超音速軸流速度で作動する三次元振動翼列の 二重線形理論による非定常空気力解析*

利 光 和 彦^{*1}, 岩 井 誠 一^{*2}, 難 波 昌 伸^{*1}

Double Linearization Theory Applied to Three-Dimensional Cascades Oscillating under Supersonic Axial Flow Condition

Kazuhiko TOSHIMITSU, Seiichi IWAI and Masanobu NAMBA

The double linearization theory is extended to a three-dimensional straight cascade between parallel-plane end walls operating at supersonic axial velocity. Numerical examples are presented to show unsteady aerodynamic responses and flutter boundaries in correlation with cascade parameters. The three-dimensional effects are evaluated by comparing them with the strip theory predictions. To attain a large steady loading on the stability boundary of the first bending vibration, it is advantageous to design blades with angle of attack and camber decreasing from hub to tip. The three-dimensional effects are small, and the strip theory was found to be a useful method for estimation of the unsteady aerodynamic work of the three-dimensional straight cascade.

Key Words: Three-Dimensional Flow, Supersonic Flow, Unsteady Flow, Flutter, Cascade, Supersonic Axial Flow, Steady Loading

1. 序 論

マッハ数2～5での飛行を実現する超音速軸流ターボファンは、従来の亜音速軸流ファンに比べ空気取り入れ口の圧力損失が低いことなどの利点がある反面、翼列翼間の強い衝撃波の発生を抑えながら高い全圧比を得なければならないために、翼の厚みや節弦比を小さく設計する必要がある。したがって、翼の剛性に比べて非定常空気力が大きく、翼列フラッタは発生し易くなることが予想される。この限界的设计を実現するために、数値流体力学などを援用した空気力学的特性の研究が活発になってきている。

まず、Kielbら⁽¹⁾は、NASAの軸流超音速試験用ファンに対して、Laneの二次元理論に基づく非定常空気力係数を用いることで、各種の設計変数とフラッタ限界との関係を明らかにし、実用的な情報を提供している。しかしながら、二次元理論によって求められた非定常空気力が、三次元翼列に対してどの程度有効であるかは不明確である。一方、難波ら^(2,3,4)は、揚力面理論を

無限長二重円筒ダクト内の環状翼列ファンに対して適用し、定常空気力特性および迎え角零の平板翼に対する非定常空気力特性を明らかにしている。この研究により、節弦比を小さくし反り比及び厚み比を大きくすれば高い全圧比が得られることや、ねじり振動でのねじり軸位置と空力安定性との関係が示された。

上述のように従来の理論的研究はすべて定常負荷効果(翼の定常迎え角, 反り, 厚みの効果)を無視している。本報では、二重線形理論⁽⁵⁾を定常負荷を伴う軸流超音速の三次元振動翼列に適用し、非定常空気力および振動の空力不安定性に対する定常負荷効果を明らかにする。さらに、ストリップ理論値と三次元理論値との比較により三次元効果の評価を行う。

2. 解析モデルと定式化

本報の解析モデルおよび定式化は、前報⁽⁵⁾とほぼ同様であるため、詳細は省略し、概略を以下に述べる。解析モデルを図1に示す。座標は左手系の直交座標とし、 x 軸は無限上流の流れ方向、 z 軸は翼幅方向、 y 軸はこれらと垂直な方向とする。翼列は、食違い角 γ 、節弦比 s 、縦横比 h 、反りおよび厚み分布がそれぞれ

* 原稿受付 平成4年5月18日。

*¹ 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*² 三菱重工業(株)長崎造船所 (〒850-91 長崎市飽の浦町1-1)。

