双対空間を用いた Hybrid 形上流化有限要素法*

(第1報, 基礎理論と離散化ナブラ演算子)

棚 橋 隆 彦^{*1}, 沖 良 篤^{*2}

New Hybrid-Streamline-Upwind Finite-Element Method in a Dual Space

(1st Report, Fundamental Theory and Discrete Del Operator)

Takahiko TANAHASHI and Yoshiatsu OKI

In this paper, we present a new hybrid-streamline-upwind finite-element method, which is based on the finite analytic method developed in the field of the finite difference method. In order to obtain an optimal shape function, we introduce an adjoint differential operator to the differential operator for a steady advection-diffusion equation. The shape functions which satisfy these differential operators are mutually dual. One of them interpolates accurately the functions appearing in convection-dominated flows, the other becomes a hybrid-streamline-upwind weight function. Furthermore, we define a discrete del operator for the reduction of memory storage in the computer. As a result, we achieve simplicity of formulation and high-speed calculation of the finite-element method.

Key Words: Dual Space, Hybrid Streamline Upwind, Finite-Element Method, Discrete Del Operator, Finite Analytic Method

1. 緒 言

流れの数値解析での最大課題は、高 Reynolds 数における乱流をいかに精度よく予測するかにある。このために差分法、有限体積法、有限要素法の分野でそれぞれ高精度化の技術が発達している。差分法の分野では3次精度以上の風上差分法、Leonard(1979)のQUICK法⁽¹⁾、有限体積法の分野ではVan Leer(1979)のMUSCL法⁽²⁾、Patanker(1980)のSIMPLE法⁽³⁾、有限要素法の分野ではHughesら(1977)のSUPG法⁽⁴⁾、Dukowicz-Ramshaw(1979)のBTD法⁽⁵⁾、Tanahashiら(1990)のGS-MAC法⁽⁶⁾、Tabata-Fujita(1991)の上流下流要素選択型手法⁽⁷⁾、Kakuda-Tosaka(1992)の指数関数型Petrov-Galerkin有限要素法⁽⁸⁾などがある。特に、有限要素法の分野でこの上流化技術が他の分野に比較して遅れている。最近、差分法の分野でChen(1987)によるFAM(Finite Analytic Method)⁽⁹⁾が注目されている。この手法は定常移流拡散方程式の局所厳密解を用いるもので、比較的プログラミングが容易で高 Reynolds 数に安定であるのが特長である。

本論文の目的はこの手法を有限要素法に拡張するこ

とにある。その結果、双対空間を用いることにより補間関数の高精度化と重み関数の上流化が同時に達成できることがわかった。また、双対空間上で定義された離散化ナブラ演算子と随伴離散化ナブラ演算子を導入することにより、有限要素法における拡散行列を排除し、有限要素法の低容量化と高速化を実現する。また、安定化の基本になるのが、連続の方程式に対する要素平均と、Navier-Stokes方程式に対する節点平均の概念である。すなわち、質量保存と運動量保存を別々の視点で保存させ、これらを混合して解くことにある。これは一種のMAC法の非構造格子への一般化である。本論文ではこれらの離散化理論について議論を行う。

図1 双対空間

* 原稿受付 平成5年5月7日。

^{*1} 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

^{*2} 正員, 慶應義塾大学大学院。

2. Hybrid 型 FEM による定式化

物理量 ϕ の輸送と拡散を表す保存形の移流拡散方程式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = s \quad (1)$$

と書ける。ここで流束 $\mathbf{j}$ は移流項と拡散項の和からなり、

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}\phi - \Gamma \nabla \phi \quad (2)$$

である。 $\mathbf{v}$ は移流速度、 Γ は拡散係数、 s はソース項である。質量・運動量・エネルギー・乱流エネルギー・乱流エネルギーの消費率等はすべて上記の方程式系にまとめることができる(表1参照)。次に、要素平均値を

$$f_e = \langle f \rangle_e = \frac{1}{\Omega_e} \int f d\Omega \quad (3)$$

で定義する。これは要素に隣接する各節点値の平均値を要素の中心に定義することを表している。そして f_e は各要素内で一定である。要素が十分小さい場合、この近似は高精度に成立する。よって移流速度 $\mathbf{v}$ と拡散

係数 Γ にこの近似を用いる。ここで、2つの定常移流拡散方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{ただし, } \mathbf{j} = \mathbf{v}_e \phi - \Gamma_e \nabla \phi \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^* = 0 \quad \text{ただし, } \mathbf{j}^* = \mathbf{v}_e \phi^* + \Gamma_e \nabla \phi^* \quad (5)$$

