2変数せん断流中における超空洞翼の揚力線理論*

伊藤 惇^{*1}, 成田 章^{*2}, 中村 理一郎^{*3}Lifting-Line Theory of a Supercavitating Hydrofoil
in Both Vertical and Spanwise Shear Flow

Jun ITO, Akira NARITA and Riichiro NAKAMURA

A supercavitating hydrofoil placed in vertical and spanwise shear flow between two parallel planes is approximated to a lifting-line. By introducing two kinds of separation of variables into both a fundamental solution and a main stream velocity distribution, an equation of motion with respect to disturbance pressure is reduced to two ordinary differential equations. The lifting-line equation is obtained from up-wash velocity distribution along a lifting-line derived from solutions of ordinary differential equations. Hydrodynamic force characteristics are expressed and calculated by series summation, whose spectra are solutions of the lifting-line equation, and then cavity distributions are obtained by applying the method proposed by the authors.

Key Words: Cavitation, Supercavitation, Shear Flow, Blade, Hydrofoil, Lifting-Line Theory, Turbomachinery, Fluid Dynamics

1. 緒 言

軸流形のポンプや水車の羽根車や案内羽根の翼は、その一方の側面はケーシングに、もう一方の側面はボスあるいは内筒に接しているため、二つの壁面の間におかれていることになる。また流れは、両側壁の境界層のみならず、両側壁間の速度差による非一様流、他の翼の後流などいろいろなタイプのせん断流になっていることが多い。一方、流体機械の高速化に伴い、これらの翼にはパーシャルキャビテーションやスーパキャビテーション(以下簡単のためこれらを部分空洞や超空洞という)などの空洞現象を伴うことが多くなっている。以上のことを考慮すると、これらの翼の合理的設計法や性能評価法をよりいっそう向上させるためには、「平行な2平面間のせん断流の中におかれ、かつ空洞現象を伴う翼に関する研究」を行うことが基礎的に重要と考えられる。

この種の既存研究には著者によるもの^{(1)~(4)}がある

が、これらは、平行2平面間に挟まれた翼が、翼幅方向に速度分布の変化するせん断流の中にあつて、かつ超空洞⁽¹⁾⁽³⁾あるいは部分空洞⁽²⁾⁽⁴⁾の状態にある場合を扱ったもので、その理論的な解析方法を提示したものである。

本研究においては、主流の速度分布について、より一般的な問題すなわち翼幅方向だけではなく主流と直角上下方向にも速度分布が変化する2変数のせん断流を扱う(ただしこの速度分布はこれら2変数に変数分離されるものとする)。したがって本研究の目的は、平行2平面間を流れる2変数せん断流の中の超空洞翼に対し揚力線理論を展開し、これに基づいて三次元翼特性および空洞特性を明らかにすることである。

なお、せん断流中の翼の揚力線理論には Karman-Tsien⁽⁵⁾, Chen⁽⁶⁾, 平野⁽⁷⁾, Honda⁽⁸⁾, 難波⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾によるものなどがあり、主流と直角上下方向に速度分布の変化するせん断流を扱ったものには、Lighthill⁽¹¹⁾, Glauert⁽¹²⁾, Barsony-Nagy^{(13)~(15)}のほかに上述のChen⁽⁶⁾, 平野⁽⁷⁾による揚力線理論がある。

2. 吹上げ速度

図1に示すように、間隔 H の平行2平面の間を流れる、流速 $U(y, z)$ なる2変数せん断流中に、弦長分

* 平成5年5月14日 第30回ターボ機械協会総会講演会において講演、原稿受付 平成5年3月12日。

^{*1} 正員、秋田工業高等専門学校 (〒011 秋田市飯島文京町1-1)。

^{*2} 秋田工業高等専門学校。

^{*3} 鶴岡工業高等専門学校 (〒997 鶴岡市大字井岡字沢田104)。

図1 2変数せん断流中の超空洞翼

布 $c(y)$ なる三次元翼が両翼端を両平面に接しかつ迎え角 α で配置されている。流れは翼前縁よりはく離し、空洞を形成し、翼幅方向空洞長さ分布(以下これを簡単のため単に空洞分布と呼ぶことにする) $l(y)$ なる超空洞状態にあるものとする。非圧縮性・非粘性・微小じょう乱の仮定を行うと、図1のような座標系において、じょう乱圧力 p について次の運動方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + U^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + U^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

