非定常翼理論とふれまわり遠心羽根車に働く非定常流体力*

正 司 秀 信^{*1}Explanation of Unsteady Forces Acting on a Whirling Centrifugal Impeller
by the Classical Unsteady Airfoil Theory

Hidenobu SHOJI

According to the classical unsteady airfoil theory, unsteady forces of an airfoil with steady loading consist of four terms: the quasi-steady term, the wake effect term, the apparent mass term and the term due to the interaction of steady vortices and unsteady velocities. In the present paper, unsteady airfoil theory is applied to a whirling centrifugal impeller. Its geometrical shape is simplified in order to neglect the effects of adjacent blades and to use the linear boundary conditions. The components of unsteady forces parallel and normal to the eccentricity F_r , F_θ can be derived from the above-mentioned terms in a very simple way. From these results, the physical meaning of the whirling forces is easy to understand. This is a typical example to show the availability of analytical solutions.

Key Words: Potential Flow, Unsteady Flow, Fluid Force, Pump, Flow-Induced Vibration

1. 緒 言

ターボ形流体機械は高い流体性能が要求されるだけでなく、その軸系が振動に対して安定であることも不可欠である。特に最近の小形高速化に伴い軸の一次危険速度以上の回転数を常用回転数とする場合がふえてきており、そのような場合、振動解析に際して軸の各部が周囲の流体から受ける流体力の見積もりが重要になる。こうした観点から遠心羽根車自身にかかる非定常流体力の研究が最近盛んである。ベーンレスディフューザ中でふれまわる場合の理論および実験的研究^{(1)~(3)} ガイドベーンの影響を調べた研究⁽⁴⁾、ポリュートケーシング中でふれまわる場合の研究⁽⁵⁾ などがある。いずれの場合も理論解析結果と実験結果は定性的によく一致している。

理論解析の多くは特異点法による数値解析であり、直線翼列に対して古くから行われてきた手法を用いている。円形翼列の場合には、各羽根が直線でないこと、後縁から流出する自由渦の軌跡が、羽根車の回転の影響により羽根車のまわりを旋回することなどにより、直線翼列の場合よりかなり複雑となり得られた結果の

定性的理解を困難にしている。

本研究は単純化した形状の円形翼列に対して、単独翼非定常理論の結果を適用することにより、定性的に非定常力の性質を説明しようとするものである。

2. 記 号

b : 半翼弦長
 d : 羽根幅
 F : 流体力
 f : 無次元化した流体力
 i : 場所に関する虚数
 j : 時間に関する虚数
 k : 無次元振動数
 r_1 : 羽根車内半径
 r_2 : 羽根車外半径
 U_s : 定常流速
 u : 非定常流速
 z : 位置を表す複素数
 β : 半径と羽根のなす角
 Γ_s : 定常循環
 γ : 非定常循環, 渦分布
 ε : 偏心量を表す複素数
 ν : 角速度

* 原稿受付 平成5年3月12日.

^{*1} 正員, 筑波大学構造工学系(〒305 つくば市天王台 1-1).

ρ : 流体の密度

Φ : 速度ポテンシャル

ϕ : 流量係数

Ω : ふれまわり角速度

ω : 羽根車回転角速度

3. 非定常翼理論

Karman, Sears らの古典的な単独翼非定常理論⁽⁶⁾⁽⁷⁾によると、一様流中で振動する迎え角零の平板翼(図1)の非定常特性は

$$L = \rho U b u_0 e^{j\omega t} 2\pi [C(k) + 0.5jk] \cdots \cdots (1)$$

ここに $k = \omega b / U$ は無次元振動数, $C(k) = K_1(jk) / [K_0(jk) + K_1(jk)]$ は Theodorsen 関数と呼ばれ図2に示すような関数である(K_0, K_1 は変形されたベッセル関数, j は時間に関する虚数). 式(1)の右辺は定性的に二つの項に分けられ第1項は準定常項と後流の渦の影響による項の和, 第2項はポテンシャルの時間微分 $\partial\Phi/\partial t$ による項で, いわゆる付加質量による項である. 図3は無次元化した非定常揚力 $L/2\pi\rho U b u_0 e^{j\omega t}$ のベクトル表示である.