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \Delta \bar{p}(\xi, \zeta) K_{va}(x - \xi, 0, z | \zeta) d\xi d\zeta \\
&= i\omega a_y(x, z) + \frac{\partial}{\partial x} a_y(x, z) \\
&- a_y(x, z) \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \left[\Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \frac{\partial \bar{K}_{vF}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta)}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}(\xi, \zeta) \frac{\partial \bar{K}_{vQ}(x - \xi, 0, z | \zeta)}{\partial y} \right] d\xi d\zeta \\
&+ \frac{\partial a_y(x, z)}{\partial x} \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \left[\Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \bar{K}_{uF}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta) \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}(\xi, \zeta) \bar{K}_{uQ}(x - \xi, 0, z | \zeta) \right] d\xi d\zeta \\
&+ \frac{\partial a_y(x, z)}{\partial z} \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \left[\Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \bar{K}_{wF}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta) \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}(\xi, \zeta) \bar{K}_{wQ}(x - \xi, 0, z | \zeta) \right] d\xi d\zeta \\
&- \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} a_x(\xi, \zeta) \left[\Delta \bar{p}(\xi, \zeta) K_{vL}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta) \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}(\xi, \zeta) K_{vQ}(x - \xi, 0, z | \zeta) \right] d\xi d\zeta \\
&- a_x(x, z) \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \left[\Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \frac{\partial \bar{K}_{vF}(x - \xi, 0, z | \zeta)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}(\xi, \zeta) \frac{\partial \bar{K}_{vQ}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta)}{\partial x} \right] d\xi d\zeta \\
&- \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} a_x(\xi, \zeta) \left[\Delta \bar{p}(\xi, \zeta) K_{vQ}(x - \xi, 0, z | \zeta) \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}(\xi, \zeta) K_{vX}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta) \right] d\xi d\zeta \\
&- \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \bar{q}(\xi, \zeta) K_{vS}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta) d\xi d\zeta \\
&- \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \bar{D}(\xi, \zeta) K_{vD}(x - \xi, \pm 0, z | \zeta) d\xi d\zeta \quad (9)
\end{aligned}$$

式(8), (9)の速度場核関数 $K_{u(\cdot)}$ は圧力場核関数 $K_{p(\cdot)}$ の積分として求めることができる。 K_{pX} 以外の圧力場核関数についての偏微分方程式は、前報⁽⁵⁾に詳述しているため、本報では x 方向変位 a_x によって新たに生じる核関数 K_{pX} の偏微分方程式のみを示す。

$$\begin{aligned}
& [\nabla^2 - M^2(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})^2] K_{pX}(x, y, z) = -e^{i\pi\sigma m} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\
& \times [-i\omega\delta'(x_m)\delta(y_m)\delta(z) - \delta''(x_m)\delta(y_m)\delta(z)] \quad (10)
\end{aligned}$$

ただし、 $x_m = x - ms \sin \gamma$, $y_m = y - ms \cos \gamma$ である。なお、軸流マッハ数は $M_a > 1$ であるため、核関数の表現は前報⁽⁵⁾のそれとは当然異なるが、その詳細は紙面の都合で省略する。

以上の支配方程式(8), (9)を以下に示す手順で解く。まず、迎え角、反りおよび厚みの翼幅方向分布を

$$[\alpha(z), \mu(z), \tau(z)] = \sum_{m=0}^{NS} [A_m, M_m, T_m] \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (11)$$

の余弦級数の形に仮定する。これに対応して、定常翼面圧力差は図2に示すような翼弦方向に不連続分布をなす係数をもった翼幅方向余弦級数の形で

$$\Delta \bar{p}(x, z) = \sum_{m=0}^{NS} \Delta \bar{p}_m(x) \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \Delta \bar{p}_m(x) = \sum_j \bar{\Delta}_m(x_j) H(x - x_j) + \Delta \bar{p}_m^-(x) \\
& \text{for } j = L, U1, D1, X1, T \quad (13)
\end{aligned}$$

図2 マッハ線反射様式と定常翼面圧力差分布の例

と表せる。ここで、 $\bar{\Delta}_m(x_j)$ および $\Delta \bar{p}_m^-(x)$ は、それぞれ $x = x_j$ での定常翼面圧力差の跳躍量および跳躍量を除いた連続成分の第 m 次フーリエ係数で、 $H(x)$ は Heaviside の単位ステップ関数である。

さて、非定常翼面圧力差分布 $\Delta \bar{p}(x, z)$ を式(9)の右辺第1・2項が寄与する振動成分 $\Delta \bar{p}_a(x, z)$ と残りの項が寄与する定常負荷効果成分 $\Delta \bar{p}_f(x, z)$ に分離し、

$$\Delta \bar{p}(x, z) = \Delta \bar{p}_a(x, z) + \Delta \bar{p}_f(x, z) \quad (14)$$

