (1 - \alpha) \rho_l + \alpha \rho_g \simeq (1 - \alpha) \rho_l \cdots \cdots (1)$$

$$(\rho U)_m = (1 - \alpha) \rho_l U_l + \alpha \rho_g U_g \simeq (1 - \alpha) \rho_l U_l \cdots \cdots (2)$$

と表すことができる。

また、後述する式(25)、(36)より、気泡流の法線応力偏差成分 τ_{xx} は、

$$\tau_{xx} \simeq \frac{4}{3} \mu_l \frac{\partial U_l}{\partial x} \sim \frac{4}{3} \mu_l \frac{U_{l0}}{L} \sim \frac{4}{3} \mu_l \frac{\alpha_{l0}}{R_{l0} \sqrt{\rho_l P_{H0}}} \Delta P \cdots \cdots (3)$$

と評価することができる。液体を水 ($\rho_l \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\mu_l \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$) とし、初期ボイド率 α_{l0} が1%、高圧側平衡圧力 P_{H0} が $\simeq 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ であるとするれば、 τ_{xx} は、

$$\tau_{xx} \simeq \frac{10^{-9}}{R_{l0}} \Delta P$$

となり、初期気泡径 R_{l0} が $10 \mu\text{m}$ であっても、圧力差 ΔP に対して 10^{-4} 程度のオーダーになる。したがって、気泡流における法線応力偏差成分は無視することとした。

(3) 気相のみが圧縮性を持ち、液相は非圧縮であ

とする。

(4) 気泡は球対称を保つとする。

(5) 気泡壁における液相の温度は、液相が十分大きな熱容量を持つため一定であるとする。

(6) 気泡内ガスは不凝縮性気体であるとし、理想気体とする。

(7) 気泡壁を通じた物質移動はないものとする。

(8) 各気泡の合体、分裂はないものとする。

3・2 支配方程式 以上の仮定を用いて、気泡流、および、各気泡内部について以下の諸式が導かれる。

3・2・1 気泡流の質量、運動量保存式

(1) 質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-\alpha)\rho_l] + \frac{\partial}{\partial x}[(1-\alpha)\rho_l U_l] = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\alpha = \sum_{k=1}^{K_l} \frac{4}{3} \pi R_k^3 / dV_l \quad \dots\dots\dots (5)$$

(2) 運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-\alpha)\rho_l U_l] + \frac{\partial}{\partial x}[(1-\alpha)\rho_l U_l^2] = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

3・2・2 気泡の膨張・収縮の方程式 圧力変動による各気泡の膨張・収縮の方程式は、非圧縮性無限流体中における単一気泡の運動を表した Rayleigh-Plesset 式⁽¹²⁾が、気泡流中で気泡に作用する平均圧力に対しても成り立つと仮定して、

$$R_k \ddot{R}_k + \frac{3}{2} \dot{R}_k^2 = \frac{1}{\rho_l} \left[p_{gw} - \frac{2\sigma}{R_k} - 4\mu_l \frac{\dot{R}_k}{R_k} + \frac{\rho_l (U_{gk} - U_l)^2}{4} - P \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

3・2・3 気泡の並進運動の方程式 膨張・収縮の方程式と同様に、各気泡に作用する液体の速度、気泡に作用する平均圧力を用いて、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\beta \rho_l \frac{4}{3} \pi R_k^3 U_{gk} \right) - \frac{D_l}{Dt} \left(\beta \rho_l \frac{4}{3} \pi R_k^3 U_l \right) \\ & + \frac{4}{3} \pi R_k^3 \frac{\partial P}{\partial x} + C_{Dk} \pi R_k^2 \rho_l \\ & \times \frac{(U_{gk} - U_l)|U_{gk} - U_l|}{2} = 0 \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 D_l/Dt は液体速度に乗った実質微分であり、

$$\frac{D_l}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_l \frac{\partial}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表すことができる。

仮想質量の係数 β は、ボイド率の関数となるが、本論文で扱う気泡流のボイド率は 1% 程度であるため、一定値としても差し支えない。そこで、 β は 0.5 とした⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。

