FDM-FEM 領域分割法を用いた二次元粘性流体解析*

(効率性と形状適合性について)

菅 野 一 仁*

Two-Dimensional Viscous Flow Analysis Using a FDM-FEM Composite Method (Computational Efficiency and Geometrical Flexibility)

Kazuhito SUGANO

This paper presents numerical analyses for two-dimensional flow problems combining the finite element method, which is best fitted to flow analysis with complex geometry, and the finite difference method, which is economical in computing time and computer storage. Channel flows with a cavity are solved by means of the finite difference method, the FDM-FEM composite method, and the finite element method. Furthermore, the CPU time and memory size are compared. The results obtained show that the FDM-FEM composite method has both computational efficiency and geometrical flexibility. As an application to practical problems, flow in a combustion chamber is calculated.

Key Words: Numerical Analysis, Finite Element Method, Finite Difference Method, Viscous Flow, MAC Method, Composite Grid

1. 緒 言

差分法 (FDM) と有限要素法 (FEM) を組合せた解法は、現在までいくつか研究されてきている⁽¹⁾⁽²⁾。この解法は、FDM-FEM 領域分割法と呼ばれ、差分法と有限要素法の特徴を生かした解法として知られている。つまり、差分法における記憶容量と CPU 時間から成る計算効率性と有限要素法における形状適合性を備えた解法となっている。差分法においては、曲線座標系 (BFC) や複数の格子を用いる方法などによって解かれてきた⁽³⁾⁽⁴⁾。しかし、この方法は、複雑な形状において、格子にひずみができて精度に影響を及ぼすことや格子の形成が複雑になってくるなどの問題がある。有限要素法においては、マトリックスを計算するのに大幅な時間がかかるために計算効率という点において問題が残っている。これらの点を解消するために、中橋は、非圧縮性の物体まわりの流れを差分法と有限要素法を用いて解いている⁽⁵⁾。しかし、この方法は、粘性の強い物体のまわりを差分法で解き、それ以外の領域を有限要素法で解いているので複雑な形状に対しては応用しにくい。また、池川らは、差分法に直交格子を用

いて有限要素法と組合せて解いている⁽⁶⁾。この方法は、複雑な形状に対して、有限要素法を用いているが差分法に対して直交格子を用いているために柔軟性に欠けている面がある。そこで、ここでは、複雑な形状に対して適用でき、差分法にも柔軟性をもたせた解法を提案する。

この解析手法を使って、キャビティを伴った流路の流れを、差分法、有限要素法、FDM-FEM 領域分割法の 3 種類のケースについて解き、その結果を比較して、FDM-FEM 領域分割法の妥当性を検証した。

2. 数 値 解 析 法

FDM-FEM 領域分割法を用いた解法は、高レイノルズ数の流れや乱流に適している差分法で物体近くを解き、それ以外の部分を有限要素法で解く方法と形状適合性にすぐれている有限要素法で物体近くを解き、それ以外を差分法で解く二つの方法に分けられる。ここでは、複雑な形状を考慮するということで、後者の方法を使って、図 1 に示すように複雑な形状領域を有限要素法で計算し、それ以外の領域を差分法で計算するようにした。

具体的な計算方法としては、以下のようにする。まず流れを二次元の非圧縮性非定常流とすると支配方程

* 原稿受付 平成 5 年 2 月 18 日。

*1 正員、鶴見工業高等学校 (〒254 平塚市中原 1-2-19)。

式は、次の連続の式とナビエ・ストークスの方程式で表される。

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (2)$$

差分法における計算方法としては、MAC法に基づいて行うものとする⁽⁷⁾。ここで用いられる圧力に関するポアソン方程式としては、次の式を利用する。

$$\Delta p = -\operatorname{div} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re} \Delta D \quad (3)$$

ただし、 $D = \operatorname{div} \mathbf{v}$ であり、ここでは、式(3)の右辺第3項を零としている。また、時間微分項に対しては、後退差分を用いて次の時間ステップ $n+2$ で連続の式 $D^{n+2} = 0$ を満たすように圧力を求める。このまま差分化して直交格子系で解くよりは、若干の形状適合性をもたせたほうが便利なので式(2)、(3)を曲線座標系に変換した式を差分化しSOR法で解くようにする。

また、有限要素法における計算方法としては、式(2)、(3)を時間に関して前進差分を用いて離散化し、重み関数 u^* 、 p^* を乗じてガレルキン法を用いて重み付き残差方程式を導き部分積分を施す。さらに、圧力の自然境界条件に対して川原らの方法⁽⁸⁾を用いて処理し、3節点一次三角形要素を用いて空間を離散化すると次の有限要素方程式が得られる。

$$\bar{M} \mathbf{v}^{n+1} = \bar{M} \mathbf{v}^n - \Delta t \{ S(\mathbf{v}^n) \mathbf{v}^n - H' P^{n+1} + \frac{1}{Re} D \mathbf{v}^n - F^n \} \quad (4)$$

$$DP^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} H \mathbf{v}^n - K(\mathbf{v}^n) \mathbf{v}^n - \Omega^n \quad (5)$$