と表す。翼が微小振幅 $a(x, z) = e_x \chi_x(x) Z_x(z) + e_y \chi_y(y) Z_y(z)$ で振動すると、各マッハ面反射線も微小変動し、その効果は線形近似の範囲内では反射線平均位置 (x_j, z) に作用する集中交番力 $\bar{F}_f(x_j, z) e^{i\omega t}$ として翼に作用する。したがって $\Delta \bar{p}_f(x, z)$ は

$$\begin{aligned}
& \Delta \bar{p}_f(x, z) = \sum_{n=0}^{NU} \left\{ \sum_j \bar{F}_{fn}(x_j) [\delta(x - x_j) + \Delta \bar{p}_n(x; x_j)] \right. \\
& \quad \left. + \Delta \bar{p}_{fn}^-(x) \right\} \cos \frac{n\pi z}{h} \quad \text{for } j = U1, D1, X1 \quad (15)
\end{aligned}$$

の形に表せる。ここで、 $\bar{F}_f(x_j, z)$ と $\bar{F}_{fn}(x_j)$ との間には

$$\begin{aligned}
& \bar{F}_f(x_j, z) = \sum_{n=0}^{NU} \bar{F}_{fn}(x_j) \cos \frac{n\pi z}{h} \\
&= Z(z) \bar{F}_f^{2D}(x_j, z) \\
&= Z(z) \sum_{m=0}^{NS} \bar{F}_{fm}^{2D}(x_j) \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (16)
\end{aligned}$$

が成立し、三次元翼列に対して二次元理論を単純に各翼幅位置で適用するストリップ的分布となる。 $\bar{F}_{fm}^{2D}(x_j)$ は二次元理論式として次式で表せる。

$$\begin{aligned}
& \bar{F}_{fm}^{2D}(x_{U1}) = -\beta \bar{\Delta}_{fm}(x_{U1}) [\chi_y(x_{U1}) - \chi_y(x_L) e^{i\psi^-}] \\
& + \bar{\Delta}_{fm}(x_{U1}) [\chi_x(x_{U1}) - \chi_x(x_L) e^{i\psi^-}] \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{fm}^{2D}(x_{D1}) = & \beta \bar{\Delta}_{fm}(x_{D1})[\chi_y(x_{D1}) - \chi_y(x_L)e^{i\psi^+}] \\ & + \bar{\Delta}_{fm}(x_{D1})[\chi_x(x_{D1}) - \chi_x(x_L)e^{i\psi^+}]\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{fm}^{2D}(x_{X1}) = & -\beta \bar{\Delta}_{fm}(x_{U1})[\chi_y(x_{X1}) - 2\chi_y(x_{U1})e^{i\psi^+} + \chi_y(x_L)e^{i\psi}] \\ & + \beta \bar{\Delta}_{fm}(x_{D1})[\chi_y(x_{X1}) - 2\chi_y(x_{D1})e^{i\psi^-} + \chi_y(x_L)e^{i\psi}] \\ & + 2\bar{\Delta}_{fm}(x_L)[\chi_x(x_{X1}) - \chi_x(x_L)e^{i\psi}]\end{aligned}\quad (19)$$

ここで、 $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ 、 $\psi^\pm = \pm 2\pi\sigma - s\omega M^2 \cos\gamma/\beta$ 、 $\psi = \psi^+ + \psi^-$ である。式(15)の $\Delta\tilde{p}_n(x; x_j)$ 、 $\Delta\tilde{p}_{fn}^r(x)$ の求め方の詳細については前報⁽⁵⁾に記述している。結局、定常および非定常翼面圧力差分布は、それぞれ迎え角 $[(\)_\alpha]$ 、反り $[(\)_\mu]$ 、厚み $[(\)_r]$ 、振動 $[(\)_a]$ の各成分の線形結合として次式で表すことができる。