また、通常の液体では含まれている不純物のために、

気泡の抵抗係数 C_{Dk} は固体球のそれに近くなること知られている。ここでは、以下の実験式⁽¹⁵⁾を用いた。

$$C_{Dk} = \frac{24}{Re_k} + \frac{4}{\sqrt{Re_k}} + 0.4, \\ Re_k = \frac{2\rho_l R_k |U_{gk} - U_l|}{\mu_l} \quad \dots\dots\dots (10)$$

3・2・4 気泡内部の質量、運動量、エネルギー保存式 各気泡について、気泡内ガスの粘性の影響を無視すれば、以下の各保存式が導かれる。

(1) 質量保存式

$$\frac{\partial \rho_{gk}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_{gk} u_{gk}) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(2) 運動量保存式

$$\frac{\partial \rho_{gk} u_{gk}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_{gk} u_{gk}^2) = -\frac{\partial p_{gk}}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(3) エネルギー保存式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_{gk} e_{gk}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_{gk} e_{gk} u_{gk}) \\ & = -\frac{p_{gk}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{gk}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_{gk} \frac{\partial T_{gk}}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし、

$$e_{gk} = c_{vg} T_{gk} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(4) 状態方程式

$$p_{gk} = \rho_{gk} R T_{gk} \quad \dots\dots\dots (15)$$

また、気液界面における境界条件として、仮定(5)、(7)より

$$T_{gwk} = T_l (= \text{const.}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

3・3 定常衝撃波における関係式 衝撃波の伝ば速度を C とおく。このとき、衝撃波の波面に固定された座標系 (t' ; x') について以下のような関係がある。

$$t' = t, \quad x' = x - Ct, \quad U' = U - C$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - C \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

これらを気泡流の質量保存式、運動量保存式、および、気相側の質量保存式、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho_g U_g) = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

に代入する。ただし、 ρ_g , U_g は空間平均量としての気相密度および速度を表している。十分発達した衝撃波を考えていることから、伝ば速度 C は一定であり、かつ、時間微分項 $\partial/\partial t'$ は外すことができる。結局、式(4)、(6)、(17)はそれぞれ以下のように変換される。

$$\cdot \text{式(4)} \rightarrow (1-\alpha)\rho_l U_l' = -(1-\alpha_{l0})\rho_l C \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\cdot \text{式(17)} \rightarrow \alpha \rho_g U_g' = -\alpha_{l0} \rho_{gl0} C \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\cdot \text{式(6)} \rightarrow (1-\alpha)\rho_l U_l'^2 + P = (1-\alpha_{l0})\rho_l C^2 + P_{l0} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし, α_{L0} , P_{L0} , ρ_{g0} はそれぞれ, 低圧側における平衡ボイド率, 圧力, および気泡内ガスの密度である。

ところで, 衝撃波波面から高圧側に向かって十分遠方では, 気液の速度・温度は等しい。したがって,

$$\rho_{gH0} = \rho_{g0} \left(\frac{p_{gH0}}{p_{g0}} \right), \quad U_{gH0} = U_{g0} \dots (21)$$

である。ここで, ρ_{gH0} , U_{gH0} , U_{H0} はそれぞれ高圧側平衡状態における気泡内ガス密度, 気相速度, 液相速度である。また, 低圧, 高圧両側における気泡内ガス圧力 p_{g0} , p_{gH0} は, 表面張力の影響を考慮して,

$$p_{g0} = P_{L0} + \frac{2\sigma}{R_{L0}}, \quad p_{gH0} = P_{H0} + \frac{2\sigma}{R_{H0}} \dots (22)$$

と表すことができる。ただし, P_{H0} は高圧側の平衡圧力である。また, R_{L0} , R_{H0} はそれぞれ, 低圧側, 高圧側における平衡気泡半径であり, 以下の関係が成り立つ。

$$\left(P_{H0} + \frac{2\sigma}{R_{H0}} \right) R_{H0}^3 = \left(P_{L0} + \frac{2\sigma}{R_{L0}} \right) R_{L0}^3 \dots (23)$$

式(18)~(20)に式(21)を代入すれば, 等温平衡衝撃波の伝ば速度 C_i が以下のように求められる。

$$C_i = \sqrt{\frac{p_{gH0}}{\alpha_{L0}(1-\alpha_{L0})\rho_l} \cdot \frac{P_{H0}-P_{L0}}{p_{gH0}-p_{g0}}} \dots (24)$$