ここで、 $\bar{M}$ は集中質量行列、 S 、 H 、 D 、 K は係数行列であり、 F はベクトルを示している。また、 Ω_a は次の式によって表される。

$$\Omega_a = \frac{1}{\Delta t} \int_s N_a \bar{t}_s ds \quad (6)$$

ここで、 N_a は、形状関数である。さらに、自然境界条件 $\bar{t}_s$ は、次の式から求めることができる。

$$\bar{t}_s = -(u^{n+1} - u^n) n_x - (v^{n+1} - v^n) n_y \quad (7)$$

ここで、 n_x 、 n_y は、境界外向き単位法線方向の余弦である。

以上の式(4)、(5)を全節点において重ね合わせることで得られる式を解くことによって解を求めることができる。このときの式(5)の連立方程式の解法には、共役こう配法を用いている。

差分法領域と有限要素法領域の結合方法は、図2に示すように中橋らと同じ方法⁽⁵⁾を用いて、お互いの領域をオーバーラップさせて配置する方法をとる。流速と圧力の未知量は、差分法、有限要素法とも各格子点と三角形の頂点に配置しているので相手の領域の一つ内側の値を用いることによって境界値を決定することができ、互いに独立に計算することが可能となる。計算

図1 FDM-FEM複合格子

図2 FDMグリッドとFEMグリッドの結合

表1 格子点(節点)と要素数

	Grid point (Node point)
Case 1	FDM 60×12 Points
Case 2	FDM 60×10 Points FEM 121 Points 200 Elements
Case 3	FEM 699 Points 1242 Elements

図3 流れ図

手順は、図3に示すようにFEMによって得られた前のステップの値を境界値として次のステップのFDM領域を計算し、この値を使ってFEM領域を計算することができる。以下、この手順を繰返すことによって必要な解を得ることができる。

3. 解析結果

この計算手法の妥当性を示すために、流路内にキャビティをもつ流れを本手法を含めて表1のような3種類の計算方法で解いて比較した。境界条件は、流路の入口と出口に一樣な圧力差 (Case 1 は, $P_{in}=0$, $P_{out}=-5.9$, Case 2 は, Case 1 に同じ, Case 3 は, $P_{in}=0$, $P_{out}=-5.9$ と表面応力 $t_{in}=0$, $t_{out}=5.9$) をかけ、壁面では, no-slip 条件を用いた。格子 (メッシュ) は、低レイノルズ数流れの比較なので図4に示すように粗くなっている。図5には、 $t=10$ sにおける各ケースについての流速ベクトルを示した。ケース1 (FDM) は、曲線座標系を使っているがキャビティ内では、格子数が少ないために、格子数を増やすか必要な部分に集中させない限り解像度が上がらない。しかし、渦ができていることは理解できる。また、ケース2 (FDM-FEM)、ケース3 (FEM) では、はっきりと渦ができていることがわかり、形状適合性にすぐれているために妥当な結果が得られている。図6は、各ケースにおける $x=2.4$ での水平速度成分 U について比較したものであるが比較的良好一致している。表2は、各ケースについ

て、CPU 時間と記憶容量を比較したものである。ケース1 (FDM) は、非常に効率的な解法であるために少ないCPU時間と記憶容量である。また、ケース3 (FEM) は、計算効率からいうと要素マトリックスを作り全体に重ね合わせなければならないので多くのCPU時間と記憶容量を必要とする。これに対して、ケース2 (FDM-FEM) は、ケース3に比べて大幅に(10倍以上)計算速度が上がり記憶容量も減らすことができる。図7は、FDMにおける格子点とFEMにおける節点の比率の違いによって、FDMとFEMのCPU時間比を示したものである。横軸と縦軸は、それぞれ次のように定義する。

$$N_{RATE} = \frac{N_{FDM}}{N_{FEM} + N_{FDM}} \dots\dots\dots (8)$$

$$T_{FDM} = \frac{FDM \text{ CPU TIME}}{FEM \text{ CPU TIME} + FDM \text{ CPU TIME}} \dots\dots\dots (9)$$

$$T_{FEM} = \frac{FEM \text{ CPU TIME}}{FEM \text{ CPU TIME} + FDM \text{ CPU TIME}} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 N_{FDM} , N_{FEM} は、FDMの格子点数とFEMの節点数を表している。また、FDM CPU TIME は、1ステップ当たりのFDMにおけるCPU時間を表すものとする。図7から計算時間は、大きくFEMに依存していることがわかり N_{RATE} が1に近づくことによ

(a) ケース1 (FDM グリッド)