Horlock⁽⁸⁾は定常迎え角のある状態での, 周期的ガスト変動の場合の特性を解析している. その結果を参考に流れ方向の一様変動(図4)の場合の解析を行うと

$$L = \rho U b u_0 a e^{j\omega t} 2\pi \left[\begin{array}{ccc} C(k) & +0.5jk & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{準定常項} & \text{付加質量} & \text{定常循環と} \\ \text{と後流の} & \text{による項} & \text{非定常流速} \\ \text{影響によ} & & \text{の干渉項} \\ \text{る項の和} & & \end{array} \right] \cdots \cdots (2)$$

これは式(1)に1項だけ加わった形をしており, この

図1 垂直方向一様変動
(迎え角0)

図2 Theodorsen 関数 $C(k)$ のベクトル表示

項が定常循環の影響による項である.

付加質量の項は変化しないことを考慮に入れて, それ以外の項についてのみ求めることにすると, 働く力は ρ (密度) $\times U$ (流速) $\times \Gamma$ (循環)で計算される. U および Γ を定常項と微小な非定常項の和と考えると

$$U = U_s + u(t)$$

$$\Gamma = \Gamma_s + \gamma(t)$$

$$\rho U \Gamma = \rho (U_s + u)(\Gamma_s + \gamma)$$

したがって

$$\rho U \Gamma = \rho U_s \Gamma_s + \rho (U_s \gamma + \Gamma_s u) + \rho u \gamma \cdots \cdots (3)$$

上式の第1項は定常項をあたえる. 第3項は微小項の積なので, 他の項より値が小さく無視して考える. 第2項が非定常項であり $\rho U_s \gamma$ が式(2)における第1項 $C(k)$ すなわち準定常項と後流渦の影響の和に対応し, $\rho \Gamma_s u$ が第3項すなわち定常循環と非定常流速の積による力に対応する.

上述の場合は非定常流速が一様流の方向を向いていたが一般的にはそうはならない. 図5のように一様流の方向とは異なる非定常流速変動成分がある場合, 平板には一様流 U_s により定常循環 Γ_s が生じ, u の平板に垂直方向成分 u_n に比例した非定常循環 γ が生じ

図3 一様変動の場合の無次元揚力のベクトル表示

図4 流れ方向一様変動
(迎え角 α)

図5 一般的な一様変動
(迎え角 α)

る。このとき、働く力は各項ごとに方向が異なる。

第1項 $\rho U_s \gamma$: U_s に垂直に働く

第2項 付加質量の項: 加速度の大きさに比例し
平板に垂直に働く

第3項 $\rho \Gamma_s u$: u の方向に垂直に働く

以上のような古典的な非定常翼理論の考え方、結果をもとにふれまわり遠心羽根車に働く力の性質を定性的に説明することを試みる。

4. ふれまわり遠心羽根車に働く流体力

4.1 ふれまわり遠心羽根車 ふれまわりながら回転する遠心羽根車の回転軸の振動を、円軌道上をふれまわる場合と限定すると、軸直交断面上の羽根車の振動は図6のように表される。反時計方向に ω で回転する羽根車の中心 O は、絶対中心 O' のまわりに偏心 ε (微小) の円軌道上を角速度 Ω でふれまわる。

羽根車が周囲の境界条件の影響を受けなければ、ふれまわりのない状態では、各羽根に働く流体力は互いに打ち消し合い、横力は生じない。しかし、一たびふれまわりが起こると流れの対称性がくずれて横力 F が発生する。図6に示すように横力の円軌道と直交する成分 F_r を半径力(外向き正)、平行な成分 F_θ を接線力(時計方向を正)と呼ぶことにする。

半径力は軸を曲げる力として作用する。一方接線力は軸心のふれまわり速度と平行に作用しふれまわり運動に対するエネルギー授受を決定する。正のふれまわりに対しては運動に抵抗する方向すなわち $F_\theta > 0$ であれば減衰、その逆では励振的に作用する。接線力の働く方向が振動の安定性にとって重要な意味をもっている。

F_r および F_θ の時間平均値を無次元化して

$$f_r = F_r / M |\varepsilon| \omega^2$$

$$f_\theta = F_\theta / M |\varepsilon| \omega^2$$

$$M = \rho \pi r_2^2 d$$

実験結果およびそれに対応する特異点解法による計算結果を図7 [文献(3)] に示す。両者は定性的には非常によく一致しており、流量係数 ϕ の値が変化しても、 Ω/ω による変化の傾向は変わらない。