高圧側平衡状態における液体速度 U_{H0} , ボイド率 α_{H0} についても同様に,

$$U_{H0} = \alpha_{L0} \left(1 - \frac{p_{g0}}{p_{gH0}} \right) C_i \dots (25)$$

$$\alpha_{H0} = \frac{\alpha_{L0} p_{g0}}{\alpha_{L0} p_{gH0} + (1-\alpha_{L0}) p_{gH0}} \dots (26)$$

また, 式(18), (20)から, U_i を消去すると, 圧力とボイド率の関係が以下のように求められる。

$$P = P_{L0} + (1-\alpha_{L0}) \rho_l C_i^2 \left(1 - \frac{1-\alpha_{L0}}{1-\alpha} \right) \dots (27)$$

4. 数値計算法

4.1 変数変換 衝撃波の伝ば, ならびに気泡の内部現象を精度よく計算を行うため, 以下のような座標変換を行った。

$$r = R\sqrt{y}, \quad (0 \leq y \leq 1) \dots (28)$$

$$x = \xi(x_{max} - x_w) + x_w \quad (0 \leq \xi \leq 1) \dots (29)$$

ここで, x_w , x_{max} はそれぞれ, 衝撃波管の高圧側接触面および管端の座標を表す。図1に計算領域の概略図を示す。

4.2 数値計算法

4.2.1 気泡流全体の解法 図1に示すスタガードメッシュを考えて式(4), (6)を差分化し, HSMAC法に準じた半陰解法⁽¹¹⁾を用いて計算を行った。なお, 運動量保存式[式(6)]の対流項は, 二次の中心差分で評価し, 気泡の膨張・収縮の方程式[式(7)]は, 以下のように差分を行った。

$$\begin{aligned} R^N \frac{R^{N+1} - 2R^N + R^{N-1}}{\Delta t^2} + \frac{3}{2} (\dot{R}^N)^2 \\ = \frac{1}{\rho_l} \left[p_{gw}^N - \frac{2\sigma}{R^N} - 4\mu_l \frac{\dot{R}^N}{R^N} + \frac{\rho_l (U_s^N)^2}{4} - P^{N+1} \right] \end{aligned} \dots (30)$$

ただし, U_s^N , $\dot{R}^N$ は次のとおりである。

$$U_s^N = U_g^N - U_l^N, \quad \dot{R}^N = \frac{3R^N - 4R^{N-1} + R^{N-2}}{2\Delta t} \dots (31)$$

以下のような手順で計算を進行させた。

(1) $N+1$ 時刻での圧力を適当に仮定し, それを用いて, $N+1$ 時刻における仮の気泡径を式(30)により計算する。

(2) その気泡径から式(5)を用いて, 各計算セルにおけるボイド率 α' を求める。

(3) 式(4), (6)を用いて求められる, $N+1$ 時刻でのもう一つのボイド率 α'' と, (2)で求められた α' を一致させるように圧力緩和を行って, U_i^{N+1} , P^{N+1} , R^{N+1} を求める。

(4) (3)で求められた $N+1$ 時刻での気泡径, および, N , $N-1$ 時刻での気泡径を用いて, N から $N+1$ 時刻の間の任意の時刻の気泡径および気泡壁の移

図1 計算領域概念図

動速度は次の内挿式から求める。

$$\begin{cases} R = A(t - t^N)^2 + B(t - t^N) + R^N \\ \dot{R} = 2A(t - t^N) + B \end{cases} \quad (t^N \leq t \leq t^{N+1}) \quad (32)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= (R^{N+1} - 2R^N + R^{N-1}) / 2\Delta t^2 \\ B &= (R^{N+1} - R^{N-1}) / 2\Delta t \end{aligned} \quad (33)$$

式(32)を用い、4・2・2項で示す方法により $N+1$ 時刻での各気泡内部の諸量を計算する。

(5) (3)で求められた $\dot{x}_w^{N+1}$ を用いて空間座標を計算し直す。

(6) 気泡の並進速度を、新しく求められた流速、圧力を用いて求め、気泡を移動させる。

(7) 時間を進行させて(1)に戻る。

なお、気泡に作用する平均圧力および液体速度は流れの変数をその定義点間で直線内挿することによって求めている。また、セルをまたぐ気泡については、セル境界断面でその気泡を分割後各セルに含まれる気泡体積を計算してボイド率計算に繰り入れた。