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{p}(x, z) = & \alpha_0\Delta\tilde{p}_\alpha(x, z) + \mu_0\Delta\tilde{p}_\mu(x, z) \\ & + \tau_0\Delta\tilde{p}_r(x, z)\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{p}(x, z) = & \Delta\tilde{p}_a(x, z) + \alpha_0\Delta\tilde{p}_\alpha(x, z) \\ & + \mu_0\Delta\tilde{p}_\mu(x, z) + \tau_0\Delta\tilde{p}_r(x, z)\end{aligned}\quad (21)$$

3. 曲げおよびねじり振動における空気力係数

本報では、一般に x, y 方向曲げ振動およびねじり振動が連成することを想定して、翼の振動振幅を

$$\begin{aligned}a(x, z) = & e_y[H_b e^{i\phi_b} Z^{b,k}(z) + H_t e^{i\phi_t}(x - x_e) Z^{t,k}(z)] \\ & + e_x H_x e^{i\phi_x} Z^{b,k}(z)\end{aligned}\quad (22)$$

のように仮定する。ただし、翼幅方向振動モード $Z^{b \text{ or } t, k}(z)$ [b: 純曲げモード, t: 純ねじりモード] を $z = 0$ で固定端とする一様断面の片持梁で近似した第 k 次振

図3 翼の振動変位

動モードとし、第0次振動として翼幅方向に一樣な並進振動と回転振動を考える。(図3に第0次、1次モードの $Z(z)^{b,0}$ などを示す。) この振動様式の仮定によって、非定常翼面圧力差は

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{p}(x, z) = & H_b e^{i\phi_b} \Delta\tilde{p}^b(x, z) + H_t e^{i\phi_t} \Delta\tilde{p}^t(x, z) \\ & + H_x e^{i\phi_x} \Delta\tilde{p}^x(x, z)\end{aligned}\quad (23)$$

と表せる。

非定常局所揚力係数およびモーメント係数は非定常翼面圧力差を翼弦方向に積分した

$$\tilde{C}_L(z) = \int_{-1/2}^{1/2} \Delta\tilde{p}(x, z) dx \quad (24)$$

$$\tilde{C}_M(z) = \int_{-1/2}^{1/2} \Delta\tilde{p}(x, z)(x - x_e) dx \quad (25)$$

で定義する。

非定常空気力が翼になす振動一周期当たりの仕事 W は

$$\begin{aligned}W = & \oint dt \frac{1}{h} \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \Re[\Delta\tilde{p}(x, z) e^{i\omega t}] \\ & \times \Re\left[\frac{\partial}{\partial t} a_y(x, z) e^{i\omega t}\right] dx dz\end{aligned}\quad (26)$$

で与えられ、式(22)、(23)を式(26)に代入して

$$\begin{aligned}W = & \pi[H_b^2 C_W^b + H_t^2 C_W^t + H_b H_t C_W^{bt}(\phi_b, \phi_t) \\ & + H_b H_x C_W^{bx}(\phi_b, \phi_x) + H_t H_x C_W^{tx}(\phi_t, \phi_x)]\end{aligned}\quad (27)$$

を得る。

4. 数値計算例

計算に用いた翼形状は、翼弦方向の反りおよび厚み分布を放物形 $[f(x) = g(x) = 1 - 4x^2]$ とし、翼幅方向の迎え角、反り、厚み分布を

$$[\alpha(z), \mu(z), \tau(z)] = 1 + [A_1, M_1, T_1] \cos \frac{\pi z}{h} \quad (28)$$

とする。また、ねじり軸位置は特に指定しない限り $x_e = 0$ とし、翼幅方向モード $Z^{b,k}(z)$ などは10項の余弦級数

表1 計算条件

マッハ数 (M)	2.606	
食違い角 (γ [deg.])	28.0	
縦横比 (h)	1.0	
無次元振動数 (ω)	0.1	
節弦比 (s)	0.411	0.311
マッハ面反射線数	1	2
図中の記号	A	B

(—: $s = 0.411$, - - - : $s = 0.311$)