を考える。 $\mathbf{j}^*$ を $\mathbf{j}$ の随伴流束と定義する。これらの定常移流拡散方程式を局所的に(エレメントレベルで)満足する解析解から作られる形状関数を L_a 、 L_a^* とする。 L_a^* は形状関数 L_a の随伴形状関数である。これらの形状関数を基底関数として ϕ と ϕ^* をそれぞれ

$$\phi = L_a \phi_a, \quad \phi^* = L_a^* \phi_a^* \quad (6)$$

と展開する。ただし添字 a は和の規約に従うものとする。ここで図1に示された双対空間を考える。つぎに非定常移流拡散方程式を有限要素法で定式化する。重み関数を ϕ^* として領域積分を行うと

$$\left(\phi^*, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + (\phi^*, \nabla \cdot \mathbf{j}) = (\phi^*, s) \quad (7)$$

表1 移流拡散方程式

	ϕ	$\mathbf{j}$	s
Mass	ρ	$\rho \mathbf{v}$	—
Momentum	$\rho \mathbf{v}$	$\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{T}$	$\rho \mathbf{b}$
Energy	ρe	$\rho e \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$	$\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r$
Turbulent energy	ρk	$\rho k \mathbf{v} - \Gamma_k \nabla k$	ρS_k
Dissipation rate of turbulent energy	$\rho \varepsilon$	$\rho \varepsilon \mathbf{v} - \Gamma_\varepsilon \nabla \varepsilon$	ρS_ε

表2 ξ_a, η_a, ζ_a

a	ξ_a	η_a	ζ_a
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

図2 双対空間での形状関数 L_a と L_a^*

図3 六面体要素

を得る. ここで $(\cdot, \cdot)$ は内積を意味し, その定義式は

$$(f, g) = \int f g d\Omega \quad (8)$$

である. 特に $g = 1$ として積分を要素内に限れば, 要素平均は

$$f_e = \langle f \rangle_e = \frac{1}{\Omega_e} (f, 1) \quad (9)$$

で与えられる. 上記の有限要素法と Galerkin 有限要素法との違いは, 補間関数として形状関数 L_a , 重み関数として双対空間内の形状関数 L_a^* を用いていることである. L_a, L_a^*, N_a の関係を 1 次元で示すと図 2 の通りである. ここで N_a は線形補間の形状関数である. 部分積分をして ϕ_a^* の任意性を用いると有限要素法の定式化式

$$M_{ab} \phi_b + K_{ab} \phi_b = f_a \quad (10)$$

が導ける. ここで質量行列 M_{ab} , 移流拡散行列 K_{ab} , ソース項と境界項の和 f_a はそれぞれ

$$M_{ab} = \int L_a^* L_b d\Omega \quad (11)$$

$$K_{ab} = \int (\mathbf{v}_e L_a^* + \Gamma_e \nabla L_a^*) \nabla L_b d\Omega \quad (12)$$

$$f_a = \int (L_a^*, s) d\Omega + \int_{\Gamma} \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial n} L_a^* d\Gamma \quad (13)$$

である. これらの係数行列は要素平均値の概念を用いて後に単純化される.

3. 形状関数の具体的表示

局所的に $\mathbf{v}_e$ と Γ_e が一定の場合, 各要素で $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満足する解析解から形状関数 L_a は容易に求まる⁽¹⁰⁾. その結果は

$$L_a = \frac{\xi_a(e^{\lambda\xi} - e^{-\lambda\xi_a})}{(e^\lambda - e^{-\lambda})} \cdot \frac{\eta_a(e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta_a})}{(e^\mu - e^{-\mu})} \cdot \frac{\zeta_a(e^{\nu\zeta} - e^{-\nu\zeta_a})}{(e^\nu - e^{-\nu})} \quad (14)$$

となる. ただし, λ, μ, ν はそれぞれ x, y, z 方向のセル Reynolds 数の半値で

$$\lambda = \frac{u_e \Delta \bar{x}}{2\Gamma_e}, \quad \mu = \frac{v_e \Delta \bar{y}}{2\Gamma_e}, \quad \nu = \frac{w_e \Delta \bar{z}}{2\Gamma_e} \quad (15)$$

である. ここで, $\mathbf{v}_e = (u_e, v_e, w_e)$ である. ただし, $\Delta \bar{x}, \Delta \bar{y}, \Delta \bar{z}$ は, 要素に対する適切な平均値である. そして分母の 2 は計算の便宜上の係数である. 随伴形状関数 L_a^* は随伴関係式

$$L_a^*(\lambda, \mu, \nu) = L_a(-\lambda, -\mu, -\nu) \quad (16)$$

により求まる. そして, $\mathbf{v}_e \rightarrow \mathbf{0}$ のとき, これらの形状関数は線形補間の形状関数 N_a と一致し, 漸近式

$$\lim_{\mathbf{v}_e \rightarrow \mathbf{0}} L_a = \lim_{\mathbf{v}_e \rightarrow \mathbf{0}} L_a^* = N_a \quad (17)$$

を満足する. 3 次元六面体要素の場合の形状関数 N_a は

$$N_a = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta) \quad (18)$$

である. ξ_a, η_a, ζ_a の値は表 2 の通りである (図 3 参照).

