任意形状の振動翼列に働く非定常空気力に関する研究*

(第2報, 断面変形を伴って振動する二次元非圧縮翼列)

小林 孝雄^{*1}, 中山 透^{*2}, 高田 浩之^{*3}

A Study on Unsteady Aerodynamic Characteristics of Oscillating Cascades with Arbitrary Blade Profiles

(2nd Report, Two-Dimensional Cascades Oscillating with Blade Section Deformation)

Takao KOBAYASHI, Tohru NAKAYAMA and Hiroyuki TAKATA

Aerodynamic characteristics of oscillating cascades of blades accompanied with elastic deformation of blade sections in a uniform incompressible flow are predicted numerically. Unsteady formulation is based on a small perturbation approach with use of potential equations expressed on a moving computational grid. The governing equations are discretized by the finite element method. Modal shapes of blade oscillation are obtained first and a parametric study on unsteady aerodynamic characteristics is conducted for the two-dimensional cascade of the tip section of a test compressor. Furthermore, the oscillation displacement of the blades is divided into four components, i. e., two translational components (normal and tangential to the blade chord), a rotational component, and a section-deformation component, in order to analyze the contribution of each component to unsteady aerodynamic work which causes flutter excitation. It is shown that the effect of the blade section deformation is very significant in determining the unsteady characteristics of oscillating cascades.

Key Words: Unsteady Flow, Numerical Analysis, Cascade Flutter, Oscillating Cascades, Unsteady Aerodynamic Characteristics

1. ま え が き

一般に軸流圧縮機や軸流タービンの翼列翼が流体中で振動するとき, その振動は三次元的であり, しかも同時に翼断面の変形を伴っているのが普通である。しかし, フラッタの研究において, 翼を剛体として扱った報告は多くなされているが, 翼の断面変形を考慮した例はわずか^{(1)~(3)}である。

本研究は, 二次元翼列翼が一様流中で断面変形を伴って微小振動する場合に, それに働く非定常空気力を数値計算によって求め, そのフラッタ特性を調べようとするものである。二次元翼列翼の振動変位は計算対象として選んだある三次元翼列翼の振動モードを計算し, その翼端断面振動変位をとることによって求めた。ただし, 流れは非粘性, 非圧縮, 渦なしとし, 速度ポテンシャルを導入する。数値計算には翼振動に伴って変動する移動格子を用い, 非定常計算の精度向上を図った。

2. 支配方程式

翼は剛体的な並進振動や回転振動だけでなく, 断面変形を含む微小な振幅の調和振動(角振動数 ω)を行うものとする。物理空間 (x, y) における非圧縮ポテンシャル流れの支配方程式は, 速度ポテンシャルを ϕ とするとき, $\nabla_{xy}^2 \phi = 0$ である。空間を格子に分割し, その格子も翼の振動に伴って微小な振幅の調和振動を行うものとする。一方, 各格子点とともに移動する座標系 (X, Y) を考え, それを計算空間とする。計算空間上の各格子点座標を物理空間における振動の平均位置座標と一致させると, (x, y) 座標と (X, Y) 座標の関係は, 格子点の振動振幅の各方向成分を ζ_x, ζ_y とすると,

$$x = X + \zeta_x e^{i\omega t}, \quad y = Y + \zeta_y e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。これより,

$$\nabla^2 \zeta_x = 0, \quad \nabla^2 \zeta_y = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

を満たすような ζ_x, ζ_y の分布を仮定すれば, 計算空間における支配方程式は総和規約(Einsteinの規約)を用いて,

$$\nabla^2 \phi - 2(\phi_{,j} \zeta_{,i})_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。なお, 上式で i, j は座標成分を表し,

$$(X_1, X_2) = (X, Y), \quad ()_{,i} = \partial() / \partial X_i,$$

* 原稿受付 平成5年1月25日。

*¹ 正員, (株)東芝 (〒210 川崎市幸区堀川町580-1)。

*² 神奈川県警察科学捜査研究所 [元: 東海大学大学院] (〒231 横浜市中区山下町54)。

*³ 東海大学工学部 (〒259-12 平塚市北金目1117)。

$$(\quad)_{,ij} = \partial^2(\quad)/\partial X_i \partial X_j$$

とする。

ここで、速度ポテンシャル ϕ を定常成分 $\bar{\phi}$ と微小な非定常成分 $\phi' e^{i\omega t}$ の和と考えると、 $\bar{\phi}$ 、 ϕ' の支配方程式はそれぞれ、