図4 定常翼面圧力差分布のフーリエ係数

で近似する。式(8),(9)を解く際の積分適合代表点は、マッハ面反射線位置で翼弦を分割した各区間におけるガウス積分の4分点とした。また、翼列条件は Kielb⁽¹⁾に示された条件を参考にして、表1のように設定した。この条件を基に各項目を変化させて、空気力と設計変数との関係を調べることにする。

4.1 定常翼面圧力差分布 図4に節弦比 s を 0.411, 0.311 とした場合の定常翼面圧力差分布のフーリエ係数を示す。 $\Delta\bar{p}_{00}(x)/A_0$ と $\Delta\bar{p}_{01}(x)/A_1$ などの0次係数と1次係数がほぼ同じ分布をしていることがわかる。これは、亜音速軸流速度の超音速翼列の場合⁽⁵⁾と異なり、定常翼面圧力差においてストリップ理論近似が極めて有効であること示す。また、迎え角や厚み成分に比べ反り成分の絶対値が大きく、反り分布の変化が翼列性能に及ぼす影響は大きいことが予想される。

4.2 非定常揚力係数と非定常モーメント係数 表1の計算条件に加えて、翼幅方向定常負荷分布は一樣($A_1 = M_1 = T_1 = 0$)で翼間位相差を $\sigma = 0.25$ とし、

1. 迎え角 $\alpha_0 = 0$ の平板翼
2. 迎え角 $\alpha_0 = 2^\circ$, 反り比 $\mu_0 = 0.06$, 厚み比 $\tau_0 = 0.03$

の翼が1次純曲げ振動をする場合の局所揚力係数と1次純ねじり振動をする場合の局所モーメント係数を図5に示す。図中のA1などは表1の条件Aと上記1の条

(—: Present theory, - - - : Strip theory)

図5 非定常局所揚力, モーメント係数

(A) $s = 0.411$ (B) $s = 0.311$

(—: Present theory, - - - : Strip theory)

図6 非定常空気力仕事係数(振動成分)(節弦比の影響)

件による結果を表す。まず、 $C_L^{b,1}(z)$, $C_M^{t,1}(z)$ のいずれにおいても定常負荷無し(A1,B1)と定常負荷あり(A2,B2)との差が大きいことが注目に値する。一方、 $C_L^{b,1}(z)$ の定常負荷無し(A1,B1)を除いては、マッハ面反射様式(AとB)の差の効果もまた大きい。また、 $C_L^{b,1}(z)$ では翼端で、 $C_M^{t,1}(z)$ では翼根で三次元効果(ストリップ理論値と三次元理論値との差)が大きくなる。

4.3 非定常空気力仕事 以下に示す計算例では、特に指定しない限り位相 $\phi_b = \phi_t = \phi_r = 0$ とし、振動は1次モードとする。図6,7に仕事係数 C_{Wa}^b , $C_{W\mu}^b$ などを示す。定常成分と同様にストリップ理論値は三次元理論値と良く一致しており、二次元理論が三次元非定常空気力の評価に対しても有用であることがわかる。また、曲げ仕事係数 C_{Wa}^b は全翼間位相差で負となり、振

 (A) $s = 0.411$

 (B) $s = 0.311$

(—:Present theory, - - - - -:Strip theory)

図7 非定常空気力仕事係数(反り成分)(節弦比の影響)

 計算条件はA(表1)で $A_1 = M_1 = T_1 = 0$

(—:Present theory, - - - - -:Strip theory)

 図8 非定常空気力仕事係数(ねじり軸位置(x_e)と C_W^t との関係)

動は空力的に安定であるが、ねじり仕事係数 $C_{W_a}^t$ および曲げねじり連成仕事係数 $C_{W_a}^{bt}$ は $-0.5 < \sigma < 0$ で不安定側(正側)である。迎え角, 反り, 厚みの定常負荷寄与成分の中では絶対値が大きい反り成分が全体の仕事に最も強く影響する。

[節弦比の影響] 節弦比 s を変化した場合、振動成分(図6)の変化は小さいが、定常負荷寄与成分(図7)はマッハ面反射線変位効果によって、その絶対値のみならず分布の形も変化する。特に、ねじり振動の場合は反射様式とねじり軸位置 x_e の関係が非定常空気力を支配する重要な因子となる。