4. 離散化ナブラ演算子

一般にナブラ演算子 ∇ はベクトル量で座標系に依存しない量である. よって保存則を表す時間発展方程式は時間微分 $\partial/\partial t$ と空間微分 ∇ のみを用いて表すことができる. この概念を離散化された方程式の空間にも導入する. そのために離散化ナブラ演算子を形状関数の勾配の要素平均値として

$$\nabla_a = \frac{1}{\Omega_e} \int \nabla L_a d\Omega \quad (19)$$

で定義する. 同様に随伴離散化ナブラ演算子を

$$\nabla_a^* = \frac{1}{\Omega_e} \int \nabla L_a^* d\Omega \quad (20)$$

で定義する. ∇ が座標系に依存しないベクトル量であるから, ∇_a と ∇_a^* も離散化の方法に依存しない量である. よって有限要素法の定式化においてこの 2 つの演算子を用いると非常に便利である. 例えば, スカラー積, ベクトル積, テンソル積を代表して表すスター積 $\star$ に対して, $\mathbf{v} = L_a \mathbf{v}_a$ のとき,

$$\nabla_a \star \mathbf{v}_a = \frac{1}{\Omega_e} \int \nabla \star \mathbf{v} d\Omega \quad (21)$$

$\mathbf{v}^* = L_a^* \mathbf{v}_a^*$ のとき,

$$\nabla_a^* \star \mathbf{v}_a^* = \frac{1}{\Omega_e} \int \nabla \star \mathbf{v}^* d\Omega \quad (22)$$

が成立する. すなわち, ∇_a は基底関数に L_a を用いたとき, ∇_a^* は基底関数に L_a^* を用いたとき対応する (表 3 参照). そして L_a が $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ の解であることから, 形状関数 L_a は移流項の支配的な流れの補間関数に適する. 同様にして, L_a^* が $\nabla \cdot \mathbf{j}^* = 0$ の解であることから, 随伴形状関数 L_a^* は適切に上流化された重み関数⁽¹¹⁾ となる. そして

$$\mathbf{v}_e L_a^* + \Gamma_e \nabla L_a^* = f^*(y, z) \mathbf{i} + g^*(z, x) \mathbf{j} + h^*(x, y) \mathbf{k} \quad (23)$$

となる. ここで, f^*, g^*, h^* は演算結果の適切な関数形である. すなわち, 各成分は自分自身の座標を含まない. このことは係数行列を単純化するのに役立つ.

表 3 離散化ナブラ演算子

Gradient	Divergence	Rotation
∇f	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	$\nabla \times \mathbf{v}$
$\nabla_a f_a$	$\nabla_a \cdot \mathbf{v}_a$	$\nabla_a \times \mathbf{v}_a$
$\nabla_a^* f_a^*$	$\nabla_a^* \cdot \mathbf{v}_a^*$	$\nabla_a^* \times \mathbf{v}_a^*$

5. 係数行列の簡易計算法

5・1 質量行列 要素が十分小さい場合、要素内の関数は特異点を除いてあまり変化しない。このとき要素平均の近似は高精度に成立する。また形状関数は性質 $\sum_b L_b = 1$ を満足する。よって集中化された質量行列は

$$\overline{M}_{ab} = \left(\sum_b M_{ab} \right) \delta_{ab} = \left(\int L_a^* d\Omega \right) \delta_{ab} = \Omega_e \langle L_a^* \rangle_e \delta_{ab} \quad (24)$$

と表せる。ここで、 δ_{ab} は Kronecker のデルタである。3次元の場合、積分結果は

$$\overline{M}_{ab} = \frac{V_e}{8} \xi_a \eta_a \zeta_a \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{e^{\lambda \xi_a}}{\sinh \lambda} \right) \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{e^{\mu \eta_a}}{\sinh \mu} \right) \left(-\frac{1}{\nu} + \frac{e^{\nu \zeta_a}}{\sinh \nu} \right) \delta_{ab} \quad (25)$$

となる。そして、Taylor 展開により近似の程度に応じて

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ab} &\approx \frac{V_e}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \lambda \xi_a \right) \left(1 + \frac{1}{3} \mu \eta_a \right) \left(1 + \frac{1}{3} \nu \zeta_a \right) \delta_{ab} \\ &\approx \frac{V_e}{8} \left[1 + \frac{1}{3} (\lambda \xi_a + \mu \eta_a + \nu \zeta_a) \right] \delta_{ab} \\ &\approx \frac{V_e}{8} \delta_{ab} \end{aligned} \quad (26)$$