4・2・2 気泡内部の解法 各気泡について、時間については一次前進差分で、空間についてはスタガードメッシュを用いて中心差分で評価した。数値計算法としては、CIP法⁽¹⁶⁾を用いた。計算を行う時間ステップは、気泡流全体の挙動を計算する時間ステップより細かくとり、その間の気泡径、気泡壁の移動速度は4・2・1項に示した式(32)から求められるとした。各時間ステップにおける計算方法は以下のとおりである。

(1) 液相側の運動方程式(7)と、気相側の境界条件の両者を満足させる気泡壁ガス圧力 p_{gw} を求める。

(2) 式(12)を用いて、新しい時刻の速度分布を求める。

(3) 新しい時刻の気泡径と気泡壁の移動速度を用いて、新しいメッシュを計算する。

(4) (2)で求めた速度および式(13)を用いて、新しい時刻の温度分布を求める。この際、熱拡散項は陰的に差分を行った。

(5) (2)、(4)で求めた速度、温度から式(11)を用いて新しい密度分布を計算する。さらに、状態方程式(15)を用いて新しい圧力分布を求める。

(6) 時間を進行させて(1)に戻る。

以上を基に、時刻零において、自由端側の圧力を急激に上昇させたときに気泡流中を伝ばする衝撃波の数値シミュレーションを行った。なお、気泡内ガスの熱伝導率については、その温度依存性を考慮した。

5. 数値計算結果と考察

気泡流中を伝ばする衝撃波の数値シミュレーションをいくつかのパラメータの影響に注目して行った。液体は水、気泡内ガスは窒素とし、初期温度は 20°C とした。また、気泡流中に含まれるすべての気泡の初期気泡径は等しく、空間的にも均一に分布しているものとした。

なお、時間、気泡流における座標、および気液の並進速度については以下のように無次元化を図った。

$$t^* = t/\tau, \quad x^* = x/L, \quad U^* = U/C_0$$

ここで、 τ は初期圧力を基準とした気泡運動の周期のオーダを持つ時間、 C_0 は気泡流中での等温平衡音速、 L はこれらを組合せた長さの次元を持つ値であり、以下のように表すことができる。

$$\tau = R_{L0} \sqrt{\frac{\rho_l}{P_{L0}}} \quad (34)$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{P_{L0}}{\alpha_{L0}(1 - \alpha_{L0})\rho_l}} \quad (35)$$

$$L = C_0 \tau = R_{L0} \sqrt{\frac{1}{\alpha_{L0}(1 - \alpha_{L0})}} \quad (36)$$

5・1 計算精度について ここでは、気泡の膨張・収縮運動の計算手法の精度を確かめるため、単一ガス気泡の崩壊問題を例に検討を行う。

図2に、ステップ状の圧力上昇に対する気泡運動について、いくつかの方法、条件で行った計算結果の比較を示す。計算は、初期周囲圧力 100 kPa 、初期半径 1 mm の窒素ガス気泡の周囲圧力を 150 kPa に上昇させた場合について行った。計算方法、条件は以下のとおりである。

(A) 式(7)を四次精度のルンゲ・クッタ法で解き、気泡内の空間刻み Δy を 5.0×10^{-3} とし、気泡内ガスの音速および気泡壁速度を基準としたクーラン数が 0.4 となるように時間刻みを変化させた場合。

以下は、式(30)によって気泡径、気泡壁の移動速度

図2 計算方法、条件による気泡運動の違い

を算出した場合であり, その時間刻み Δt^* は 0.02 とした。

(B) $\Delta y = 0.1$, 気泡の内部現象を計算する時間刻み Δt^* を 1.0×10^{-3} ($\Delta t^*/\Delta t'^* = 20$) とした場合。

(C) $\Delta y = 0.05$, $\Delta t^* = 5.0 \times 10^{-4}$ 。

図2より, 条件(B)の場合のみ, 気泡振動の減衰率や周期に差がみられるが, (A)と(C)の計算結果はほぼ一致していることがわかる。そこで, 本計算では, 条件(C)を用いることとした。