翼を揚力線で近似し、基本解(ν は任意の実数)

$$p = P(y, z; \nu) \cos \nu x \quad \dots\dots\dots (2)$$

および主流の速度分布に対する変数分離

$$P(y, z; 0) = Y(y)Z(z) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$U(y, z) = V(y)W(z) \quad \dots\dots\dots (4)$$

を仮定すると、次の常微分方程式が成立する。

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{2}{V} \frac{dV}{dy} \frac{dY}{dy} + \mu^2 Y = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{2}{W} \frac{dW}{dz} \frac{dZ}{dz} - \mu^2 Z = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで μ は分離定数であり、離散的な値をとる(以下、これを μ_n とする)。また、主流の速度分布を次のように仮定し、

$$V(y) = V_0 + \frac{V_1 - V_0}{H} y \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$W(z) = e^{kz} \quad \dots\dots\dots (8)$$

境界条件

$$\frac{dY}{dy} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, H \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$Z = 0 \quad \text{at} \quad z \rightarrow \infty \quad \dots\dots\dots (10)$$

の下に式(5)、(6)を解き、式(3)に代入すると $Z > 0$ に対し次式が得られる。

$$P(y, z; 0) = -\rho V_0 H \left[F(0) V_0 \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \{ (V_0 + Ky) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n} \sin(\mu_n y) \} \exp \{ [k - (k^2 + \mu_n^2)^{1/2}] z \},$$

$$\mu_n = \frac{n\pi}{H}, K = \frac{V_1 - V_0}{H} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで ρ は流体密度、 $F(\mu_n)$ は固有値 μ_n に対応するスペクトルである。

運動方程式の z 成分は次のようになる。

$$U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで $w(x, y, z)$ は、速度の z 成分である。よって揚力線位置における吹上げ速度 $w(0, y, 0)$ は式(2)、(11)、(12)より次のようになる。

$$w(0, y, 0) = \frac{V_0 H}{2V} \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \{ k - (k^2 + \mu_n^2)^{1/2} \} \times \{ (V_0 + Ky) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n} \sin(\mu_n y) \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

3. 揚力線方程式

せん断流中の空洞を伴う二次元翼の揚力係数 C_l は、非圧縮性・非粘性流れの仮定の下では、次のように五つの変数(物理量)の関数として表される。

$$C_l = f(\sigma, z_f, \alpha, \delta, k) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで σ はキャピテーション数 ($= -2p_c/\rho q^2$; p_c, q は、空洞内じょう乱圧力および代表速度)、 z_f は翼形状、 α は翼形の迎え角、 δ は空洞後端モデル(ここでは半閉鎖形モデルを採用することにし、 δ は空洞後端厚みとする)、 k は主流のせん断流を代表するシアパラメータ[ここでは式(8)の k に相当する]である。

式(14)で表される揚力係数を、揚力線理論に適用するにあたって「(a)迎え角の基準を零揚力角にとる… z_f の消去、(b)空洞後端厚みの最適値は他の変数の関数として一義的に決まる… δ の消去、(c)揚力係数は迎え角に対して非線形的に変化する…テラー展開の導入、(d)幾何迎え角を有効迎え角で置換える…誘導迎え角の補正、(e)誘導迎え角の2次以上の項は無視する…微小じょう乱の仮定」⁽³⁾の以上を考慮すれば、主流がせん断流になっていることから式(14)は次のように表すことができる。

$$C_l(a_e, \sigma, k) \doteq C_l(\alpha, \sigma, k) + \frac{\partial}{\partial \alpha} C_l(\alpha, \sigma, k) a_i, a_e = \alpha + a_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで a_e, α, a_i はそれぞれ有効迎え角、幾何学的迎え角、誘導迎え角である。揚力線に働く翼幅方向揚力