が導ける。セル Reynolds 数が小さい場合、この近似はきわめて有効である。特に、 $\langle N_a \rangle_e = 1/8$ であるから、 $[\dots] \approx 1$ はかなり良い近似で成立する。

5・2 移流拡散行列 $\mathbf{v}_e L_a^* + \Gamma_e \nabla L_a^*$ を要素平均値で近似する。すなわち、

$$\langle \mathbf{v}_e L_a^* + \Gamma_e \nabla L_a^* \rangle_e = \mathbf{v}_e \langle L_a^* \rangle_e + \Gamma_e \nabla_a^* \quad (27)$$

となる。これは定ベクトルであるから積分の外に出すことができる。その結果、移流拡散行列は

$$K_{ab} = \Omega_e \langle \langle L_a^* \rangle_e \mathbf{v}_e + \Gamma_e \nabla_a^* \rangle \cdot \nabla_b \quad (28)$$

と表せる。ここで、 $\nabla_a^* \cdot \nabla_b$ は離散化 Laplacian の行列表示である。そして、 ∇^2 には $-\nabla_a^* \cdot \nabla_a$ が対応する。すなわち、Laplacian の離散化は双対空間の離散化ナブラ演算子の内積に負の符号をつけたものとして表示できる。さらに、形状関数 N_a から作られる $\nabla_a \cdot \nabla_b$ は対称行列であるが、形状関数 L_a^* と L_b から作られる $\nabla_a^* \cdot \nabla_b$ は対称行列でない。そして、随伴離散化ナブラ演算子は随伴関係式

$$\nabla_a^*(\lambda, \mu, \nu) = \nabla_a(-\lambda, -\mu, -\nu) \quad (29)$$

によって求まる。つぎに離散化ナブラ演算子の具体的表示を求める。

6. 離散化ナブラ演算子の近似式

離散化ナブラ演算子の近似式を求めるには Jacobi 行列 $[J_{ij}]$ の逆行列 $[J_{ij}]^{-1}$ が必要となる。これは

$$[J_{ij}]^{-1} = \frac{1}{J} [A_{ij}], \quad J = \det(J_{ij}) \quad (30)$$

で表せる。ここで、 $[A_{ij}]$ は $[J_{ij}]$ の余因子行列である。このとき、離散化ナブラ演算子 i 成分は

$$(\nabla_a)_i = \frac{1}{\Omega_e} \int (A_{ij} \frac{\partial L_a}{\partial \xi_j}) d\Omega(\xi), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (31)$$

と表せる。ただし、 j については和をとるものとする。 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi, \eta, \zeta)$ である。ここで要素平均を用いると、近似式

$$(\nabla_a)_i = \frac{8}{\Omega_e} \langle A_{ij} \rangle_e \langle \frac{\partial L_a}{\partial \xi_j} \rangle_e \quad (32)$$

得る。よって、余因子行列と形状関数の微分に関する要素平均が求まればよい。つぎの節でこれらを求めることにする。

6・1 余因子行列の要素平均 Jacobian は物理空間と計算空間の体積要素の比を表し、

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \quad (33)$$

で定義される。ただし、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ である。ここで、Jacobian を要素平均で近似すると

$$\begin{aligned} J_e &= \langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \rangle_e \approx \langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \rangle_e \cdot \langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \rangle_e \times \langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \rangle_e \\ &= \frac{1}{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta} (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \cdot (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta \end{aligned} \quad (34)$$

を得る。ここで、 $(\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi$ はベクトル $\Delta \mathbf{r}$ の ξ 方向の平均値で例えば

$$(\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi = \frac{1}{4} \{ (\Delta \mathbf{r})_{21} + (\Delta \mathbf{r})_{34} + (\Delta \mathbf{r})_{78} + (\Delta \mathbf{r})_{65} \} \quad (35)$$

である。ここで、 $(\Delta \mathbf{r})_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ である。 $(\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta$ と $(\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta$ もそれぞれ η 方向と ζ 方向の平均値である (図4参照)。

このとき、余因子行列の成分は

$$(A_{11}, A_{21}, A_{31}) = \mathbf{S}^\xi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \quad (36)$$

$$(A_{12}, A_{22}, A_{32}) = \mathbf{S}^\eta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \quad (37)$$

$$(A_{13}, A_{23}, A_{33}) = \mathbf{S}^\zeta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \quad (38)$$