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\nabla^2 \phi' = 2(\bar{\phi}_{,ij} \zeta_{j,i})_{,i} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。この支配方程式の導出に当たっては二次の微小量を省略した。ここでの ϕ' は物理空間における移動格子点上のポテンシャルの非定常成分であり、本方法によれば、既報⁽⁴⁾の固定格子点上の非定常ポテンシャル ϕ' を用いる方法で、 $\bar{\phi}$ の二階微分の存在により非定常圧力分布に誤差が顕著に現れるという計算精度上の困難を解消し、また、 $\bar{\phi}$ の二階微分を回避した変形ポテンシャル ϕ'' を用いる方法において、変位が剛体的な並進と回転、あるいはその合成振動モードに限定されるという制約を取り除き、任意の断面変形を伴う振動モードに対する非定常計算を精度よく行うことができる。ちなみに、並進振動と回転振動のみの典型的な問題に対し、本報による計算結果と上述の ϕ'' による計算結果との一致は良好であった。

3. 計 算 方 法

支配方程式の離散化には有限要素法を用いる。計算格子としては、翼前縁付近の形状に適合するよう C 形格子を採用することとし、ポアソン方程式を用いて数値的に生成した。また、翼面境界近傍では格子幅、格子角度の制御を行っている(図1)。

3.1 定常計算 ここでは、速度ポテンシャル ϕ の定常成分 $\bar{\phi}$ を求めるとともに、繰返し計算によっ

て後流面を決定することを目的としており、その結果はそのまま非定常計算のベースとして用いられる。境界条件は、既報⁽⁴⁾と同様である。

3.2 変位分布計算 式(5)の右辺に現れる振動変位 ζ_x 、 ζ_y の分布は、先に仮定した式(2)を解くことにより求める。その境界条件(図2)としては、まず翼面上の変位は翼の振動モードにより与えられる変位分布とし、周期境界、上流境界、下流境界では変位を零とする。後流面 CE 上の変位は、翼後縁および下流点 E においてそれぞれの変位と滑らかにつながるように与える。これは、式(5)に現れる変位の一階微分の急激な変化を回避し、 ϕ' の変化を滑らかにするためであって、翼後縁近傍では特に重要である。

3.3 非定常計算 翼が振動している場合にも周囲の流れは翼面を過ぎることはない。この条件を翼表面の境界条件とする。つまり、計算空間において反変速度の翼面法線方向成分は零である。この反変速度を速度ポテンシャルで表し、さらに定常成分と非定常成分に分けると、非定常計算の翼面境界条件として次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n} - \bar{\phi}_{,i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} = \bar{\phi}_{,j} \zeta_{j,i} n_i + i\omega \zeta_i n_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 n_i は外向き法線方向余弦である。

周期境界 AG, BD, 後流面 CF, 上流境界 AB, 下流境界 DEFG の条件は既報⁽⁴⁾と同じ考え方で与える。

翼列中の各翼の振動の翼間位相差を β (背側翼位相進み正)とすると、境界 AG, BD は位相差 β を有す

表 1 翼列諸元
(NACA65 系圧縮機翼, 翼厚 10%, 翼高さ 90 mm)

Section	Solidity σ	Stagger angle ξ	Camber angle ϕ	Chord length c
Tip	0.69	53.6°	17.6°	30.0mm
Mean	0.98	44.6°	21.2°	35.0mm
Root	1.43	27.2°	35.1°	40.0mm