[ねじり軸位置と C_W^t との関係] 図8にねじり軸位置を翼の前縁($x_e = -0.5$), 中心($x_e = 0.0$), 後縁($x_e = 0.5$)とした場合のねじり仕事係数($C_{W_a}^t, C_{W_a}^{bt}$)を示す。

表2 ねじり軸位置と仕事係数の関係

x_e	-0.5	0.0	0.5
f	$C_{W_f}^{tr} \rightarrow C_{W_f}^{tr}$	$C_{W_f}^{tr} \rightarrow C_{W_f}^{tr}$	$C_{W_f}^{tr} \rightarrow C_{W_f}^{tr}$
α	$\ominus \ominus >> \ominus \rightarrow \ominus \ominus$	$\ominus << \ominus \ominus \rightarrow \ominus \ominus$	$\oplus << \oplus \oplus \rightarrow \oplus \oplus$
μ	$\oplus \oplus >> \oplus \rightarrow \oplus \oplus$	$\ominus << \oplus \oplus \rightarrow \oplus$	$\oplus << \ominus \ominus \rightarrow \ominus$
τ	$\ominus \ominus >> \oplus \rightarrow \ominus \ominus$	$\ominus \ominus > \oplus \rightarrow \ominus$	$\oplus < \ominus \ominus \rightarrow \ominus$

 ω 以外の計算条件は図8と同じ

(—:Present theory, - - - - -:Strip theory)

図9 非定常空気力仕事係数(無次元円振動数の影響)

この計算例では、マッハ面反射線が $x \simeq 0.18$ の位置にあるため、 $C_{W_{a,\mu}}^t$ は $x_e = -0.5, 0.0$ と $x_e = 0.5$ で符号を変える。一方、 $C_{W_r}^t$ (図は省略) では $x_e = -0.5, 0.0, 0.5$ 共に分布の傾向は同じである。これらの C_W^t と x_e との関係は、定常翼面圧力差分布(図4), 振動様式 $\chi_y(x)$ および ω などから影響を受け、各々の場合ごとにそれらの影響を考える必要があるが、 C_W^t を式(15)における $\tilde{F}_{fn}(x_j)$ による寄与 C_W^{tr} と $\Delta \tilde{p}_{fn}^r(x)$ による寄与 C_W^{tr} に分けることで、変化の理由が説明できる。表2に図8の $\sigma = 0.25$ における $C_{W_a}^{tr}, C_{W_a}^{bt}, C_{W_r}^t$ と x_e の関係を示す。まず、ねじり軸が前縁($x_e = -0.5$)の場合には、迎え角, 反り, 厚みの3成分共に、 $C_{W_a}^{tr}$ は非常に小さく、 $C_{W_r}^t$ は $C_{W_a}^{tr}$ によって決まる。これは、 $\tilde{F}_{fm}^{2D}(x_{U1})$ [式(17)]において、主に仕事に寄与する項 $\chi_y(x_L)e^{i\psi^-}$ が零になるためである。一方、 $x_e = 0.0, -0.5$ の場合、迎え角, 反り成分は共に $|C_{W_{a,\mu}}^{tr}| > |C_{W_{a,\mu}}^{tr}|$ であり $C_{W_{a,\mu}}^t$ の符号は $C_{W_{a,\mu}}^{tr}$ によって決まる。さらに、 $C_{W_{a,\mu}}^{tr}$ は $x_e = 0.0$ と 0.5 で符号が変わるため、 $C_{W_{a,\mu}}^t$ も $x_e = 0.0$ と 0.5 で符号が変わる。厚み成分では、迎え角, 反り成分と同様に $x_e = 0.0$ と $x_e = 0.5$ で $C_{W_r}^{tr}$ と $C_{W_r}^{tr}$ の符号が変わるが、これらの大小関係が表2に示すようになるため、結局、 $C_{W_r}^t$ は $x_e = 0.0, 0.5$ において同符号となる。

A_1, M_1, T_1 以外の計算条件は図 8 と同じ
(—:Present theory, -----:Strip theory)