で与えられる。ここで $\mathbf{S}^\xi$, $\mathbf{S}^\eta$, $\mathbf{S}^\zeta$ は ξ , η , ζ 軸に垂直な要素の表面積である。これらの要素平均は、

$$\langle \mathbf{S}^\xi \rangle_e = \frac{1}{\Delta \eta \Delta \zeta} (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta \quad (39)$$

$$\langle \mathbf{S}^\eta \rangle_e = \frac{1}{\Delta \zeta \Delta \xi} (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\zeta \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \quad (40)$$

$$\langle \mathbf{S}^\zeta \rangle_e = \frac{1}{\Delta \xi \Delta \eta} (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\xi \times (\Delta \bar{\mathbf{r}})_\eta \quad (41)$$

となる。よって、これより余因子行列の成分が求まる。また、面積の要素平均を各軸方向の+面と-面の平均値から

$$\langle \mathbf{S}^\xi \rangle_e = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^{\xi+} + \mathbf{S}^{\xi-}) \quad (42)$$

$$\langle \mathbf{S}^\eta \rangle_e = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^{\eta+} + \mathbf{S}^{\eta-}) \quad (43)$$

$$\langle \mathbf{S}^\zeta \rangle_e = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^{\zeta+} + \mathbf{S}^{\zeta-}) \quad (44)$$

と求めてもよい(図5参照). ここで有向面積 $S^{\xi\pm}$ はそれぞれの面の対角ベクトルの外積の1/2として求まる.

6・2 形状関数の微分と要素平均

形状関数は

$$L_a = \frac{\xi_a(e^{\lambda\xi} - e^{-\lambda\xi_a})}{2\sinh\lambda} \cdot \frac{\eta_a(e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta_a})}{2\sinh\mu} \cdot \frac{\zeta_a(e^{\nu\zeta} - e^{-\nu\zeta_a})}{2\sinh\nu} \quad (45)$$

であるから, 形状関数とその微分の要素平均は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L_a}{\partial \xi} \right\rangle_e &= \frac{\xi_a \eta_a \zeta_a}{8} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu\eta_a}}{\sinh\mu} \right) \left(\frac{1}{\nu} - \frac{e^{-\nu\zeta_a}}{\sinh\nu} \right) \\ &\approx \frac{\xi_a}{8} \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L_a}{\partial \eta} \right\rangle_e &= \frac{\xi_a \eta_a \zeta_a}{8} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\xi_a}}{\sinh\lambda} \right) \left(\frac{1}{\nu} - \frac{e^{-\nu\zeta_a}}{\sinh\nu} \right) \\ &\approx \frac{\eta_a}{8} \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L_a}{\partial \zeta} \right\rangle_e &= \frac{\xi_a \eta_a \zeta_a}{8} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\xi_a}}{\sinh\lambda} \right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu\eta_a}}{\sinh\mu} \right) \\ &\approx \frac{\zeta_a}{8} \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \end{aligned} \quad (48)$$

と求まる. ここで, つぎの積分公式を用いた. すなわち,

$$f(\lambda, \xi) = \frac{\xi_a(e^{\lambda\xi} - e^{-\lambda\xi_a})}{\sinh\lambda}, \quad (49)$$

$$g(\lambda, \xi_a) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\xi_a}}{\sinh\lambda} \approx \xi_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \quad (50)$$

とすると,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi = 1, \quad (51)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f d\xi = g \quad (52)$$

が成立する. 特に, $\lambda, \mu, \nu \rightarrow 0$ のとき,

$$\left\langle \frac{\partial L_a}{\partial \xi_j} \right\rangle_e = \frac{\xi_{ja}}{8}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (53)$$

と単純化される. しかし, この近似は計算を非常に簡単化するけれども, 不安定モードの hourglass モードを発生するので避けるべきである.

6・3 離散化ナブラ演算子

式(46)~(48)を式(32)に代入すると, 上流化された離散化ナブラ演算子の各成分は, hourglass モードを発生しない近似として

$$\begin{aligned} (\nabla_a)_x = \frac{1}{V_e} \left[\right. &\langle A_{11} \rangle_e \xi_a \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \\ &+ \langle A_{12} \rangle_e \eta_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \\ &+ \langle A_{13} \rangle_e \zeta_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left. \right] \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_a)_y = \frac{1}{V_e} \left[\right. &\langle A_{21} \rangle_e \xi_a \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \\ &+ \langle A_{22} \rangle_e \eta_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \\ &+ \langle A_{23} \rangle_e \zeta_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left. \right] \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_a)_z = \frac{1}{V_e} \left[\right. &\langle A_{31} \rangle_e \xi_a \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \\ &+ \langle A_{32} \rangle_e \eta_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\nu}{3} \zeta_a \right) \\ &+ \langle A_{33} \rangle_e \zeta_a \left(1 - \frac{\lambda}{3} \xi_a \right) \left(1 - \frac{\mu}{3} \eta_a \right) \left. \right] \quad (56) \end{aligned}$$