気泡流側の空間刻みは, 上記の時間刻みに対して, 等温平衡衝撃波の伝ば速度を基準としたクーラン数が 0.1 となるようにとった。また, 各セルに気泡が 4 個配

置されるようにした。このような計算条件の下では, 数値的な圧力波形の変化がないことは確認した。

5.2 気泡流中の衝撃波の時間発展

5.2.1 散逸機構による影響 図3に, 衝撃波の時間発展の例を以下の3種類の条件について示す。

・CASE (A): 気泡の内部現象を考慮し, 気液間のスリップはあるとした場合

・CASE (B): 気泡の内部現象は考慮するが, 気液間のスリップはないとした場合

・CASE (C): 気泡内ガスは等温変化をするとし, 気液間のスリップもないとした場合

本計算における初期低圧側圧力 P_{L0} は 100 kPa, 高圧側圧力 P_{H0} は 150 kPa, 初期ボイド率 α_{L0} は 1.0% であり, 初期気泡半径 R_{L0} が 50 μm の気泡が含まれている。また, 計算条件は, $\Delta x^* = 0.25$, $\Delta t^* = 2.0 \times 10^{-2}$, $\Delta t'^* = 5.0 \times 10^{-4}$, $\Delta y = 5.0 \times 10^{-2}$ である。このとき, 気泡流中を伝ばする音波の速さ C_0 は 101 m/s, 気泡流の代表長さ L は 0.50 mm, 代表時間 τ は 5.0 μs である。

なお, CASE (C)では, 気泡内ガスの状態変化を等温変化と仮定しているため, 気泡内熱拡散による散逸はなくなる。そこで, 衝撃波伝ばに伴うエネルギー散逸を CASE (A), (B)におけるエネルギー散逸と等価なものとするため, 液体の粘性係数を高くして計算を行った。すなわち, 気泡の微小振動における減衰率を線形的に Damping 定数として評価すると, この場合の気泡内熱拡散の影響によるものは, 水の粘性係数の 22.5 倍に相当する⁽¹⁰⁾。したがって, CASE (C)では液体の粘性係数 μ_l を水の 23.5 倍とした。また, CASE (A)において, 式(10)で定義される気泡レイノルズ数 Re_k の最大値は約 100 である。

図3(a)では, 衝撃波伝ばに伴う衝撃波波形の変化を, CASE (A)については, 無次元時刻 $t^* = 10, 20, 50, 100, 200, 300$, CASE (B), (C)については $t^* = 4, 10, 20, 50, 100, 150$ における瞬間的な圧力の空間分布を用いて示し, 図3(b)では, 衝撃波の伝ば速度の変化を示した。図3(a)には, 衝撃波波頭にみられる圧力のピークの時間変化も示し, 図3(b)中の直線は式(24)で定義される等温平衡衝撃波の伝ば速度 C_i を表している。

衝撃波の伝ば速度は, いずれの場合も最終的には等温平衡衝撃波の伝ば速度 C_i に収束している。伝ば速度が C_i に収束した後は, 衝撃波の波形はもはや変化しない。したがって, 十分発達した衝撃波は, 伝ば速度など, 3.3節で示した定常衝撃波に対する関係式を満たす。

図3 衝撃波波形・伝ば速度の時間発展(1)

図4 スリップの有無による定常衝撃波波形の違い

図6 衝撃波波形・伝ば速度の時間発展(2)

図5 定常衝撃波中の気泡の並進速度・液体速度・気泡内平均温度の時間変化

しかし、CASE (A), (B)と CASE (C)では、発達過程においても、定常状態においても衝撃波の波形が大きく異なっている。CASE (A), (B)では、定常状態における衝撃波波頭の圧力は高圧側平衡圧力 P_{H0} より低く、振動の中心が次第に P_{H0} に近づいていく緩和振動を伴っているのに対し、CASE (C)では、衝撃波波頭圧力は P_{H0} よりかなり高く、ほぼ P_{H0} を中心とした緩和振動を伴っている。このように、エネルギーの散逸機構の違いは、衝撃波の内部構造に大きく影響を与え、以上の比較から明らかなように、気泡の膨張・収縮運動に対する気泡の内部現象、特に気泡内熱拡散の影響を単純なモデルに置き換えることは難しいことがわかる。