図 1 計算格子 [翼端断面, NACA65-(CA17.6)10, $\xi=53.6^\circ$, $\sigma=0.69$]

図 2 計算領域

図 3 翼列翼の振動モード

図 4 翼端断面振動特性
(おのおの, 最大変位を翼弦長の 7% で表示)

る周期境界である。

$$\phi'_u = \phi'_{ie^{i\theta}} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} - \bar{\phi}_{,i} \frac{\partial \xi_i}{\partial n} \right)_u + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} - \bar{\phi}_{,i} \frac{\partial \xi_i}{\partial n} \right)_l e^{i\theta} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

後流面 CF 上ではそれに沿って翼後縁でのポテンシャルジャンプ $\Delta\phi'_{TE}$ が後流面上定常速度 $\bar{u}_w$ により運ばれる。

$$\phi'_+ - \phi'_- = \Delta\phi'_{TE} \exp\left(-i\omega \int \frac{ds}{\bar{u}_w}\right) \dots\dots\dots (9)$$

ここで積分は後流面に沿って行う。翼後縁でのポテンシャルジャンプは、非定常的にも後縁上下に圧力差がないという非定常のクッタの条件を用いて決定する。また、後流面上法線方向速度成分の連続より次式を得る。

$$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} - \bar{\phi}_{,i} \frac{\partial \xi_i}{\partial n} \right)_+ + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial n} - \bar{\phi}_{,i} \frac{\partial \xi_i}{\partial n} \right)_- = 0 \dots\dots (10)$$

上流境界 AB 付近の ϕ' は y 方向には翼列 1 ピッチ間で位相が β だけ進むような周期関数であり、 x 方向には上流に向かって指数関数的に減衰する。

$$\phi' = \sum_m C_m \exp(|\hat{\beta}_m| x + i\hat{\beta}_m y) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\hat{\beta}_m = (\beta + 2\pi m)/s$ で、 m は整数、 s は翼列ピッチである。また C_m は未知定数である。この式を用いて ϕ' と $\partial\phi'/\partial n$ との関係式を導き上流境界における境界条件とする。

翼から 5 翼弦長程度遠くに設定した下流境界 DEFG 付近での ϕ' は、既報⁽⁴⁾ の検討結果を考慮し、後流面上の非定常渦(ポテンシャルジャンプ)により誘起される成分 ϕ'_w のみに基づいて下流境界条件を設定する。

翼面上の非定常圧力 p'_s はベルヌーイの式より導かれる次式を用いて求められる。

$$\frac{p'_s}{\rho} = \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \bar{\phi}_{,i} \left(\phi'_{,i} - \xi_{i,i} \bar{\phi}_{,j} - \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 ρ は流体の密度である。

4. 翼の振動特性

計算例の対象としては、翼厚 10% の NACA65 系圧縮機翼を備えたある低速軸流圧縮機の動翼列を採用した。翼列諸元を表 1 に示す。翼高さは 90 mm である。翼厚が翼高さや翼弦長に比べて小さいことを考慮し、厚肉シェルの理論を用いて翼列翼の根元固定で振動解析を行った。離散化には有限要素法を用い、要素としては 8 節点アイソパラメトリック要素を用いて、翼弦方向 4 要素、スパン方向 6 要素に分割した。得られた固有振動数と振動モード(一次から十次まで)を図 3 に示す。

本研究では、そのうちの翼端断面に着目して非定常空気力を二次元的に計算する。翼端断面は大部分の振動モードにおいて振動変位が他の断面に比べて最も大きく、また断面変形が最も顕著に現れるところである。各振動モードにおける翼端断面の振動変位分布を図 4(a) に示す。最小二乗法を用いて振動変位 ξ を並進成分[翼弦に垂直方向成分 ξ_N (翼背面方向正)、翼弦方向成分 ξ_T (翼後縁方向正)]、回転成分 ξ_R (回転角 α [°]: 翼重心まわり、頭下げ正)、断面変形成分 ξ_b (最大変位 $|\xi_b|_{\max}$ で表す)に分離した結果を表 2 に示す。ただし、変位の大きさは各モードに対し最大振幅点における変位を翼弦長 ($c=1$) の 1% として正規化したものである。また、断面変形成分のみの分布を図 4(b) に示す。