分布(以下, 簡単のため局所揚力という)は ε を微小量として次の積分で与えられる.

$$l_f(y) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{p(x, y, -0) - p(x, y, +0)\} dx \quad \dots\dots\dots (16)$$

よって局所揚力は式(2), (11), (16)より次の式のようになる.

$$l_f(y) = 2\rho V_0^2 H \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

各翼断面 y において, 式(15)から次の関係が成り立つ.

$$l_f(y) = \frac{1}{2} \rho c(y) V(y)^2 \{ C_l(\alpha(y), \sigma(y), k; H=\infty) + \alpha(y) \frac{\partial}{\partial \alpha} C_l(\alpha(y), \sigma(y), k; H=\infty) \} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(17), (18)より, 最終的に $F(\mu_n)$ を未知数とする次の揚力線方程式が得られる.

$$F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \left[1 - \frac{1}{8} c(y) \{ k - (k^2 + \mu_n^2)^{1/2} \} \times \frac{\partial}{\partial \alpha} C_l(\alpha(y), \sigma(y), k; H=\infty) \right] = \frac{1}{4H} c(y) \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) C_l(\alpha(y), \sigma(y), k; H=\infty) \quad \dots\dots\dots (19)$$

揚力線方程式(19)を解くためには, 与えられたキャビテーション数, 迎え角, シアパラメータに対する揚力係数と揚力傾斜の二次元特性値をあらかじめ求めておく必要がある. このためには著者により提案された「せん断流中の超空洞翼の2次元理論⁽¹⁶⁾」を用い計算を行えばよい. なお補足であるが, 文献(3)の式(15)~(17)の $\Delta p(y)$ は $l_f(y)$ に, 式(14)は本論文の式(16)に訂正する.

4. 特 性

4.1 局所揚力係数 局所揚力係数 $C_l(y)$ を次の式で定義する.

$$C_l(y) = \frac{2l_f(y)}{\rho c(y) V(y)^2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

よって $C_l(y)$ は式(17), (20)より,

$$C_l(y) = \frac{4H}{c(y)} \left\{ \frac{V_0}{V(y)} \right\}^2 \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (21)$$

4.2 全揚力係数 全揚力 L は次の積分で求められる.

$$L = \int_0^H l_f(y) dy \quad \dots\dots\dots (22)$$

全揚力係数 C_L を次の式で定義する.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho \int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \quad \dots\dots\dots (23)$$

よって C_L は式(17), (22), (23)より次の式のようになる.

$$C_L = \frac{4HV_0^2}{\int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \left\{ HF(0) - 4 \frac{K}{V_0} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} F(\mu_n) \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

4.3 誘導抗力係数 誘導抗力 D_i は次の積分で求められる.

$$D_i = - \int_0^H l_f(y) \frac{1}{V(y)} w(0, y, 0) dy \quad \dots\dots\dots (25)$$

誘導抗力係数 C_{Di} を次の式で定義する.

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho \int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \quad \dots\dots\dots (26)$$

よって C_{Di} は式(13), (17), (25), (26)より次のようになる.

$$C_{Di} = - \frac{2V_0^2 H^2}{\int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \int_0^H \left\{ \frac{V_0}{V(y)} \right\}^2 \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \{ k - (k^2 + \mu_n^2)^{1/2} \} \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n V_0} \sin(\mu_n y) \right\} \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n V_0} \sin(\mu_n y) \right\} \right] dy \quad \dots\dots\dots (27)$$

4.4 空洞分布 空洞分布は, 揚力線理論を扱った著者らによる文献(3)の5章の方法を拡張して以下のようにして求めることができる.