と求まる. この演算子を時間進行に関して毎回計算するのは得策でないから, $\lambda, \mu, \nu = 0$ の時間に依存しない部分と時間に依存する部分に分離しておくといふ. すなわち,

$$\begin{aligned} (\nabla_a)_x &= (\nabla_a)_{x0} - \frac{1}{3V_e} \left[\alpha_x(\xi_a \eta_a) + \beta_x(\eta_a \zeta_a) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_x(\zeta_a \xi_a) \right] + \frac{1}{9V_e} \delta_x(\xi_a \eta_a \zeta_a) \end{aligned} \quad (57)$$

$$(\Delta r)_{ij} = r_i - r_j$$

図4 $(\Delta r)_{ij}$ の定義式

図5 面積の評価 $\langle S^\xi \rangle_e = \frac{1}{2}(S^{\xi+} + S^{\xi-})$

表4 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値

	α	β	γ	δ
x	$\alpha_x = \lambda\langle A_{12}\rangle_e + \mu\langle A_{11}\rangle_e$	$\beta_x = \mu\langle A_{13}\rangle_e + \nu\langle A_{12}\rangle_e$	$\gamma_x = \nu\langle A_{11}\rangle_e + \lambda\langle A_{13}\rangle_e$	$\delta_x = \mu\nu\langle A_{11}\rangle_e + \nu\lambda\langle A_{12}\rangle_e + \lambda\mu\langle A_{13}\rangle_e$
y	$\alpha_y = \lambda\langle A_{22}\rangle_e + \mu\langle A_{21}\rangle_e$	$\beta_y = \mu\langle A_{23}\rangle_e + \nu\langle A_{22}\rangle_e$	$\gamma_y = \nu\langle A_{21}\rangle_e + \lambda\langle A_{23}\rangle_e$	$\delta_y = \mu\nu\langle A_{21}\rangle_e + \nu\lambda\langle A_{22}\rangle_e + \lambda\mu\langle A_{23}\rangle_e$
z	$\alpha_z = \lambda\langle A_{32}\rangle_e + \mu\langle A_{31}\rangle_e$	$\beta_z = \mu\langle A_{33}\rangle_e + \nu\langle A_{32}\rangle_e$	$\gamma_z = \nu\langle A_{31}\rangle_e + \lambda\langle A_{33}\rangle_e$	$\delta_z = \mu\nu\langle A_{31}\rangle_e + \nu\lambda\langle A_{32}\rangle_e + \lambda\mu\langle A_{33}\rangle_e$

表5 係数 $(A_{ij})_0$

$$\begin{aligned}
 (A_{11})_0 &= \frac{1}{32}\{(y_{53} + y_{64})(z_{17} + z_{28}) - (z_{53} + z_{64})(y_{17} + y_{28})\} \\
 (A_{12})_0 &= \frac{1}{32}\{(y_{28} + y_{35})(z_{17} + z_{46}) - (z_{28} + z_{35})(y_{17} + y_{46})\} \\
 (A_{13})_0 &= \frac{1}{32}\{(y_{46} + y_{82})(z_{53} + z_{17}) - (z_{46} + z_{82})(y_{53} + y_{17})\}
 \end{aligned}$$

表6 置換表

$(A_{11})_0$	$(A_{12})_0$	$(A_{13})_0$	y	z	$(\nabla_a)_{x0}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$(A_{21})_0$	$(A_{22})_0$	$(A_{23})_0$	z	x	$(\nabla_a)_{y0}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$(A_{31})_0$	$(A_{32})_0$	$(A_{33})_0$	x	y	$(\nabla_a)_{z0}$

表7 離散化ナブラ演算子の x 成分 $(\nabla_a)_{x0}$ ($z_{ij} = z_i - z_j$)

$$\begin{aligned}
 (\nabla_1)_{x0} &= \frac{1}{16V_e}\{(z_{53} + z_{64})y_{28} + (z_{42} + z_{86})y_{53} + (z_{52} + z_{83})y_{64}\} \\
 (\nabla_2)_{x0} &= \frac{1}{16V_e}\{(z_{63} + z_{54})y_{71} - (z_{61} + z_{74})y_{53} - (z_{31} + z_{75})y_{64}\} \\
 (\nabla_3)_{x0} &= \frac{1}{16V_e}\{-(z_{42} + z_{86})y_{71} - (z_{74} + z_{61})y_{28} - (z_{72} + z_{81})y_{64}\} \\
 (\nabla_4)_{x0} &= \frac{1}{16V_e}\{-(z_{83} + z_{52})y_{71} - (z_{31} + z_{75})y_{28} + (z_{81} + z_{72})y_{53}\} \\
 (\nabla_5)_{x0} &= -(\nabla_3)_{x0} & (\nabla_6)_{x0} &= -(\nabla_4)_{x0} \\
 (\nabla_7)_{x0} &= -(\nabla_1)_{x0} & (\nabla_8)_{x0} &= -(\nabla_2)_{x0}
 \end{aligned}$$