5. 計算結果および考察

5・1 定常計算 入射角 $i=0^\circ$ の場合の翼面上定

表 2 振動変位の成分分離

Mode	$\xi_N \times 10^{-3}$	$\xi_T \times 10^{-3}$	$\alpha^\circ \times 10^{-1}$	$ \xi_b _{\max} \times 10^{-3}$
1	8.638	2.730	0.233	0.723
2	8.092	-3.154	-0.711	1.422
3	0.831	0.572	6.538	2.623
4	4.868	5.281	-4.098	0.758
5	3.106	-1.815	-8.425	3.019
6	2.579	-0.608	4.564	2.936
7	2.115	0.044	-7.994	4.179
8	2.536	0.596	4.641	2.811
9	0.400	-3.736	1.577	10.621
10	1.590	0.129	-6.551	5.098

図 5 翼面上定常圧力分布(翼端断面)

常圧力分布を図5に示す。ここに圧力係数 $\bar{C}_p$ は圧力を上流動圧 $\rho U^2/2$ で無次元化したものである。以下、本論文では非定常計算のベースとする定常流はすべてこの入射角 $i=0^\circ$ の場合に限っている。

5・2 非定常計算 翼列の非定常計算に必要なパラメータは、各振動モードに対する翼列翼の翼間振動位相差 β 、および無次元振動数 $k(=\omega c/2U, \omega$: 角振動数, c : 翼弦長, U : 上流一様流流速) である。

非定常空気力が翼振動の1周期の間に翼になす仕事(非定常仕事)がフラッタ特性を決定する。すなわち、 $W = \oint_s \pi(\xi_i n_i) p' ds$ とすると、その虚数部 $\text{Im}(W)$ がその仕事に相当する。ただし、 n_i は翼面上の内向き(解析領域からみて外向き)法線方向余弦であり、積分は翼面に沿って行うものとする。ここでの計算では翼の振動変位 $\xi_i e^{i\omega t}$ を時間変動の位相の基準と考え、 ξ_i を実数としている。なお、 W を翼面最大振幅点における最大変位 $|\xi|_{\max}$ を用いて無次元化し、 C_w を次のように定義するとともに、以下、 $\text{Im}(C_w)$ を非定常仕事係数と呼ぶこととする。

$$C_w = W / \left(\frac{\pi}{2} \rho U^2 |\xi|_{\max}^2 \right) \dots\dots\dots (13)$$

振動モード1, 2, 3, 4に対する非定常仕事係数 $\text{Im}(C_w)$ と翼間振動位相差 β との関係を図6に示す。無次元振動数 k が小さくなっていくとき、最初に Im

(C_w) が負から正に移り変わるのは、振動モード1, 2の場合には $\beta=300^\circ$ 付近であり、振動モード3, 4の場合には $\beta=60^\circ$ 付近である。この β を限界翼間振動位相差 β_c と呼ぶことにする。

振動モード1から10までの全モードに対する非定常仕事係数 $\text{Im}(C_w)$ と無次元振動数 k との関係を図7に示す。 $\text{Im}(C_w)$ の k に対する変化の様子は、振動モード1と2で同様な変化を示している。これは、振動モード1, 2が同様な振動変位分布[図4(a)]をもっていることと対応している。振動モード6, 8および5, 7, 10についてもそれぞれ同様である。無次元振動数 k を小さくしていくとき、限界翼間振動位相差 β_c において非定常仕事係数 $\text{Im}(C_w)$ が負から正に移り変わる k を限界無次元振動数 k_c と呼ぶことにする。