5.2.2 気泡の並進運動の影響 一方、気液間のスリップがあるとした CASE (A)の場合、気液等速を仮定した CASE (B)と比較して、衝撃波発達段階における衝撃波の伝ば速度は速く、その等温平衡衝撃波の伝ば速度への収束も遅くなっている。また、衝撃波が伝ばするのに従って、CASE (A)の波頭圧力は CASE (B)に比べて低くなっていく。

両者の圧力波形の違いを明確にするために、図4に、

衝撃波がほぼ定常に達したと考えられる、ある特定の位置 [CASE (A) ; $x^*=400$, CASE (B) ; $x^*=200$] で観測される圧力波形の時間変化の比較を示す。CASE (A)の場合、CASE (B)と比較して、衝撃波波頭圧力は低く、背後の緩和領域が長くなっていることがわかる。しかし、緩和領域における圧力の振動の周期など、衝撃波波形の基本的な構造については、CASE (B), (C)の比較でみられたような、気泡の体積変化に対する散逸機構の変化がもたらす違いに比べて、CASE (A), (B)の差は少ない。

図5に、CASE (A)の場合のほぼ定常状態に達したとみなせる位置 ($x^*=400$) に存在する特定の気泡について、気泡周囲の液体速度と気泡自身の並進速度 [図5 (a)], および気泡内部の平均温度 [図5 (b)] の時間変化を示す。図5 (a)中の横直線は、式(25)から求められる平衡液体速度 U_{H0} を表している。

気泡内の温度は、初期の圧縮に伴って上昇するが、熱拡散によって再び周囲液体の温度と一致する。気泡内平均温度が平衡状態に戻るまでの緩和時間は、おおむね無次元時間 t^* で20程度である。

一方、気泡の並進速度 U_g は、最初の急激な速度の立上り時において、 $U_g \approx 3U_l$ の関係を保ちながら変化し、その後、ゆっくりと U_{H0} に漸近していく。しかし、無次元時間 t^* が60に至ってもなお、液体速度と一致していない。CASE (A)と CASE (B)との比較でみられた、伝ば速度の緩和時間や、背後の緩和振動領域の増加は、このように、気泡の並進速度の緩和時間が、気泡内温度の緩和時間に比べて非常に長いことが理由である。

気泡の並進速度の緩和には、液体の粘度が大きく影響する。図6に、液体の粘度を水の100倍としたときの衝撃波の伝ばの様子を示す。液体の粘性係数 μ_l 以外の計算条件は図3の場合と同様であり、ここでも、気

液間のスリップがある場合[CASE (A')]と、ない場合[CASE (B')]の比較を行った。液体の粘度が高いことによって、気泡の体積振動が緩慢になるため、衝撃波背後の緩和振動がほぼ消滅している。一方、伝ば速度・圧力波形ともに、スリップの有無による差は生じず。また、CASE (A')の場合、CASE (A)の場合でみられた、伝ば速度の定常衝撃波に対する緩やかな漸近過程もみられない。

ここで、気泡流中の衝撃波に対して気液の速度差が与える影響について、気泡の並進運動の式(8)をもとに考えてみる。簡単のため、式(8)の中で、実質微分項の対流項と気泡径の変化の寄与は小さいものとする。同式は

$$\begin{aligned} \beta \rho_l \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\partial}{\partial t} (U_g - U_l) \\ = -\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\partial P}{\partial x} - C_D \pi R^2 \rho_l \frac{(U_g - U_l)|U_g - U_l|}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (37)$$

気泡流の運動量保存式(12)についても、ボイド率、対流の影響が小さいと仮定すれば、

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \simeq \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l U_l) \quad \dots\dots\dots (38)$$

式(38)を式(37)に代入し、抗力係数 C_D として近似的にストークスの抵抗法則 $24/Re$ を用いれば、

$$\beta \frac{\partial U_g}{\partial t} - (\beta + 1) \frac{\partial U_l}{\partial t} = -\frac{9\mu_l}{2\rho_l R^2} (U_g - U_l) \quad \dots\dots\dots (39)$$