$$(\nabla_a)_y = (\nabla_a)_{y0} - \frac{1}{3V_e} [\alpha_y(\xi_a\eta_a) + \beta_y(\eta_a\zeta_a) + \gamma_y(\zeta_a\xi_a)] + \frac{1}{9V_e}\delta_y(\xi_a\eta_a\zeta_a) \quad (58)$$

$$(\nabla_a)_z = (\nabla_a)_{z0} - \frac{1}{3V_e} [\alpha_z(\xi_a\eta_a) + \beta_z(\eta_a\zeta_a) + \gamma_z(\zeta_a\xi_a)] + \frac{1}{9V_e}\delta_z(\xi_a\eta_a\zeta_a) \quad (59)$$

と表せる。ただし、係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は表4の通りである。ここで、 $L_a = N_a$ として、 $(A_{ij})_e = (A_{ij})_0$ で原点で近似すると、よく知られた公式

$$(\nabla_a)_{x0} = \frac{1}{V_e} [(A_{11})_0\xi_a + (A_{12})_0\eta_a + (A_{13})_0\zeta_a] \quad (60)$$

$$(\nabla_a)_{y0} = \frac{1}{V_e} [(A_{21})_0\xi_a + (A_{22})_0\eta_a + (A_{23})_0\zeta_a] \quad (61)$$

$$(\nabla_a)_{z0} = \frac{1}{V_e} [(A_{31})_0\xi_a + (A_{32})_0\eta_a + (A_{33})_0\zeta_a] \quad (62)$$

$$16V_e = [(\Delta\mathbf{r})_{71} + (\Delta\mathbf{r})_{82}] \cdot [(\Delta\mathbf{r})_{46} \times (\Delta\mathbf{r})_{35}] + [(\Delta\mathbf{r})_{35} + (\Delta\mathbf{r})_{46}] \cdot [(\Delta\mathbf{r})_{71} \times (\Delta\mathbf{r})_{82}] \quad (63)$$

が導かれる。ここで、係数 $(A_{ij})_0$ は表5の通りである。表5以外の成分は置換表6により求まる。表5の結果を用いて離散化ナブラ演算子の x 成分を具体的に求めると表7のようになる。 $a = 1, 2, \dots, 8$ のうち最初の4個が求まれば、残りの4個は対称性により求まる(Belytschkoら, 1984)⁽¹²⁾。また、 x 成分が求まれば y 成分および z 成分は x, y, z の置換によって求まる(表6参照)。

6・4 行列方程式の単純化 離散化ナブラ演算子は

$$\nabla_a = (\nabla_a)_0 + \epsilon_a \quad (64)$$

$$\nabla_a^* = (\nabla_a)_0 + \epsilon_a^* \quad (65)$$

と近似できる。ここで、

$$\epsilon_a = \frac{-1}{3V_e} \{ \alpha(\xi_a\eta_a) + \beta(\eta_a\zeta_a) + \gamma(\zeta_a\xi_a) \} + \frac{1}{9V_e} \delta(\xi_a\eta_a\zeta_a), \quad (66)$$

である。ただし、 $i = x, y, z$ として

$$\alpha = (\alpha_i), \quad \beta = (\beta_i), \quad (67)$$

$$\gamma = (\gamma_i), \quad \delta = (\delta_i) \quad (68)$$

である。さらに、随伴関係式

$$\epsilon_a^*(\lambda, \mu, \nu) = \epsilon_a(-\lambda, -\mu, -\nu) \quad (69)$$

が成立する。このとき、拡散行列は

$$(\nabla_a)^* \cdot (\nabla_b) = (\nabla_a)_0 \cdot (\nabla_b)_0 + \Gamma_{ab} \quad (70)$$

と近似できる。ここで、 Γ_{ab} は上流化とhourglassモードを抑制する行列で

$$\Gamma_{ab} = (\nabla_a)_0 \cdot \epsilon_b + \epsilon_a^* \cdot (\nabla_b)_0 + \epsilon_a^* \cdot \epsilon_b \quad (71)$$

である。 λ, μ, ν が小さいとき $\epsilon_a^* \cdot \epsilon_b \ll 1$ で省略可能である。このとき、行列方程式は非常に簡単な節点でのスカラー方程式となり、

$$\dot{\phi}_a + l_a(\mathbf{v}_e \cdot \nabla_b)\phi_b + \nu_e \nabla_a^* \cdot \nabla_b \phi_b = s_a \quad (72)$$