表3に振動モード1から10における β_c と k_c を示す。

5・3 各変位成分の非定常仕事への寄与 非定常

表3 各振動モードに対する β_c と k_c

Mode	β_c	k_c	Mode	β_c	k_c
1	300°	0.060	6	300°	0.235
2	300°	0.150	7	60°	0.235
3	60°	0.200	8	300°	0.200
4	60°	0.120	9	60°	0.090
5	60°	0.230	10	60°	0.230

図6 非定常仕事の β に対する変化

(a) Mode 1

(b) Mode 2

(c) Mode 3

(d) Mode 4

(e) Mode 5

(f) Mode 6

(g) Mode 7

(h) Mode 8

(i) Mode 9

(j) Mode 10

図7 非定常仕事の k に対する変化 (a) Mode 1 ($k=0.05$, $\beta=300^\circ$) (b) Mode 2 ($k=0.15$, $\beta=300^\circ$) (c) Mode 3 ($k=0.2$, $\beta=60^\circ$) (d) Mode 4 ($k=0.1$, $\beta=60^\circ$) (e) Mode 6 ($k=0.2$, $\beta=300^\circ$)

図8 フラッタ限界近傍での成分非定常仕事

計算の結果, ある場合には $\beta=60^\circ$, ある場合には $\beta=300^\circ$ でフラッタに入るという顕著な相違が得られた。そこで, 翼の各振動モードの変位を各種の剛体的な変位と翼断面の変形を伴う成分(これを断面変形成分と呼ぶことにする)とに分離し(表2), 各変位成分ごとの非定常仕事を求め, それらがどのようにフラッタに寄与しているかを調べることによってその原因を明らかにすることを試みる。

非定常圧力は重ね合わせが可能であり, 各振動モードの変位分離により得られた並進(翼弦に垂直方向および翼弦方向), 回転(翼重心まわり), 断面変形の各振動成分により誘起される非定常圧力場 p'_N, p'_T, p'_R, p'_D の和として求めることができる。そして, そのそれぞれの圧力場の中で翼は上記のそれぞれの成分をもった振動を行うのであるから, 非定常仕事 W は次のような16種類の成分非定常仕事に分解できる。

$$W = \sum_{I,J} W_{IJ}, \quad W_{IJ} = \oint_s \pi(\zeta_i n_i) p'_{I} ds$$

$$(I, J = N, T, R, D) \dots\dots\dots (14)$$

ここで, 添字 N, T, R, D はそれぞれ翼弦に垂直方向の並進振動, 翼弦方向の並進振動, 回転振動, 断面変形振動を表す。また, 成分非定常仕事 W_{IJ} の第1

添字は非定常圧力場の成分を, 第2添字は振動変位成分を表す。例えば, W_{DN} は断面変形振動によって誘起される非定常圧力場中で翼が翼弦に垂直方向の並進振動を行うことによって発生する成分非定常仕事である。

振動モード1, 2, 3, 4および6における β_c と k_c 付近の条件において非定常仕事の各成分への分離を行った結果を図8に示す。 $\beta=300^\circ$ でフラッタに入る振動モード1, 2ではフラッタに寄与している非定常仕事の主成分は圧倒的に W_{DN} であることがわかる。逆に

図9 成分非定常仕事の k に対する変化

図10 各変位成分に対する翼面非定常圧力分布
(Mode 1, $k=0.05$, $\beta=300^\circ$)

最もフラッタを減衰させようとするのは W_{NN} である。モード6においてもフラッタに寄与する非定常仕事の主成分は圧倒的に W_{DN} である。

$\beta=60^\circ$ でフラッタに入るモード3では、フラッタに寄与する非定常仕事に特に卓越した成分はみられないが、剛体的変位に起因するものが断面変形成分に関連するものよりも大きい。また、モード4では W_{RN} がフラッタに寄与している主成分であり、逆にフラッタを減衰させようとするのは W_{NN} がその主たるものである。これらにおいては従来の断面変形を考慮しない剛体変位のみに基づく非定常仕事が主役を演じている。