図 10 非定常空気力仕事係数（翼幅方向の定常負荷分布の影響）

〔無次元円振動数の影響〕 図 9 に無次元円振動数 ω を 0.1, 0.5, 1.0 とした場合の $C_{W\alpha}^b, C_{W\alpha}^t$ と $C_{W\mu}^b, C_{W\mu}^t$ を示す。 ω が大きくなると $C_{W\alpha}^b, C_{W\alpha}^t$ は安定側（負側）に移動する。一方、 $C_{W\mu}^b, C_{W\mu}^t$ などは絶対値はあまり変化せずに左右に移動、すなわち主として翼間位相差 σ への依存性が変化する。

〔翼幅方向の定常負荷分布の影響〕 図 10 に式 (28) の A_1, M_1 を 0.5 (翼根から翼端に向かって減少), 0.0 (一定), -0.5 (増加) の三種類の分布をさせた場合の $C_{W\alpha}^b, C_{W\alpha}^t$ および $C_{W\mu}^b, C_{W\mu}^t$ を示す。振動振幅の小さい翼根から振動振幅の大きい翼端に向かって迎え角, 反り, 厚みが増加するような分布の方が減少する分布の場合より仕事係数の絶対値が大きい。

4.4 フラッタ限界 フラッタ限界は、厳密には、本理論によって求めた非定常空気力とフラッタ方程式を組み合わせて解くことにより求めることができる。本報では、構造減衰を零とし、仮定した振動モードにおいて仕事 $W > 0$ の場合にフラッタが発生するとする。すなわち、 $W = 0$ を満足する α_0, μ_0 を限界迎え角 α_0^{cr} , 限界反り比 μ_0^{cr} と定義して、フラッタ限界と各設計因子との関係を調べる。

〔翼幅方向の定常負荷分布の影響〕 図 11 に、1 次曲げ振動 ($H_b = 1, H_t = H_x = 0$) における翼幅方向の定常負荷分布 (A_1, M_1) を変化させた場合の $\alpha_0^{cr}, \mu_0^{cr}$ と翼間位相差との関係を示す。本計算例では、 $\sigma \simeq -0.22, 0.18$ のときに $|\alpha_0^{cr}|$ と $|\mu_0^{cr}|$ は最小となる。また、 $A_1 = M_1 = 0.5$ の方が $A_1 = M_1 = -0.5$ よりフラッタ余裕度が高い。すなわち、翼根から翼端に向かって迎え角や反りを減少させる分布の方が増加させる分布より安

$s = 0.411, \alpha_0^{cr} : \mu_0 = \tau_0 = 0 \mid \mu_0^{cr} : \alpha_0 = \tau_0 = 0$
 $H_b = 1, H_t = H_x = 0, \phi_b = \phi_t = \phi_x = 0$
(—:Present theory, -----:Strip theory)

図 11 限界迎え角と限界反り比（翼幅方向の定常負荷分布の影響）

定であると言える。一方、図は省略するが、二回反射 ($s = 0.311$) の場合、 $\sigma \simeq \pm 0.14$ のときに $|\alpha_0^{cr}|$ と $|\mu_0^{cr}|$ は最小となり、 $s = 0.411$ の場合よりフラッタ余裕度が小さくなる。