が得られる。

流速 U_l の変化の時間スケールは、本数値計算例の場合、無次元時間で約5である。これを式(39)に代入し、 τ , L , C_0 を用いて無次元化を行えば、

$$\beta U_g^* - (\beta + 1) U_l^* = -\sqrt{\frac{\rho_l}{P_{L0}}} \frac{45\mu_l}{2\rho_l R_{L0}} (U_g^* - U_l^*) \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。したがって、右辺の係数は、液体の粘性係数に比例し、初期気泡径に反比例する。右辺の係数が小さければ、 U_g^* と U_l^* の間には、

$$U_g^* = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) U_l^* \quad \dots\dots\dots (41)$$

という関係が成立し、十分大きければ、気液間の速度差は生じない。CASE (A), (A')の場合、右辺の係数の大きさはそれぞれ、 4.5×10^{-2} , 4.5 となる。CASE (A)の場合、図5からわかるように、 $\beta = 0.5$ であることを考慮すれば、圧力の急激な上昇時における気泡の並進速度は式(41)の関係に従っている。一方、CASE (A')の場合は気液間のスリップがほとんど生じなくなるため、図6で示したような結果が得られるのである。

る。

並進運動が抑えられる、すなわち、式(40)の右辺の係数のオーダーが1以上になるためには、 μ_l/R_{L0} が約 10^3 となる必要がある。したがって、通常の場合、気泡流中を衝撃波が伝ばしていく過程において、気液間のスリップは存在する。図5から明らかなように、気泡のスリップ速度の減少は緩やかであるため、衝撃波が完全に定常に達するまでには長い助走区間を必要とする。また、式(40)から、無次元緩和距離は初期気泡径が大きくなるほど増大することがわかる。

しかし、気液間のスリップが圧力波形そのものに与える影響ということに限れば、図3, 4からも明らかなように、スリップの有無による差は比較的小さい。結局、気泡流中の衝撃波の緩和構造に対しては、ボイド率が大きくない限り、気泡の体積変動に伴う熱拡散の影響が大きいものと考えられるが、その影響については次報で詳細な議論を行う。

6. 結 論

気泡流中を伝ばする一次元衝撃波の挙動について、関連するパラメータの影響を評価するための数値解析を行った。特に、流れの中に含まれる気泡の内部の密度、圧力、温度分布をそれらを支配する基礎方程式を用いて直接計算によって求めることにより、気泡流に対する気泡の内部現象の影響を正確に評価することを期した。また、気泡流中における定常衝撃波の基本関係を導き、気泡の並進運動に対する、液体粘性・初期気泡径の影響の評価を行った結果、以下の結論を得た。

(1) 気泡流中における衝撃波の伝ば速度は、最終的に等温平衡衝撃波の伝ば速度に等しくなる。また、そのとき波形も定常となる。

(2) 衝撃波の伝ば過程において、気液間のスリップは、液体の粘性係数が十分大きいか、含まれる気泡の気泡径が十分小さくない限り無視できないが、衝撃波波形そのものに与える影響は小さい。

文 献

- (1) Noordzij, L. and van Wijngaarden, L., *J. Fluid Mech.*, **66**(1974), 115.
- (2) 土方・森・清水, 機論, **45**-396(1979), 1179.
- (3) Beylich, A. E. and Gülhan, A., *Phys. Fluids*, **A**, **2**(1990), 1412.
- (4) van Wijngaarden, L., *J. Fluid Mech.*, **33**(1968), 465.
- (5) Nigmatulin, R. I. and Shagapov, V. Sh., *Fluid Dyn.*, **9**(1976), 890.
- (6) 松本・竹村, 機論, **58**-547, B(1992), 645.
- (7) 竹村・松本, 機論, **58**-551, B(1992), 2060.
- (8) Commander, K. W. and Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **85**(1989), 732.

- (9) Kamath, V. and Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **85** (1989), 1538.
 - (10) Prosperetti, A., *J. Fluid Mech.*, **222**(1991), 587.
 - (11) 松本・西川・大橋, 機論, **56**-525, B(1990), 1237.
 - (12) Plesset, M. S. and Prosperetti, A., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**(1977), 145.
 - (13) Zuber, N., *Chem. Eng. Sci.*, **19**(1964), 897.
 - (14) Sangani A., Zhang, D. Z. and Prosperetti, A., *Phys. Fluids*, A, **3**(1991), 2955.
 - (15) Brauer, H. and Mewes, D., *Chem. Ing. Tech.*, **44**(1972), 865.
 - (16) Yabe, T. and Takei, E., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **57**(1988), 2598.
-