(b) ケース2 (FDM-FEM グリッド)

(c) ケース3 (FEM グリッド)

図4 キャビティを伴った流路の格子

(a) ケース1

(b) ケース2

(c) ケース3

図5 キャビティを伴った流路の速度ベクトル ($Re=100$)

て計算効率が大幅に上がっていることが理解できる。しかし、反面形状適合性は、若干減少していく。図8は、FDM-FEM領域分割法を用いて、キャビティ内に有限要素法で、 21×21 節点、800 要素に分割し、流路を差分法の曲線座標系で 120×60 格子点に分割する高レイノルズ数流れ用の格子図を示したものである。図9は、速度ベクトルと圧力分布を示したものであるが、いずれのオーバーラップ部分もなめらかにつながっている。

本論文で提唱した、FDM-FEM領域分割法の実用性を示すために図10に示すような燃焼器の内部流れを解くことにする。ただし、形状は、ある程度簡略化

されているものとする。この問題を解こうとすると、従来は、差分法を用いるか有限要素法を用いるかであった。差分法で解く場合は、直交格子だと境界条件やプログラムが複雑になってくる。また、曲線座標系だと格子の切り方の問題がでてくる。有限要素法を用いれば簡単に求めることができるが実用性を考えると若干問題がある。そこで、図11に示すように有限要素法による計算領域(各300節点、512要素)二つと差分法による計算領域(111×60 格子点)一つの計三つに分割

表 2 1ステップ当たりのCPU時間と記憶容量の比較
(HITAC M-660 H)

	CPU time/1 step	Memory size
Case 1	0. 0 4 sec	0. 0 8 MB
Case 2	0. 3 2 sec	0. 1 4 MB
Case 3	4. 7 0 sec	0. 2 3 MB

図 6 $x=2.4$ での水平速度成分

図 7 FDM と FEM の比率による CPU 時間の比較

図 8 高レイノルズ数流れ用の格子

(a) 速度ベクトル

(b) 圧力分布

図 9 キャビティを伴った流路の流れ ($Re=100$)

図 10 燃焼器の解析モデル

図 11 燃焼器解析用の格子

図 12 燃焼器の流れと圧力分布

して、格子を切ることによって効率的で形状適合性にすぐれた格子となる。また、内部領域の壁面 ($u=v=0$) においては、有限な薄い壁が存在するとして格子を切っている。境界条件は、入口と出口に一樣な圧力差 ($P_{in}=0, P_{out}=-0.55$) をかけ、壁面では、流速を零とした。図 12 は $Re=100$ における速度ベクトルと圧力分布の計算結果を示した。図 12(a) より差分法で計算した領域のくびれ部分において流速が速くなり、広がり部において流速が遅くなっているのが理解できる。また、有限要素法で計算した領域において、広がり部で流速が遅く、細部で速くなっている。さらに、図 12(b) の圧力分布図において、くびれ部の等圧力線が密になり圧力減少が起こり、広がり部において圧力の変化が緩慢になっている。また、有限要素法の計算領域においては、広がり部と細部で圧力の減少が著しくなっていることが理解できる。

4. 結 論

FDM-FEM 領域分割法を粘性流体に用いることによって、差分法がもっている効率性と有限要素法がもっている形状適合性を備えた解法を提案した。この解法をキャビティを伴った流路に適用し、複雑な部分に形状適合性を備えた有限要素法を用い、残りの部分に効率性を備えた差分法が適用できることを示した。また、この方法の計算速度は、有限要素法に大きく依存しているので有限要素法の効率性を上げることによっ

て FDM-FEM 領域分割法の効率が上げられることが確認できた。さらに、複雑な形状をもった燃焼器を、この方法で解くことによって実用性を示すことができた。

今後、高レイノルズ数流れや非定常流なども検討していく予定である。さらに、差分法と有限要素法が互いに独立に計算することが可能であるので複数プロセッサを備えた並列コンピュータ向きの解法に検討していくことが必要となる。

最後に、本研究を行うのにあたって福井大学工学部機械工学科の川端信義助教授から貴重な資料をいただいたことに対して謝意を表する。

文 献

- (1) Nakahashi, K. and Obayashi, S., *AIAA Paper*, 87-0604 (1987).
- (2) 池川・ほか 2 名, 第 4 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 439-442 (1990).
- (3) Thompson, J. F., ほか 2 名, *J. Comput. Phys.*, 15-3 (1974), 299-319.
- (4) 保原・大宮司, 数値流体力学, (1992), 192, 東京大学出版会.
- (5) Nakahashi, K., ほか 3 名, *AIAA Paper*, 87-1315 (1987).
- (6) 池川・ほか 2 名, 第 5 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1991), 549-552.
- (7) 川端, 145 回機習教, (1986), 37.
- (8) 林・川原, 第 3 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1991), 185-188.