と近似できる。ここで、

$$l_a = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T, \quad (73)$$

$$\nu_e = \frac{\Gamma_e}{\langle L_a^* \rangle_e}, \quad s_a = \frac{f_a}{\Omega_e \langle L_a^* \rangle_e} \quad (74)$$

である。この方程式は ∇_a^* で移流項が上流化され、 Γ_{ab} でhourglassモードが抑制されている。

7. 要素平均と節点平均

以上、スカラーの移流拡散方程式の上流化について調べてきたが、速度場は連続の方程式と運動の方程式の解として求まる。非圧縮流体の場合staggered格子を用いることによって速度場と圧力場の振動が抑止できる。有限要素法においては一般にALE格子が用いられる。この格子を用いると圧力振動を生じる。ここでは要素平均と節点平均の概念をALE格子に導入し、この圧力振動を防ぎstaggered格子の一般化を図る。このため、質量保存は各要素ごとに満足させるため要素平均で計算する。すなわち、重み関数が1の要素平均で離散化ナブラ演算子を用いて記述すると、

$$\nabla_a \cdot \mathbf{v}_a = \frac{1}{\Omega_e} \int (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega = 0 \quad (75)$$

となる。一方、運動の方程式は各節点ごとに考える。今、節点 a に着目する。節点 a での運動量のバランスを節点平均値で定義する。関数 g の節点平均値 $\langle g \rangle_e$ とは重み関数を形状関数 N_a に選んだ平均である。すなわち、関数 g の節点 a での平均値を

$$\langle g \rangle_a = \frac{\int N_a g d\Omega}{\int N_a d\Omega} \quad (76)$$

で定義する(棚橋, 1993)⁽¹¹⁾。積分領域は形状関数 N_a の定義領域である。これを双対空間で行うには、運動量の方程式に L_a^* をかけ領域積分した結果、 $\int L_a^* d\Omega$ で割ればよい。すなわち、

$$\langle \text{運動量方程式} \rangle_a = \frac{\int L_a^* (\text{運動量方程式}) d\Omega}{\int L_a^* d\Omega} \quad (77)$$

により求まる。これは図6において、要素A, B, C, Dの寄与を節点1に加算することによって実行される。

8. 結 言

本論文では、移流項の卓越した移流拡散方程式を安定にかつ高精度に解くために、双対空間を用いた

図6 質量の要素平均と運動量の節点平均

Hybrid形上流化有限要素による新しい定式化を提案した。そして双対空間の内積が上流化有限要素法の本質であることを示した。また、上流化された離散化ナブラ演算子を導入し、係数行列の低容量化と計算の高速化を試みた。そして、離散化ナブラ演算子は座標系に依存しないため、任意の非構造格子に適用でき、定式化を極めて単純化することが明らかとなった。さらに、3次元の上流化された形状関数と離散化ナブラ演算子に対する公式を求めておいた。これより、拡散行列は容易に計算される。この拡散行列は hourglass 行列を自動的に含み数値的に安定である。そして、hourglass 行列はセル Reynolds 数の関数として表されることがわかった。さらに、行列方程式は非常に簡単なスカラー方程式で高精度に近似でき、その結果、3次元の成分表示を必要とせず群有限要素法の適用が容易となった。今後、この新しい理論にもとづいて、実際の計算例を

示していく予定である。

参考文献

- (1) Leonard, B. P., *Comp. Method in Appl. Mech. and Eng.* **19**(1979), 59.
- (2) Van Leer, B., *J. Comp. Phys.* **32**(1979), 101.
- (3) Patanker, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), McGraw-Hill.
- (4) Hughes, T. J. R. et al., *Comp. Method in Appl. Mech. and Eng.* **54**(1986), 341.
- (5) Dukowicz, J. and Ramshaw, J., *J. Comp. Phys.* **13**(1979), 32.
- (6) Tanahashi, T., et al., *Inter. J. Nume. Meth. in Fluid* **11**(1990), 479.
- (7) Tabata, M. and Fujima, S., *J. Comp. and Appl. Mech.* **38**(1991), 411.
- (8) Kakuda, K. and Tosaka, N., *Theor. and Appl. Mech.*, **41**(1992), 223.
- (9) Chen, C. J., *Handbook of Numerical Heat Transfer Chap. 17*, (1987), John-Wiley.
- (10) 棚橋, GSMAC-FEM 数値流体力学とその応用, 第8章, (1991), アイビーシー, 457.
- (11) 棚橋, CFD 数値流体力学, 第3章・第1章, (1993), アイビーシー.
- (12) Belytschko, T. and Ong, J. S. J., *Comp. Method in Appl. Mech. and Eng.* **43**(1984), 251.