図6 ふれまわりながら回転する遠心羽根車

(a) 接線方向成分

(b) 半径方向成分

図7 ふれまわり流体力の各成分の実験結果と計算結果

f_r の Ω/ω による変化については、円形翼列の付加質量に加わる遠心力と円形翼列まわりに循環があることにより生ずる力(マグナス効果)の和として説明されているが、振動に対して重要な意味をもつ f_θ については説明ができていない。

4.2 形状の簡単化 図6のような円形翼列がふれまわる場合の流体力の性質を、直接理解することは難しいので $r_1/r_2 \rightarrow 1$ 羽根枚数 $N=3$ 、羽根と半径のなす角を β として大幅に幾何学的形状を簡単化して考える(図8)。この簡単化した円形翼列の各翼のまわりの流れは、隣接する翼との間隔が翼弦長に比べて非常に離れており、各翼を平板単独翼と考えて差し支えなく、また、回転しているので後流渦が直線的に流出しないことをのぞけば非定常翼理論を各翼について適用

図 8 単純化した形状の遠心羽根車

できる。

4・3 流体力の計算 図 8 の円形翼列がふれまわりながら回転する場合, no. 1 羽根が $z = x + iy$ 座標系で,

$$z = r_1 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (4)$$

に位置するとき, 偏心ベクトル $\overrightarrow{OO'} = \varepsilon$ が

$$\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\Omega t} \dots\dots\dots (5)$$

で表されるとすると, この羽根に垂直方向の非定常速度 u_n は

$$u_n = -|\varepsilon|\Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta) \dots\dots\dots (6)$$

(羽根を反時計回りに横切る方向を正)となり, 非定常条件は一樣変動の場合と同様であることがわかる。この速度 u_n を打ち消すように羽根上に渦分布が生じる。渦分布を積分して得られる羽根まわりの循環(時計回り正)は

$$\Gamma^1 = -A|\varepsilon|\Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta) \dots\dots\dots (7)$$

$$A = \pi(r_2 - r_1)/\cos \beta$$

最初に式(2)の第1項に相当する力を求める。no. 1 羽根付近の定常流速を U (半径方向流速 $Q/2\pi r$ と回転による速度 $r\omega$ のベクトル和)とすると, この羽根に働く力の大きさ F^1 は

$$F^1 = -\rho UA|\varepsilon|\Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta) \times [ie^{i\omega t - i\beta}] \dots\dots\dots (8)$$

ただし, F^1 の subscript 1 は第1項であることを, superscript 1 は no. 1 羽根であることを示しており, i に関する複素数で力の働く方向を表している。ここでは, 迎え角があまり大きくない場合を考えることにして, 羽根に垂直に力が働くとしている。また図 8 に示す羽根車の, 式(6)で表される一樣変動の無次元振動数 k を計算すると

$$k = \Omega \frac{r_2 - r_1}{2 \cos \beta} \frac{1}{U} \\ = \frac{\Omega}{\omega} \frac{r_2 - r_1}{2 r_2} \tan \beta$$

$(r_2 - r_1)/r_2$ が小的时候 k の値は小さいので, (7), (8)での循環および揚力の振幅は $k=0$ の場合の値で近似している。この F^1 を $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\Omega t}$ に平行な成分 F^1_r と垂直な成分 F^1_θ に分解する。

$$F^1_r = \rho UA|\varepsilon|\Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta) \\ \sin(\omega t - \Omega t - \beta)$$

$$F^1_\theta = \rho UA|\varepsilon|\Omega \cos^2(\omega t - \Omega t - \beta)$$

no. 2, 3 羽根車について同様に $F^2_r, F^2_\theta, F^3_r, F^3_\theta$ を求めると

$$F^2_r = \rho UA|\varepsilon|\Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta + 2\pi/3) \\ \sin(\omega t - \Omega t - \beta + 2\pi/3)$$

$$F^2_\theta = \rho UA|\varepsilon|\Omega \cos^2(\omega t - \Omega t - \beta + 2\pi/3)$$

$$F^3_r = \rho UA|\varepsilon|\Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3) \\ \sin(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3)$$

$$F^3_\theta = \rho UA|\varepsilon|\Omega \cos^2(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3)$$

のようになる。3枚の羽根について和を求めると,

$$\sum_{i=1}^3 F^i_r = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\sum_{i=1}^3 F^i_\theta = 1.5\rho UA|\varepsilon|\Omega \dots\dots\dots (10)$$