〔連成振動 (H_x) の影響〕 図 12, 図 13 に翼弦方向振動 a_x が $\alpha_0^{cr}, \mu_0^{cr}$ と翼間位相差との関係に及ぼす影響を示す。計算条件は、図 11 と同様の条件で翼幅方向定常負荷分布は一定 ($A_1 = M_1 = T_1 = 0$)、振動振幅は $H_b = 1, H_t = 0$ の場合において、 H_x を 0.0, 0.5, -0.5 とした。フラッタ余裕度は一回反射の場合より二回反射の場合の方が小さくなり、図 11 の場合と同じ σ で $|\alpha_0^{cr}|$ と $|\mu_0^{cr}|$ が最小になる。特に、一回反射 ($s = 0.411$) では、 $\alpha_0^{cr}, \mu_0^{cr}$ 共に $H_x = -0.5$ の場合に最も不安定となるが (図 12)、二回反射 ($s = 0.311$) の場合では、 α_0^{cr} は H_x に依存せず、 μ_0^{cr} は $H_x = 0.5$ の場合に最も不安定となる (図 13)。これらの H_x の影響の違いは、 x_e と C_W^t との関係を考察した場合と同様に、 H_x の仕事への寄与を表す C_W^{bz} を C_W^{bz*} と C_W^{bzr} に分けて考えると理解し易い。二回反射の場合、 $\tilde{F}_x$ ($\tilde{F}$ での a_x による効果) は、式 (17), (18) の右辺の χ_x が関与する項によって決まり、特に、 $\chi_x(x_L)e^{i\psi^+}$ の項が $\tilde{F}_x$ の仕事への寄与を支配する。本計算例のように ω が小さいとき、 $\tilde{\Delta}_{fm}(x_{U1})\chi_x(x_L)e^{i\psi^-} + \tilde{\Delta}_{fm}(x_{D1})\chi_x(x_L)e^{i\psi^+} \simeq 0$ となるため、二回反射の場合には C_W^{bzr} は非常に小さくなる。

$s = 0.411$, $A_1 = M_1 = T_1 = 0$, H_x 以外は図 11 の条件と同じ (—:Present theory, - - -:Strip theory)

図 12 限界迎え角と限界反り比 (翼弦方向変位の影響)

したがって、迎え角成分 (二回反射) では $C_{W\alpha}^{bz*}$, $C_{W\alpha}^{bzr}$ が共に小さいため、 α_0^{cr} における H_x の影響も小さい。一方、反り成分においては、一回反射では $|C_{W\mu}^{bz*}| > |C_{W\mu}^{bzr}|$ 、二回反射では $|C_{W\mu}^{bz*}| < |C_{W\mu}^{bzr}|$ となる上に、一回反射の $C_{W\mu}^{bz*}$ は正、二回反射の $C_{W\mu}^{bzr}$ は負である。したがって、 H_x の μ_0^{cr} への影響は、一回反射と二回反射とは異なることになる。

[連成振動 (ϕ_i) の影響] 一般に、曲げねじり連成振動のフラッタ余裕度はモード間位相差 ϕ_b , ϕ_t に依存する。図は省略するが、 $\phi_b = 0$, $\phi_t = 180^\circ$ のように曲げ振動とねじり振動が逆位相の場合には、純曲げ振動と比べてフラッタ余裕度は大きく、不安定範囲が α_0^{cr} では負側、 μ_0^{cr} では正側に移動する。

5. 結論

本報では、二重線形理論を超音速軸流速度で作動する三次元超音速直線翼列に拡張し、能率的に非定常空気力と翼列設計変数との関係を把握できる手法を定式化した。これに基づく数値計算によって、定常翼面圧力差分布および非定常空気力の諸係数と翼列設計因子との関係を明らかにした。数値計算結果から以下の結論を得た。

- ストリップ理論値は良好に三次元理論値を近似することができる。

$s = 0.311$, $A_1 = M_1 = T_1 = 0$, H_x 以外は図 11 の条件と同じ (—:Present theory, - - -:Strip theory)

図 13 限界迎え角と限界反り比 (翼弦方向変位の影響)

- 迎え角, 反り, 厚みは翼根から振動振幅の大きい翼端に向かって減少する分布の方が増加する分布よりフラッタ余裕度が大きい。
- ねじり振動における非定常空気力仕事は、ねじり軸位置に大きく影響を受け、迎え角, 反りの寄与による仕事と厚みの寄与による仕事ではねじり軸位置の効果が異なる。
- 翼弦方向変位のフラッタ限界への影響はマッハ面反射線様式に強く依存する。

文 献

- (1) Kielb, R.E. and Ramsey, J.K., *ASME J. of Turbomachinery*, 111(1989), 462.
- (2) 難波・花田, 機論, 58-548, B(1992), 1142.
- (3) 難波・花田, 機論, 58-548, B(1992), 1150.
- (4) 難波・花田, 機論, 58-553, B(1992), 2757.
- (5) Namba, M. and Toshimistu, K., *J. of Sound and Vibration*, 148(1)(1991), 69.