振動モード1における $\beta=60, 300^\circ$ のときの非定常仕事の各成分の k に対する変化の様子を図9に示す。図9中の記号 $I-J$ ($I, J=N, T, R, D$) は式(14)の I, J に相当し、 I は非定常圧力場の成分を、 J は振動変位成分を表す。なお、図9では、全体の非定常仕事特性を左右しない程度に小さい成分非定常仕事は省略してある。

モード1では並進変位成分が卓越しているため、非定常仕事特性に対する W_{NN} の寄与は大きい。それとともに W_{DN} の k に対する変化の様子が非定常仕事特性に対し重要な役割を果たしており、非定常仕事の k に対する振舞いは、この場合、 W_{NN} と W_{DN} によってほぼ決定されることがわかる。つまり、 $\beta=60^\circ$ の場合には、 W_{DN} は k が小さくなるに従って減衰側に作用する割合が大きくなっているのに対し、 $\beta=300^\circ$ では W_{DN} は k が小さい場合にも他の成分非定常仕事に比べて大きな正の値を保っており、これがフラッタに寄与していることになる。

振動モード1の分離された各振動成分により誘起される、無次元振動数 $k=0.05$ 、翼間位相差 $\beta=300^\circ$ の場合の翼面非定常圧力分布を図10に示す。ここで、非定常圧力係数 C_p は次のように定義した。

$$C_p = p'_s / \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \frac{|z|_{\max}}{c} \right) \dots\dots\dots (15)$$

振動モード1では、翼弦垂直方向の並進成分が卓越しているため、それによる非定常圧力 $\text{Im}(C_p)$ が大きいのはもっともであるが、それと同時に断面変形成分により誘起される $\text{Im}(C_p)$ も同程度の大きさを有しており、このために図8(a)にみられるように非定常仕事

事 W_{DN} が卓越する結果となっている。また、翼背側および腹側の $\text{Im}(C_p)$ は、図10(a)と図10(d)とでそれぞれ正負が逆であり、これからも図8(a)の成分非定常仕事 W_{NN} 、 W_{DN} の振舞いを理解することができる。

以上のことから、断面変形成分により誘起される非定常圧力場 p'_d の中で翼弦に垂直方向の並進振動を行う場合の非定常仕事成分の振舞いが、フラッタの特性に大きな影響をもつことがわかり、このことが振動モード1, 2, 6, 8で $\beta_c=300^\circ$ となった主要因であることがわかる。この場合、翼列翼は翼弦に対して垂直方向に並進変位すると同時に、翼後縁にはそれと同方向に折れ曲がるような断面変形が生じている。モード6では一見して回転振動成分も大きいようにみえるが、この場合でも β が 300° でフラッタに入るのは断面変形に基づく非定常圧力場 p'_d 中で翼弦垂直方向へ変位することによるものであって、 p'_d の中で回転変位はむしろフラッタ減衰側に働いている。

6. む す び

三次元翼列翼の振動解析によって得られる固有振動モードの翼端断面変位分布に着目し、断面変形を伴って一様流中で微小振動する二次元翼列翼の非定常空気力を移動格子を用いた数値計算法によって求めた。その結果、以下のことが明らかになった。

(1) 各振動モード間で限界翼間振動位相差 β_c が 60° と 300° の2種類に分かれるという顕著な相違がみられた。

(2) 非定常仕事を振動変位の各成分に対応して16種類の成分に分解して調べた結果、断面変形成分がフラッタ特性の決定に重要な役割を果たしていることが明らかになった。限界翼間振動位相差 β_c が通常と異なって 300° となるのは、翼が翼弦に対して垂直方向に並進変位すると同時に、翼後縁にそれと同方向に折れ曲がるような断面変形が生じている場合である。

文 献

- (1) 今成・梶, 機論, 53-496, B(1987), 3586.
- (2) Verdon, J. M., *J. Fluid Struct.*, 3-3(1989), 255.
- (3) 利光・難波, 機論, 58-545, B(1992), 145.
- (4) 小林・高田, 機論, 55-509, B(1989), 135.