このように, 力の大きさの変化と方向の変化の位相が一致するので, r 方向成分が零になり, θ 方向成分だけになる。

次に第2項について考える。働く力の大きさは, 非定常運動の加速度の大きさに比例し, 方向は平板に垂直である。したがって, no. 1 羽根に働く力は,

$$F^1_z = -B|\varepsilon|\Omega^2 \sin(\omega t - \Omega t - \beta) \times [ie^{i\omega t - i\beta}] \dots\dots\dots (11)$$

$$B = 0.25\rho\pi(r_2 - r_1)^2$$

となる。ここで B は1枚の羽根の付加質量を表している。

$\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\Omega t}$ に平行な r 方向と, 垂直な θ 方向成分に分解すると

$$F^1_{2r} = B|\varepsilon|\Omega^2 \sin^2(\omega t - \Omega t - \beta)$$

$$F^1_{2\theta} = B|\varepsilon|\Omega^2 \sin(\omega t - \Omega t - \beta) \\ \cos(\omega t - \Omega t - \beta)$$

となる。no. 2, 3 羽根について同様に $F^2_{2r}, F^2_{2\theta}, F^3_{2r}, F^3_{2\theta}$ を求めると

$$F^2_{2r} = B|\varepsilon|\Omega^2 \sin^2(\omega t - \Omega t - \beta + 2\pi/3)$$

$$F^2_{2\theta} = B|\varepsilon|\Omega^2 \sin(\omega t - \Omega t - \beta + 2\pi/3) \\ \cos(\omega t - \Omega t - \beta + 2\pi/3)$$

$$F^3_{2r} = B|\varepsilon|\Omega^2 \sin^2(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3)$$

$$F^3_{2\theta} = B|\varepsilon|\Omega^2 \sin(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3) \\ \cos(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3)$$

$$\cos(\omega t - \Omega t - \beta + 4\pi/3)$$

3枚の羽根について和をとると

$$\sum_{i=1}^3 F_{2r}^i = 1.5B|\varepsilon|\Omega^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{2\theta}^i = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

このように、第2項は第1項に対して力の大きさの位相がちょうど $\pi/2$ だけずれているため、 θ 方向成分が零になり r 方向成分のみが残る。また、この結果から単純化した幾何学形状の羽根車の付加質量は、各羽根の付加質量の和の $1/2$ であることがわかる。

第3項に相当する流体力は、 $\Gamma_s|\varepsilon|\Omega$ に比例し $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\Omega t}$ に平行である。no.1 羽根に働く力は、

$$F_3^1 = -\rho\Gamma_s\Omega|\varepsilon| \times [e^{i\Omega t}] \quad \dots\dots\dots (14)$$

$\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\Omega t}$ に平行な方向成分と垂直な方向成分に分解すると

$$F_{3r}^1 = -\rho\Gamma_s\Omega|\varepsilon|$$

$$F_{3\theta}^1 = 0$$

同様に no. 2, 3 羽根については

$$F_{3r}^2 = -\rho\Gamma_s\Omega|\varepsilon|, F_{3\theta}^2 = 0$$

$$F_{3r}^3 = -\rho\Gamma_s\Omega|\varepsilon|, F_{3\theta}^3 = 0$$

三つの羽根について和をとると

$$\sum_{i=1}^3 F_{3r}^i = -3\rho\Gamma_s\Omega|\varepsilon| \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{3\theta}^i = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

結局、式(2)第1項すなわち準定常項と後流の影響による項の和は、 F_θ のみに影響を及ぼし、式(10)からわかるように Ω/ω に比例し、図9のようになる。第2項の付加質量の項は F_r のみに影響を及ぼし、式(12)で示されるように $(\Omega/\omega)^2$ に比例することになり、図10(a)のようになる。この項についてすべての羽根の和をとることは、結局、羽根車全体の付加質量について、働く遠心力を考えることと同じことになる [図11(a)]。第3項の定常循環と非定常速度の干渉項は、 F_r のみに影響を及ぼし、式(15)からわかるように、図10(b)のような負こう配の直線になる。この項による力をすべての羽根について加え合せることは、羽根車全体に生じる循環に働く力 [図11(b)] を考えるのと結果的に同じことになる。

結局、 F_θ は図9、 F_r は図10(a)と図10(b)の和で、図10(c)のようになる。このようにして、働く力の各成分 F_r, F_θ が図7のようになることが説明できた。