二次元理論より, α と k をパラメータに $\sigma - l/c$, $C_l - l/c$ の関係を求める. これら二つの関係より, 与えられた α , k , σ に対する C_l と $\partial C_l / \partial \alpha$ が得られる. ただし $\partial C_l / \partial \alpha$ は一つの近似値として次の式により求めるものとする.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} C_l(\alpha, \sigma, k) \approx \frac{1}{\Delta \alpha} \left\{ C_l\left(\alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha, \sigma, k\right) - C_l\left(\alpha - \frac{1}{2} \Delta \alpha, \sigma, k\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

得られた二次元値 C_l , $\partial C_l / \partial \alpha$ の値のほかに, $V(y)$, $c(y)$, アスペクト比 λ を揚力線方程式に代入してこれを解くことにより, 翼特性とともに $\alpha_e(y)$ が得られる. 局所キャビテーション数 $\sigma_i(y)$ は $\sigma(y)q(y)^2 =$

const. より,

$$\sigma_l(y) = \sigma q^2 / V(y)^2 \dots\dots\dots (29)$$

によって求められるが, σ には二次元値を, q には V_l を対応させるものとする。再び二次元理論より, l/c をパラメータにして σ と α の関係を求め, これよりスパン位置 y に対する $\alpha(y)$ (α_0 とみなす) と $\sigma(y)$ (σ_l とみなす) から空洞分布 $l(y)/c(y)$ が得られる。

4.5 テーパー翼 翼平面形の影響を知るためにテーパー翼についても若干の計算を行った。 $y=0, H$ における弦長を c_0, c_H とすると, テーパー翼の弦長分布 $c(y)$, アスペクト比 λ , テーパー比 T_P はそれぞれ次のようになる。

$$c(y) = c_0 - \frac{c_0 - c_H}{H} y \dots\dots\dots (30)$$

$$\lambda = \frac{2H}{c_H + c_0} \dots\dots\dots (31)$$

$$T_P = \frac{c_0 - c_H}{H} \dots\dots\dots (32)$$

また数値計算では λ, T_P を与え H, c_H を求める必要があるが, その場合には式 (31), (32) を解いた次の式を用いればよい。

$$H = \frac{2\lambda c_0}{2 + \lambda T_P} \dots\dots\dots (33)$$

$$c_H = \frac{c_0(2 - \lambda T_P)}{2 + \lambda T_P} \dots\dots\dots (34)$$

5. 計 算 例

数値計算した翼は, 平面形状は矩形(一部テーパー翼を含む), 断面形状は平板, 迎え角は 5° である。

局所揚力係数(図2～5), 全揚力係数と誘導抗力係数(図6～9), 空洞分布(図10～13)の以上4種の特性に及ぼす, 上下方向シアパラメータ k , 翼幅方向シアパラメータ V_0/V_1 , キャピテーション数 σ , テーパー比 T_P の影響を明らかにしている。

図2～5より, 局所揚力係数は, k が小さいほど,

図2 局所揚力係数分布(シアパラメータ k の影響)

V_0/V_1 が大きいほど, また σ が大きいほど大きな値になり, T_P の影響は小さい。

図6～9より, 全揚力係数は, 局所揚力係数と同様に k が小さいほど, V_0/V_1 が大きいほど, また σ が大きいほど大きな値になり, T_P の影響はほとんど受けない。一方誘導抗力係数は, $k, V_0/V_1, T_P$ が小さいほど, また σ が大きいほど大きな値になる。

図10～13は, 空洞分布(すなわち空洞の発生範囲)を示す。左側の長方形は翼の平面形であり, 図1にも

図3 局所揚力係数分布(シアパラメータ V_0/V_1 の影響)

図4 局所揚力係数分布(キャピテーション数 σ の影響)

図5 局所揚力係数分布(テーパー比 T_P の影響)

示したように主流は x の正の方向に流れている。したがって縦軸は翼および空洞の前縁で、カーブは計算結果であり空洞の後縁を示している。 k , σ , T_P が小さいほど、また V_0/V_1 が大きいほど空洞発生範囲は大きな広がりを見せている。

最後に空洞抗力係数 C_{DC} について述べる。平板翼を扱っていることから全抗力係数 C_D について $C_D = \alpha C_L$ が成り立つ。よって図 6 より C_D と C_{Di} には 1

図 6 全揚力係数と誘導抗力係数
(シアパラメータ k の影響)