ここまでは、羽根車の幾何学的形状の単純化とともに、定常流速の方向、働く力の位相遅れなどについて、単純化のための仮定をおいていた。

図9 接線方向力の計算結果

(a) 付加質量による項

(b) 定常循環と非定常速度の干渉項

(c) (a)と(b)の和

図10 半径方向力

(a) 羽根車全体の付加質量に働く遠心力 (第2項)

(b) 羽根車まわりの循環に働く力 (第3項)

図11 (2)式の第2項、第3項による力の物理的意味

しかしながら、第2項、第3項による力は、羽根車全体の循環に働く力、羽根車全体に働く遠心力によると考えると、こうした仮定の影響は受けない。さらに幾何学的形状単純化をしない図6のような円形翼列の場合でも、ほとんど影響を受けないと考えられる。

上記の単純化の仮定の影響を受けるのは、主として第1項であるので、この項について考察する。

no. 1 羽根に働く力の位相が α_1 だけ遅れ、働く力の方向が流量の減少による定常流速 U の方向変化により α_2 だけ時計回り方向に変化したとすると

$$F_1^i = -\rho UA |\varepsilon| \Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta - \alpha_1) \times [ie^{i\omega t - i\beta - i\alpha_2}]$$

r 成分, θ 成分に分けると

$$F_{1r}^i = \rho UA |\varepsilon| \Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta - \alpha_1) \sin(\omega t - \Omega t - \beta - \alpha_2)$$

$$F_{1\theta}^i = \rho UA |\varepsilon| \Omega \cos(\omega t - \Omega t - \beta - \alpha_1) \cos(\omega t - \Omega t - \beta - \alpha_2)$$

no. 2, 3 についても求め、和をとると

$$\sum_{i=1}^3 F_{1r}^i = 1.5 \rho UA |\varepsilon| \Omega \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdots \cdots (17)$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{1\theta}^i = 1.5 \rho UA |\varepsilon| \Omega \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdots \cdots (18)$$

が求まる。式(17)からわかるように、 r 方向成分に影響を及ぼすが、通常の遠心羽根車では、 β が大きいいため羽根に対する迎え角の大きさの変化 α_2 は、流量の減少によりあまり大きくならない。また、 α_1 も図3により小さいことがわかる。したがって、 $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ の値が大きくなることはないので、この項の影響は小さいことがわかる。

式(18)に示す θ 方向 F_θ は、上述の理由により $(\alpha_1 - \alpha_2)$ が小さいので、 $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ の変化の程度は小さく、また変化しても、図9のように Ω/ω に比例するという定性的性質はまったく変わらない。羽根形状、枚

数が実際に近づくとき少し様子が異なるが、各羽根の一部分を取り出して考え、その部分に働く力 $\rho U \gamma$ を考えれば、上の推論は形状が実際の場合に近くなっても適用できる。図7においてポテンシャル流の仮定による F_θ の計算結果が流量によってあまり変化していない理由は、式(18)によって説明することができる。

5. 結 言

単独翼非定常理論によると、非定常流体力は準定常項、後流渦の影響による項、付加質量による項、定常渦と非定常流速の干渉による項からなることが知られている。ふれまわり流体力の F_r , F_θ 成分はこれらの各項の特徴が、明確にわかるように表れており、単独翼の結果を用いて簡明に説明することができる。これは各羽根に働く力の位相と、その方向変化の位相が一致することにより、単独翼の場合の各項の影響が r 方向、 θ 方向のどちらか一方のみに表れるためである。

計算機と計算技術の発達した現在、古典的な解析解の有用性は、以前ほど小さくなってきているが、ここに示した例のように、形状を単純化して考え適切な仮定のもとに力の大きさを予測することにより、働く力の物理的意味を理解するのに役立つことがある。

文 献

- (1) 正司・大橋, 機論, 47-419, B(1981), 1187.
- (2) Shoji, H. and Ohashi, H., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 109(1987), 94.
- (3) 文献(2)の100ページ.
- (4) 辻本・ほか2名, 機論, 54-505, B(1988), 2266.
- (5) 辻本・ほか2名, 機論, 52-481, B(1986), 3159.
- (6) von Karman, T. and Sears, W. R., *J. Aeronaut. Sci.*, 1-5(1938), 379.
- (7) Sears, W. R., *J. Aeronaut. Sci.*, 8(1938), 104.
- (8) Horlock, J. H., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, (1968), 494.