図 7 全揚力係数と誘導抗力係数
(シアパラメータ V_0/V_1 の影響)

図 8 全揚力係数と誘導抗力係数
(キャビテーション数 σ の影響)

図 9 全揚力係数と誘導抗力係数(テーパ比 T_P の影響)

図 10 空洞分布(シアパラメータ k の影響)

図 11 空洞分布(シアパラメータ V_0/V_1 の影響)

図 12 空洞分布(キャビテーション数 σ の影響)

図 13 空洞分布(テーパ比 T_P の影響)

～2 オーダ(けた)の差があることがわかる。したがって $C_D = C_{DC} + C_{Di}$ より C_{DC} と C_{Di} の間にも同じ 1～2 オーダの差があることになる。一樣無限流体中の部分空洞翼では C_{DC} と C_{Di} は、同じオーダである⁽¹⁷⁾ことを考慮すると、本論文で扱っている流れは極めて二次元性が強いことを示している。この理由としては、両翼端が平面に接していると、圧力の高い翼下面から圧力の低い翼上面へ流れる翼端近傍の二次流れがこの平面によって妨げられること、また、超空洞流れでは、翼の上面が全面的に空洞で覆われているためスパン方向に翼上面の圧力が一定であること、の二つが考えられる。

6. 結 言

平行な 2 平面間を流れる 2 変数せん断流(すなわち主流の速度分布が、翼幅方向と主流と直角上下方向の両方向に変化するせん断流)の中の超空洞翼に対し、揚力線理論を展開するとともに、これに基づいて三次元翼特性および空洞特性を明らかにした。本論文の内容は次のように要約される。

(1) じょう乱圧力に関する運動方程式に対して、超空洞翼を揚力線で近似した基本解と主流の速度分布

の両者に変数分離を導入することにより、2 種の常微分方程式の境界値問題が誘導された。またこれらの一般解が得られ、これと運動方程式の z 成分とから吹上げ速度が導き出された。

(2) せん断流中の超空洞を伴う翼の二次元流れの問題における物理量の考察から、揚力線理論へ応用するための揚力係数表示が示され、さらに吹上げ速度を考慮することにより揚力線方程式が導き出された。これは、各翼断面の選点によって連立方程式に帰着され、数値的に解かれた。

(3) 局所揚力係数、全揚力係数、誘導抗力係数および吹上げ速度が、揚力線方程式の解を係数とする級数和として表示され、その具体的計算によってこれら 3 種の流体力特性および空洞分布に及ぼすキャビテーション数、2 種のシアパラメータ、テーパ比等による影響が明らかにされた。

文 献

- (1) 伊藤, 機論, **56**-530, B (1990), 2871.
- (2) 伊藤, 機論, **57**-536, B (1991), 1289.
- (3) 伊藤・成田, 機論, **57**-537, B (1991), 1635.
- (4) 伊藤, 機論, **57**-543, B (1991), 3783.
- (5) von Karman, Th. and Tsien, H. S., *Q. Appl. Math.*, **3**-1 (1945), 1.
- (6) Chen, C. F. and Mangione, B. J., *AIAA J.*, **5**-11 (1967), 2056.
- (7) 平野, 大分工大紀要, **4**-1 (1975), 16.
- (8) Honda, M., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **254** (1960), 372.
- (9) 難波・浅沼, 機論, **33**-248, (1967), 577.
- (10) 難波・浅沼, 機論, **33**-248, (1967), 586.
- (11) Lighthill, M. J., *J. Fluid Mech.*, **3** (1957), 113.
- (12) Glauert, M. B., *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 561.
- (13) Homentcovschi, D. and Barsony-Nagy, A., *Acta Mech.*, **24** (1976), 63.
- (14) Barsony-Nagy, A. and Hanin, M., *AIAA J.*, **20**-4 (1982), 451.
- (15) Barsony-Nagy, A. and Hanin, M., *AIAA J.*, **20**-4 (1984), 453.
- (16) 伊藤・中村・斎藤, 機論, **58**-549, B (1992), 1605.
- (17) 伊藤, 機論, **47**-415, B (1981), 403.